
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01214722 9

THÉORIE

FONCTIONS ELLIPTIQUES

THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

MM. BRIOT ET BOUQUET,

PROFESSEURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MAITRES DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME ÉDITION.



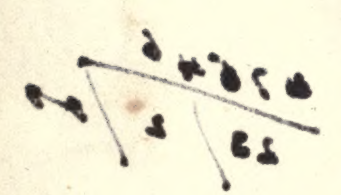


PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1875







PRÉFACE.

La première Partie de cet Ouvrage est consacrée à l'exposition d'une théorie des fonctions, d'après les idées de Cauchy. Le principe fondamental de cette théorie est la considération des fonctions d'une variable imaginaire. Il apparaît pour la première fois dans le Mémoire célèbre de 1825 sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Depuis, par les travaux de Cauchy et des géomètres qui ont suivi ses traces, il a reçu des développements tels, et a conduit à la découverte d'un si grand nombre de vérités nouvelles, que son importance est aujourd'hui universellement reconnue. Cependant on constate avec regret que, dans quelques ouvrages consacrés à cet ordre de recherches, on ne rend pas à Cauchy la justice qui lui est due.

Dans la théorie de Cauchy, la marche de la variable imaginaire est figurée par le mouvement d'un point sur un plan. Pour représenter les fonctions qui acquièrent plusieurs valeurs pour une même valeur de la variable, Riemann regardait le plan comme formé de plusieurs feuillets superposés et réunis par des soudures, de manière que la variable puisse passer d'un feuillet à un autre en traversant une ligne de raccordement. La conception des sur-

faces à feuillets multiples présente quelques difficultés; malgré les beaux résultats auxquels Riemann est arrivé par cette méthode, elle ne nous a paru présenter aucun avantage pour l'objet que nous avions en vue. L'idée de Cauchy se prête très-bien à la représentation des fonctions multiples; il suffit de joindre à la valeur de la variable la valeur correspondante de la fonction, et, quand la variable a décrit une courbe fermée et que la valeur de la fonction a changé, d'indiquer ce changement par un indice.

Pour étudier la variation de la fonction, quand la variable z est très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$, et l'on donne à z' des valeurs très-petites; la nouvelle variable est figurée, comme la première, par le mouvement d'un point sur un plan. Si l'on conçoit que les deux plans relatifs aux variables z et z' soient tangents à une sphère aux extrémités d'un diamètre, on remarque que les droites qui joignent les deux points correspondant aux extrémités du diamètre percent la surface de la sphère en un même point; on transporte ainsi sur la sphère les deux figures planes. Cette considération de la sphère, due à M. Neumann, est commode dans l'étude des fonctions algébriques, elle simplifie les énoncés : nous l'avons adoptée dans cette seconde édition. Toutefois, nous ferons remarquer que le raisonnement reste le même ; après avoir étudié la marche de la fonction pour les valeurs finies de z, sur le premier plan, il est nécessaire d'opérer la transformation $z = \frac{1}{z'}$, et d'étudier comment se comporte la fonction dans le voisinage du point $z' = 0$, sur le second plan; on réunit ensuite les deux parties de la démonstration à l'aide de la sphère. Ceci nous donne

l'occasion de répondre à des critiques qui nous ont été faites au sujet de quelques théorèmes contenus dans la première édition de cet Ouvrage; on oubliait sans doute la seconde partie de la démonstration, sur laquelle, pour éviter les longueurs et les répétitions, nous n'avons pas toujours assez insisté.

Après cette étude générale des fonctions, nous nous occupons spécialement des fonctions doublement périodiques. Les fonctions elliptiques sont les plus simples d'entre elles. Ce sont les intégrales elliptiques qui se sont présentées d'abord dans le Calcul intégral; elles ont été étudiées à ce point de vue, dès 1786, par Legendre, qui en a trouvé un grand nombre de propriétés; le grand *Traité des Fonctions elliptiques*, publié en 1825, contient le résultat de ses longues et patientes recherches. Abel, le premier, en 1826, a considéré les fonctions elliptiques proprement dites, qui sont les inverses de ces intégrales, et a reconnu l'existence des deux périodes. Vers la même époque, Jacobi s'est occupé du même sujet, et les immortels travaux de ces deux grands géomètres ont paru dans les premiers volumes du *Journal de Crelle*.

Les recherches d'Abel ne se rapportent pas seulement aux transcendantes elliptiques, mais à d'autres transcendantes d'un ordre plus élevé : il a découvert à ce sujet un théorème que l'on regarde comme une des plus belles conquêtes de l'Analyse moderne. La considération du chemin suivant lequel s'effectue l'intégration, d'après les principes posés par Cauchy, était nécessaire pour donner à ce théorème son sens précis et sa vraie signification. C'est en suivant la voie ouverte par Abel qu'un grand nombre de géomètres éminents de notre époque ont enrichi la Science de leurs brillantes découvertes.

Nous devons rappeler que M. Liouville a exposé, dans un cours professé au Collége de France, une théorie des fonctions elliptiques basée sur la considération de la double périodicité. Le programme de ce cours a été publié dans les *Comptes rendus* de 1851. Les savantes leçons de l'illustre géomètre, et les beaux travaux de M. Hermite sur le même sujet, ont été le point de départ de nos propres recherches. Nous devons beaucoup aux affectueux conseils que M. Hermite a bien voulu nous donner pour cette seconde édition de notre Ouvrage.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE PREMIER.

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS.

1. On appelle *quantité imaginaire* une expression de la forme $x + y\sqrt{-1}$, dans laquelle x et y sont des quantités réelles, positives ou négatives. Pour simplifier l'écriture, nous représenterons le symbole $\sqrt{-1}$ par la lettre i.

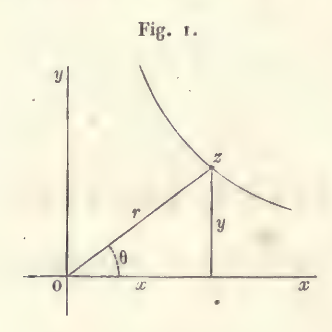
En désignant par r un nombre positif et par θ un angle, on peut poser $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, et la quantité imaginaire se met sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Le nombre positif r est le *module*, l'angle θ l'*argument* de la quantité imaginaire. Le module d'une quantité imaginaire est parfaitement déterminé; mais l'argument admet une infinité de valeurs formant une progression arithmétique, dont la raison est 2π.

Si dans un plan on trace deux droites rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 1), on peut figurer la quantité imaginaire $x + yi$ par le point z, dont les coordonnées sont x et y. Le module r est la longueur de la droite Oz qui joint l'origine au point z, l'argument θ est l'angle que fait cette

droite avec l'axe fixe Ox, angle positif ou négatif, suivant qu'une droite, partant de la position initiale Ox, le décrit en tournant de Ox vers Oy, ou en sens inverse.

On dit qu'une quantité imaginaire $z = x + yi$ varie d'une manière continue, lorsque les deux quantités réelles x et y varient d'une manière continue. Cette variation est figurée par la courbe que décrit le

Fig. 1.



point z. Le module varie d'une manière continue et aussi chacun des arguments. Il y a exception toutefois lorsque la quantité s'annule, c'est-à-dire lorsque la courbe passe par l'origine; dans ce cas, l'argument éprouve une variation brusque égale à π, si la branche de courbe décrite par le point z admet une tangente unique au point O.

Fonctions d'une variable imaginaire.

2. Lorsque deux variables imaginaires z et u sont liées entre elles de telle sorte que la variation de l'une entraîne celle de l'autre, on dit que les deux quantités sont *fonctions* l'une de l'autre. On dira, par exemple, que u est fonction de z, et l'on indiquera cette dépendance par la notation habituelle $u = f(z)$.

Lorsque la quantité u varie d'une manière continue, quand le point z se meut dans une certaine partie du plan, on dit que la fonction est continue dans cette partie du plan. Si l'on représente la fonction, comme la variable, par un point u situé dans le même plan ou dans un plan différent, quand le point z décrit une ligne, le point u décrit une ligne correspondante.

Dérivée.

3. Soient z et z' deux points voisins situés dans la partie du plan considérée; lorsque le rapport

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

tend vers une même limite, quand le point z' se rapproche indéfiniment du point z, d'une manière quelconque, cette limite s'appelle la *dérivée* de la fonction; nous la représenterons, suivant l'usage, par la notation $f'(z)$.

Dans tout ce qui suit, nous ne nous occuperons que des fonctions qui admettent une dérivée. A cette propriété correspond une propriété géométrique remarquable.

Si l'on pose

$$f'(z)=a(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$
$$z'-z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

on a

$$\frac{u'-u}{z'-z}=\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}=f'(z)+\varepsilon=(a+\varepsilon')[\cos(\alpha+\varepsilon'')+i\sin(\alpha+\varepsilon'')],$$

la quantité imaginaire ε tendant vers zéro, ainsi que les deux quantités réelles ε', ε'', quand le point z' se rapproche du point z. On en déduit

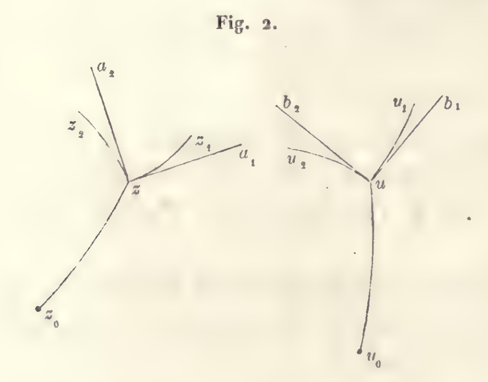
$$u'-u=\rho(a+\varepsilon')[\cos(\theta+\alpha+\varepsilon'')+i\sin(\theta+\alpha+\varepsilon'')];$$

le module de $u'-u$ est $\rho(a+\varepsilon')$, son argument $\theta+\alpha+\varepsilon''$. Supposons que le point z' décrive une courbe zz_1 (*fig.* 2) ayant une tangente za_1 au point z; quand le point z' se rapproche du point z, l'argument θ de $z'-z$ tend vers une limite θ_1 qui est l'angle de la tangente za_1 avec l'axe ox; l'argument de $u'-u$ tendant vers la limite $\theta_1+\alpha$, on en conclut que le point u' décrit une courbe uu_1, ayant une tangente ub_1, dont la direction est définie par l'angle $\theta_1+\alpha$.

Concevons maintenant que le point z' décrive successivement deux courbes zz_1, zz_2, ayant des tangentes za_1, za_2, dont les arguments sont θ_1

et θ_2; le point u' décrira deux courbes uu_1, uu_2, ayant des tangentes ub_1, ub_2, dont les arguments sont $\theta_1 + \alpha$, $\theta_2 + \alpha$; l'angle $b_1 u b_2$ est égal à $\theta_2 - \theta_1$, et par conséquent à l'angle $a_1 z a_2$. Ainsi, lorsqu'une fonction $u = f(z)$ admet une dérivée, les courbes décrites par le point u se

Fig. 2.



coupent sous les mêmes angles que celles qui sont décrites par le point z. Ceci suppose toutefois qu'au point z la dérivée n'est pas nulle.

4. Il résulte de là qu'une fonction ayant une dérivée donne un mode de transformation des figures planes dans lequel les angles sont conservés. Pour en montrer un exemple bien simple, considérons la fonction $u = \frac{1}{z}$.

Si l'on pose

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on a

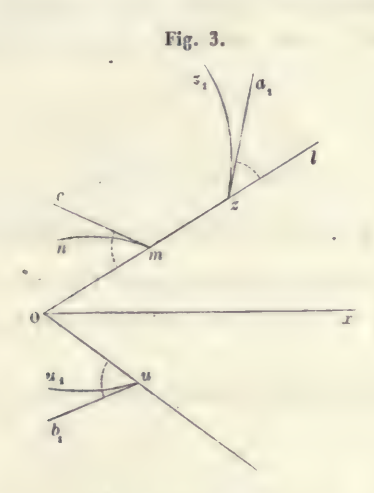
$$u = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Quand le point z' décrit le prolongement zl (*fig.* 3) du rayon vecteur, le point u' décrit la droite uO, en se rapprochant de l'origine; à la courbe zz_1 correspond la courbe uu_1, et l'angle $b_1 u$O est égal à $a_1 z l$. Faisons tourner la seconde figure autour de l'axe Ox; le point u s'applique en m sur le rayon vecteur Oz, et la courbe uu_1 prend la position

mn; les tangentes za_1, mc aux courbes zz_1, mn font des angles égaux avec le rayon vecteur; c'est la transformation par rayons vecteurs réciproques.

5. Concevons que le point z décrive deux séries de lignes orthogonales, par exemple deux séries de droites, parallèles, les unes à l'axe Ox,

Fig. 3.



les autres à l'axe Oy; le point u décrira aussi deux séries de lignes orthogonales. Ainsi toute fonction qui admet une dérivée transforme un système de lignes orthogonales en un autre. Considérons, par exemple, la fonction $u = z^2$; si l'on pose

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\quad u = r'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

on a

$$r' = r^2,\quad \theta' = 2\theta;$$

aux droites

$$r\sin\theta = b,\quad r\cos\theta = a,$$

respectivement parallèles à Ox et à Oy, correspondent les paraboles homofocales

$$r' = \frac{2b^2}{1-\cos\theta'},\quad r' = \frac{2a^2}{1+\cos\theta'}.$$

Autre méthode.

6. Nous allons envisager la question à un point de vue un peu différent. Posons

$$u = X + Yi,$$

X et Y étant des fonctions réelles de deux variables réelles et indépendantes x et y. Laissant y constant, faisons varier x; nous aurons

$$\Delta z = \Delta x,$$

et

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta X}{\Delta x} + i\frac{\Delta Y}{\Delta x};$$

si le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tend vers une limite, les rapports $\frac{\Delta X}{\Delta x}$, $\frac{\Delta Y}{\Delta x}$ tendent respectivement vers des limites déterminées. On en conclut que les deux fonctions réelles X et Y admettent des dérivées partielles par rapport à x.

Laissant x constant, faisons maintenant varier y; nous aurons

$$\Delta z = i\,\Delta y,$$

et par suite

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{1}{i}\left(\frac{\Delta X}{\Delta y} + i\frac{\Delta Y}{\Delta y}\right) = \frac{\Delta Y}{\Delta y} - i\frac{\Delta X}{\Delta y};$$

on en conclut de même que les fonctions réelles X et Y admettent des dérivées partielles par rapport à y.

Si le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ a dans les deux cas la même limite $f'(z)$, on a la relation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} - i\frac{\partial X}{\partial y},$$

qui équivaut aux deux suivantes

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ces relations indiquent que les expressions

$$Y\,dx + X\,dy, \quad X\,dx - Y\,dy$$

sont des différentielles exactes par rapport aux variables x et y.

7. Réciproquement, lorsque deux fonctions réelles et continues X et Y de deux variables indépendantes x et y ont des dérivées partielles satisfaisant aux relations (1), l'expression $u = X + Yi$ peut être considérée comme une fonction de la variable imaginaire $z = x + yi$, admettant une dérivée.

Considérons, en effet, un point quelconque z, et par ce point faisons passer une courbe zz_1 telle que les valeurs de z soient représentées le long de cette courbe par la formule

$$z = \varphi(t) + i\psi(t),$$

dans laquelle les fonctions réelles $\varphi(t)$, $\psi(t)$ de la variable réelle t admettent des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. On aura, le long de cette courbe,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

d'où

$$\frac{du}{dt} = \frac{dX}{dt} + i\frac{dY}{dt} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + i\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right),$$

et, en vertu des relations (1),

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right).$$

On en déduit

$$\Delta u = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)(1 + \varepsilon)\Delta t,$$

ε s'évanouissant avec Δt. Comme on a

$$\Delta z = \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)(1 + \varepsilon_1)\Delta t,$$

ε_1 étant aussi une quantité infiniment petite, il en résulte

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1}.$$

La fonction admet donc une dérivée $\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x}$, indépendante de la direction de la tangente à la courbe zz_1 au point z.

8. Nous démontrerons plus loin que la fonction $f'(z)$ a aussi une dérivée; il en résulte que les fonctions réelles X et Y admettent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux deux variables x et y; d'après les relations (1), ces dérivées partielles satisfont aux équations

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi toute fonction $u = f(z)$, ayant une dérivée, fournit deux solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Il résulte de là que si l'on veut, à l'aide de deux fonctions réelles X et Y des deux variables réelles et indépendantes x et y, composer une fonction $u = X + Yi$ de la variable imaginaire $z = x + yi$ admettant *une* dérivée, on ne pourra prendre arbitrairement aucune de ces deux fonctions.

9. Nous avons figuré la variable imaginaire z par le mouvement dans un plan d'un point dont les coordonnées sont x et y. Concevons que, sur la perpendiculaire au plan en ce point, on porte des longueurs respectivement égales à X et à Y, nous aurons deux surfaces dont l'ensemble représentera la fonction u. Les relations (1) signifient que, si l'on fait tourner d'un angle droit l'une des surfaces autour d'une perpendiculaire au plan xOy, les plans tangents aux deux surfaces aux points situés sur cette perpendiculaire deviennent parallèles. En effet, la normale à la surface X fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y}, \quad -1;$$

après la rotation d'un angle droit de Ox vers Oy, cette normale fait avec

les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$-\frac{\partial X}{\partial y},\quad \frac{\partial X}{\partial x},\quad -1,$$

ou, en vertu des relations (1), à

$$\frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial y},\quad -1;$$

elle est alors parallèle à la normale à la seconde surface.

10. Voici quelques autres propriétés des surfaces X et Y qu'il est bon de remarquer :

Si l'on pose

$$\frac{\partial X}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial X}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=t,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=p',\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=q',\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}=r',\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}=s',\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=t',$$

on a

$$p'=-q,\quad q'=p,$$

et par suite

$$r=-t=s',\quad r'=-t'=-s.$$

Le rayon de courbure R d'une section normale à la surface X est donné par la formule

$$R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+t\cos^2\beta+2s\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)+2s\cos\alpha\cos\beta},$$

α, β, γ étant les angles que fait avec les axes des coordonnées la tangente à la section normale considérée. L'indicatrice de la surface X a pour projection sur le plan xOy l'hyperbole équilatère

$$r(\xi^2-\eta^2)+2s\xi\eta=\sqrt{1+p^2+q^2}$$

rapportée à son centre. L'indicatrice de la surface Y a de même pour projection l'hyperbole équilatère

$$r'(\xi^2-\eta^2)+2s'\xi\eta=\sqrt{1+p'^2+q'^2}$$

ou

$$s(\eta^2-\xi^2)+2r\xi\eta=\sqrt{1+q^2+p^2}.$$

Si l'on fait tourner cette seconde hyperbole de 45 degrés autour de son centre, elle coïncide avec la première. Ainsi, les projections sur le plan xOy des indicatrices des deux surfaces conjuguées aux points homologues sont des hyperboles équilatères égales, et les asymptotes de l'une coïncident avec les axes de l'autre.

Les rayons de courbure principaux de la surface X sont donnés par l'équation du second degré

$$rt - s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs]R + (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

qui se réduit à

$$(r^2+s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(p^2-q^2)r + 2pqs]R - (1+p^2+q^2)^2 = 0;$$

ceux de la surface Y par l'équation

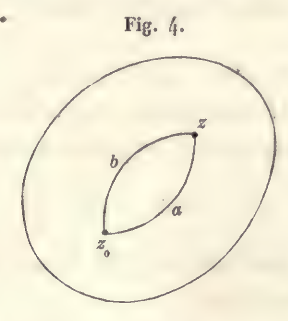
$$(r^2+s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(p^2-q^2)s - 2pqr]R - (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

On voit que le produit des rayons de courbure principaux est le même dans les deux surfaces, et par conséquent que les deux surfaces ont la même courbure aux points homologues.

Fonctions monotropes.

11. Supposons que le point z soit astreint à rester dans une partie du plan déterminée; si tous les chemins qui vont du point initial z_0 à

Fig. 4.



un point quelconque z (*fig.* 4) situé dans cette partie du plan conduisent à la même valeur de la fonction, nous dirons que la fonction est *monotrope* dans cette partie du plan.

Il est évident que, si le point mobile décrit une courbe fermée située dans la partie du plan considérée, la fonction reprend sa valeur primitive.

Réciproquement, lorsque la fonction jouit de cette propriété, elle est monotrope. Considérons, en effet, les deux chemins $z_0 az$, $z_0 bz$, qui vont du point z_0 au point z; soit u_0 la valeur initiale de la fonction, u la valeur qu'elle acquiert quand on suit le chemin $z_0 az$; en continuant suivant $z bz_0$, on ramène la valeur initiale u_0; si maintenant on rétrograde suivant $z_0 bz$, la fonction repassera par la même valeur en chaque point, et par conséquent elle acquerra en z la valeur u obtenue précédemment.

Une fonction entière, plus généralement une fonction rationnelle, n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de z, est monotrope dans une partie du plan limitée par une courbe quelconque. Nous dirons pour abréger que, dans ce cas, la fonction est monotrope dans toute l'étendue du plan.

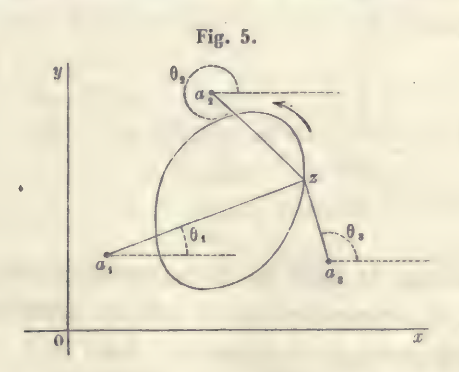
Exemples de fonctions polytropes.

12. Considérons d'abord la fonction

$$u = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n)}.$$

Marquons dans le plan les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*fig.* 5); si l'on prend pour origine successivement chacun de ces points, en conservant la

Fig. 5.



direction des axes, le même point représentera, par rapport à ces différents systèmes d'axes, les binômes $z - a_1$, $z - a_2, \ldots, z - a_n$.

Posons

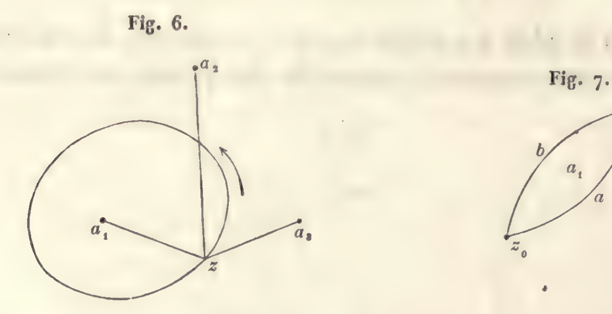
$$z - a_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z - a_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z - a_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n);$$

on a

$$u = (r_1 r_2 \dots r_n)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{2} + i\sin\frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}{2}\right).$$

Lorsque le point z décrit une courbe fermée ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \dots, a_n$, les arguments $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ reprennent leurs valeurs primitives, et par conséquent la fonction u revient à la même valeur. On en conclut que la fonction est monotrope dans toute partie du plan ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \dots, a_n$, que nous appellerons *points critiques*.

13. Supposons maintenant que le point z décrive une courbe fermée comprenant un point critique a_1 (*fig.* 6), dans un sens tel (pour la disposition adoptée des axes) qu'un observateur, en décrivant le contour, ait constamment à sa gauche l'aire enveloppée par la courbe, et dorénavant nous appellerons le sens de ce mouvement *sens positif;* les arguments $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ reprennent leurs valeurs primitives, mais θ_1 augmente de 2π; l'argument de u augmente donc de π, et par conséquent la fonction change de signe.



Considérons deux chemins $z_0 az$, $z_0 bz$ (*fig.* 7), allant du point z_0 au point z et comprenant un seul point critique a_1. Soit u_0 la valeur ini-

tiale de la fonction au point z_0, u la valeur que l'on obtient au point z, quand on suit le chemin $z_0 az$; si l'on continue suivant $z bz_0$, d'après ce que nous venons de dire, la fonction change de signe et acquiert en z_0 la valeur $-u_0$. En rétrogradant suivant $z_0 bz$ avec la valeur initiale $-u_0$, la fonction repasse par les mêmes valeurs et reprend en z la valeur u obtenue précédemment. Si maintenant l'on décrit le chemin $z_0 bz$ avec la valeur initiale $+u_0$, le signe du radical étant changé, la fonction acquiert en z la valeur $-u$. Ainsi, les deux chemins $z_0 az$, $z_0 bz$, décrits avec la même valeur initiale u_0, conduisent au point z à deux valeurs de la fonction égales et de signes contraires, et par conséquent la fonction cesse d'être monotrope.

14. Considérons en second lieu la fonction

$$u = (z-a_1)^{\frac{p_1}{q_1}}(z-a_2)^{\frac{p_2}{q_2}}\dots(z-a_n)^{\frac{p_n}{q_n}},$$

dans laquelle les exposants sont des fractions irréductibles. En adoptant les mêmes notations que précédemment, on a

$$u = r_1^{\frac{p_1}{q_1}} r_2^{\frac{p_2}{q_2}}\dots r_n^{\frac{p_n}{q_n}}\left[\cos\left(\frac{p_1\theta_1}{q_1}+\frac{p_2\theta_2}{q_2}+\dots\right)+i\sin\left(\frac{p_1\theta_1}{q_1}+\frac{p_2\theta_2}{q_2}+\dots\right)\right].$$

Lorsque le point z décrit une courbe fermée ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \dots, a_n$, la fonction revient à sa valeur primitive. Elle est donc monotrope dans toute partie du plan ne comprenant aucun des points critiques $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Supposons maintenant que le point z parte du point z_0, la fonction ayant la valeur initiale u_0, et décrive, dans le sens indiqué, une courbe fermée comprenant le point critique a_1; les arguments $\theta_2, \theta_3, \dots$ reprenant leurs valeurs primitives et θ_1 augmentant de 2π, il en résulte que l'argument de u augmente de $\frac{2p_1\pi}{q_1}$; la valeur de la fonction est donc multipliée par la quantité

$$j_1 = \cos\frac{2p_1\pi}{q_1} + i\sin\frac{2p_1\pi}{q_1},$$

qui est une racine primitive de l'équation binôme $x^{q_1} = 1$. Un second

tour donnera $u_0 j_1 \times j_1 = u_0 j_1^2$; un troisième $u_0 j_1^3$, etc. La fonction prend donc au même point z_0 les q_1 valeurs

$$u_0, \quad u_0 j_1, \quad u_0 j_1^2, \ldots, \quad u_0 j_1^{q_1-1};$$

un nouveau tour ramènerait la valeur initiale u_0.

Si l'on tourne ensuite autour du second point critique a_2 avec l'une des q_1 valeurs précédentes prise comme valeur initiale, on obtiendra q_2 valeurs différentes. La forme des valeurs ainsi obtenues est

$$u_0 j_1^{m_1} j_2^{m_2};$$

si les nombres q_1 et q_2 sont premiers entre eux, la fonction acquiert de la sorte $q_1 q_2$ valeurs, et ainsi de suite.



Lorsqu'une fonction, qui a une valeur initiale bien déterminée, acquiert ainsi plusieurs valeurs pour une même valeur de z, suivant les chemins décrits par cette variable, nous dirons que la fonction est *polytrope*.

La définition que nous venons de donner de la fonction $u = z^a$ s'étend au cas où l'exposant a est un nombre incommensurable, positif ou négatif. Si l'on pose

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on a

$$u = z^a = r^a(\cos a\theta + \sin a\theta).$$

Mais ici, lorsque la variable z tourne autour du point critique $z = 0$, la fonction acquiert une infinité de valeurs différentes ayant même module et dont les arguments forment une progression arithmétique dont la raison est $2a\pi$.

Fonctions holomorphes.

15. Lorsqu'une fonction est continue, monotrope, et a une dérivée, quand la variable se meut dans une certaine partie du plan, nous dirons qu'elle est *holomorphe* dans cette partie du plan. Nous indiquons par cette dénomination qu'elle est semblable aux fonctions entières qui jouissent de ces propriétés dans toute l'étendue du plan.

Les valeurs de la variable pour lesquelles la fonction devient nulle sont les *racines* ou les *zéros* de la fonction.

Pôles.

16. Lorsqu'une fonction u est holomorphe dans une certaine partie du plan, excepté en un point z_1, où elle devient infinie, de manière toutefois que la fonction $\frac{1}{u}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point, on dit que ce point est un *pôle* ou un *infini* de la fonction u.

Une fraction rationnelle admet comme pôles les racines du dénominateur; c'est une fonction holomorphe dans toute partie du plan qui ne contient aucun de ses pôles.

Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan, excepté en certains pôles, nous dirons qu'elle est *méromorphe* dans cette partie du plan, c'est-à-dire semblable aux fractions rationnelles.

Emploi de la sphère.

17. Pour étudier la variation d'une fonction, quand la variable z devient très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$, et l'on donne à la nouvelle variable z' des valeurs très-petites. Cette transformation peut être figurée de la manière suivante :

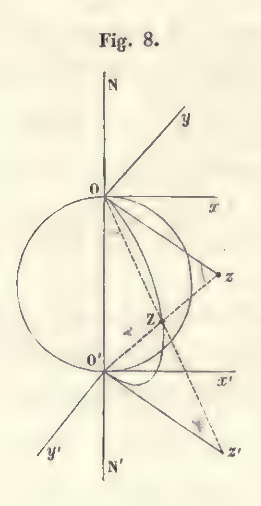
A une sphère d'un diamètre égal à l'unité, menons deux plans tangents xOy, $x'O'y'$ (*fig.* 8) en deux points diamétralement opposés O et O'; la variable z est représentée par un point z situé dans le premier plan tangent; la droite $O'z$ perce la surface de la sphère en un point Z; la droite OZ prolongée rencontre le second plan tangent en un point z' qui, dans ce plan, représente la nouvelle variable z'. En effet, nous remarquons d'abord que, dans les triangles semblables $OO'z$, $OO'z'$, on a

$$\frac{O'z'}{1} = \frac{1}{Oz}.$$

Nous déterminerons les positions des droites Oz, $O'z'$, dans les plans tangents, par les angles θ et θ' qu'elles font respectivement avec des droites fixes Ox, $O'x'$, situées dans un même plan méridien passant par le dia-

mètre OO′, et nous conviendrons de compter les angles positifs dans un sens tel, qu'un observateur placé sur l'un ou l'autre plan, les pieds en O ou en O′, et la tête en dehors de la sphère, voie le rayon vecteur tourner

Fig. 8.



de droite à gauche. De cette manière, les deux droites Oz, O′z', qui sont contenues dans un même plan méridien, ont des arguments xOz, x'O′z' dont la somme est égale à 2π. D'ailleurs le produit des rayons vecteurs Oz, O′z' est égal à l'unité; on a donc

$$zz' = 1.$$

A une courbe décrite par la variable z dans le premier plan tangent correspond une courbe décrite par la variable z' dans le second plan tangent; mais ces deux courbes peuvent être remplacées par une seule, celle que décrit le point Z sur la sphère. Quand le point z décrit dans le premier plan, et dans le sens positif (n° 13), une courbe fermée ne comprenant pas l'origine O, le point z' décrit dans le second plan, et aussi dans le sens positif, une courbe fermée ne comprenant pas l'origine O′; à la partie du premier plan intérieure à la première courbe correspond la partie du second plan intérieure à la seconde courbe. Mais lorsque la première courbe, que nous supposons toujours décrite dans le sens positif, comprend l'origine O, la seconde, qui comprend aussi l'origine O′, est décrite dans le sens négatif par un observateur dont la tête

est tournée vers N′; à la partie du premier plan extérieure à la première courbe correspond la partie du second plan intérieure à la seconde courbe, et *vice versâ*. Si le rayon vecteur de chacun des points de la première courbe augmente indéfiniment, celui de la seconde tend vers zéro; de sorte que l'étude de la fonction pour les valeurs très-grandes de z est ramenée à celle de la même fonction dans la partie de la surface de la sphère voisine du point O′.

18. Considérons, par exemple, une fonction entière

$$u = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m;$$

si l'on pose

$$z = \frac{1}{z'},$$

on a

$$u = \frac{A_0 + A_1 z' + \ldots + A_m z'^m}{z'^m}.$$

La fonction u devient infinie pour $z' = 0$; mais si l'on pose

$$u = \frac{1}{u'},$$

on a

$$u' = \frac{z'^m}{A_0 + A_1 z' + \ldots + A_m z'^m}:$$

la fonction u' est holomorphe dans le voisinage du point O′; on dira donc que le point O′ sur la sphère est un pôle de la fonction u. Ainsi la fonction entière est holomorphe sur toute la sphère, excepté au point O′ qui est un pôle.

Considérons maintenant une fraction rationnelle

$$u = \frac{A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m}{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_n}:$$

en posant

$$z = \frac{1}{z'},$$

on a

$$u = z'^{n-m} \frac{A_m + A_{m-1} z' + \ldots + A_0 z'^m}{B_n + B_{n-1} z' + \ldots + B_0 z'^n}.$$

Si m est égal ou inférieur à n, la fonction u est holomorphe dans le voisinage du point $z' = 0$, qui est ainsi un point ordinaire. Si m est supérieur à n, la fonction u devient infinie pour $z' = 0$; mais la fonction $\frac{1}{u}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point, qui est un pôle de la fonction u.

Considérons enfin la fonction

$$u = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n)}$$

que nous avons étudiée au n° 10. Si l'on pose

$$z = \frac{1}{z'}, \quad u = \frac{1}{u'},$$

on a

$$u' = \frac{z'^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(1 - a_1 z')(1 - a_2 z')\ldots(1 - a_n z')}}.$$

Lorsque n est pair, le point O′ est un pôle de la fonction u. Lorsque n est impair, c'est un point critique; car autour de ce point se permutent les deux valeurs de u' et par conséquent celles de u qui sont très-grandes dans le voisinage.

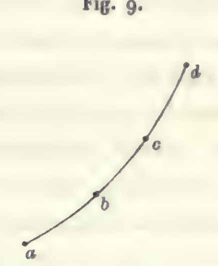
CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

Nombre des racines d'un polynôme entier.

19. Lemme I. — *Lorsqu'une fonction est méromorphe dans une partie du plan, la variation qu'éprouve l'argument de la fonction, quand la variable décrit une ligne ad* (*fig.* 9) *située dans cette partie du plan, et ne*

Fig. 9.

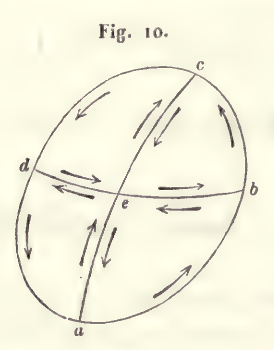


passant par aucune racine ni par aucun pôle, est égale à la somme des variations qu'il éprouve sur les différentes portions ab, bc, cd de cette ligne, et cela quel que soit celui des arguments possibles que l'on prenne au commencement de chacun des arcs.

20. Lemme II. — *Lorsqu'une fonction est méromorphe dans une certaine étendue, si l'on divise cette aire en plusieurs parties par des transversales, la variation qu'éprouve l'argument de la fonction, quand la variable décrit le contour de l'aire totale dans le sens positif, est égale à la somme des variations qu'il éprouve, quand la variable décrit le contour de chacune des aires partielles dans le sens positif.*

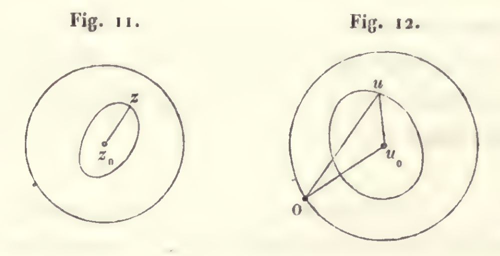
Considérons l'aire enveloppée par la courbe *abcd* (*fig.* 10), et qui est divisée en quatre parties par des transversales. Nous supposons qu'aucune des lignes ne passe par une racine ni par un pôle, et que chaque contour est parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel

Fig. 10.



qu'un observateur ait toujours à sa gauche l'aire enveloppée par le contour. La variation de l'argument de la fonction suivant le contour *abea* est égale à la somme des variations suivant les arcs *ab*, *be*, *ea*; de même la variation de l'argument suivant le contour *bceb* est égale à la somme des variations suivant les arcs *bc*, *ce*, *eb*, et ainsi de suite. Mais chacune des transversales *ae*, *be*, *ce*, *de* est parcourue deux fois dans des sens opposés, ce qui donne des variations égales et de signes contraires; il reste donc dans la somme les variations relatives aux arcs *ab*, *bc*, *cd*, *da*, c'est-à-dire la variation relative au contour entier *abcda*.

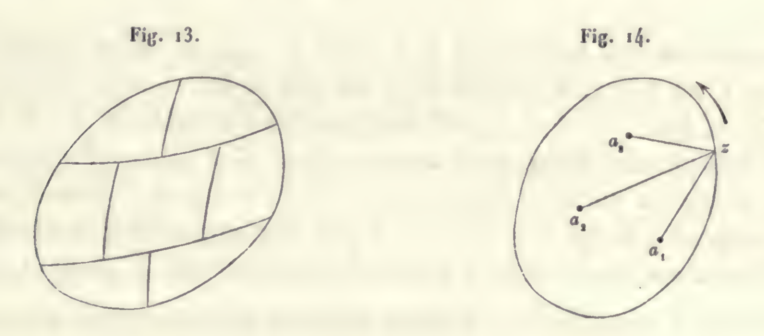
Fig. 11. Fig. 12.



21. Théorème I. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan ne comprenant aucune racine, la variation de l'argument de la fonction sur le contour de l'aire est nulle.*

Soit z_0 une valeur de la variable z à laquelle correspond pour la fonction une valeur u_0 différente de zéro. La fonction étant continue, on peut assigner un nombre ρ tel que, si le module de $z - z_0$ est égal ou inférieur à ρ, le module de $u - u_0$ ou la distance $u_0 u$ soit moindre que le module de u_0 ou la distance Ou_0. D'après cela, si le point z décrit une courbe fermée (*fig.* 11) comprise dans le cercle décrit du point z_0 comme centre avec un rayon égal à ρ, le point u décrira une courbe fermée (*fig.* 12) située dans le cercle décrit du point u_0 comme centre avec un rayon égal à la distance Ou_0; l'argument de u reprendra donc sa valeur primitive.

Supposons maintenant que le point z décrive le contour d'une aire ne comprenant aucune racine. On pourra partager cette aire en parties assez petites (*fig.* 13) pour que chacune d'elles jouisse de la propriété précédente. La variation de l'argument de la fonction étant nulle sur le contour de chaque aire partielle, elle est nulle aussi sur le contour de l'aire totale, d'après le lemme II.



22. Théorème II. — *La variation de l'argument d'un polynôme entier, suivant le contour d'une aire parcourue dans le sens positif, est égale au produit de 2π par le nombre des racines comprises dans cette aire.* (Cauchy.)

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (*fig.* 14) les racines situées dans l'aire plane considérée; on a

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n)\varphi(z);$$

l'argument du polynôme $f(z)$ est égal à la somme des arguments des

facteurs; quand le point z décrit la courbe fermée, dans le sens positif, l'argument de chacun des facteurs $z - a_1$, $z - a_2, \ldots, z - a_n$ augmente de 2π; le polynôme $\varphi(z)$ n'ayant aucune racine à l'intérieur de la courbe, son argument reprend sa valeur primitive; donc l'argument de $f(z)$ augmente de $2\pi \times n$. Ceci ne suppose pas que toutes les racines soient distinctes.

23. Corollaire. — *Un polynôme entier du degré m a m racines.*

Soit

$$u = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$$

le polynôme proposé; si l'on pose

$$z = \frac{1}{z'},$$

ce polynôme devient

$$u = \frac{A_0 + A_1 z' + \ldots + A_m z'^m}{z'^m}.$$

Le numérateur ne s'annulant pas pour $z' = 0$, on peut assigner un nombre r' tel que, si le module de z' est égal ou inférieur à r', le module de $A_1 z' + A_2 z'^2 + \ldots + A_m z'^m$ soit moindre que celui de A_0; le numérateur ne s'annulera donc pour aucune valeur de z' située à l'intérieur du cercle décrit du point O' comme centre avec le rayon r' dans le second plan tangent à la sphère (n° 17), et par conséquent le polynôme proposé n'aura aucune racine en dehors du cercle décrit du point O comme centre avec le rayon $r = \frac{1}{r'}$ dans le premier plan tangent. Concevons maintenant que le point z décrive la circonférence r dans le sens positif, ou que le point z' décrive la circonférence r' dans le sens négatif, l'argument du numérateur ne changeant pas, et celui de z' variant de -2π, l'argument de u éprouvera une variation égale à $2\pi \times m$; donc le polynôme a m racines.

En désignant par a_0 le module de A_0 et par a le plus grand des modules des coefficients suivants, on peut prendre $r' = \frac{a_0}{a_0 + a}$; il en résulte que le nombre $r = \frac{a_0 + a}{a_0} = 1 + \frac{a}{a_0}$ est une limite supérieure des modules des racines.

Manière de déterminer le nombre des racines d'un polynôme entier comprises dans un contour donné.

24. D'après le théorème II, pour connaître le nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ comprises dans un contour donné C, qui ne passe par aucune des racines, il suffit de déterminer la variation qu'éprouve l'argument de $f(z)$, quand le point z décrit ce contour dans le sens positif, et de diviser cette variation par 2π. Supposons que l'on ait, le long de ce contour, $f(z) = X + iY$, X et Y étant deux fonctions réelles d'une même variable réelle t. Soient X_0, Y_0 les valeurs de X et Y pour $t = t_0$, a_0 le point correspondant de la courbe et φ_0 l'argument de $f(z)$; cet argument φ_0 est l'un des angles qui répondent à la tangente $\frac{Y_0}{X_0}$; si X_0 est positif, on peut prendre pour φ_0 un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\cdot$ Faisons varier t de telle sorte que le contour C soit parcouru dans le sens positif. Tant que t, variant à partir de t_0, n'atteint pas une valeur pour laquelle X s'annule et change de signe, l'argument variable reste toujours compris entre les mêmes limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\cdot$ Mais si le quotient $\frac{Y}{X}$ devient infini, et passe d'une valeur positive à une valeur négative, φ croît au delà de $\frac{\pi}{2}$; si, au contraire, le quotient passe d'une valeur négative à une valeur positive, φ décroît au-dessous de $-\frac{\pi}{2}\cdot$ Donc, en appelant ψ l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui répond à la nouvelle valeur de la tangente, on aura



$$\varphi = \varepsilon_1\pi + \psi,$$

ε_1 étant égal à $+1$ dans le premier cas et à -1 dans le second cas. Cette formule s'appliquera jusqu'à ce que X en s'annulant change de signe une seconde fois. A partir de cette nouvelle valeur de t, on aura

$$\varphi = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \psi,$$

ε_2 étant encore égal à ± 1, suivant que le quotient $\frac{Y}{X}$ passe d'une valeur

positive à une valeur négative, ou inversement, et ψ désignant toujours l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, qui répond à la valeur de la tangente $\frac{Y}{X}$. Après un troisième changement de signe de X, on aura

$$\varphi = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \varepsilon_3\pi + \psi,$$

et ainsi de suite. Par conséquent, si X a changé de signe m fois avant que le point z en suivant le contour C arrive dans le voisinage de a_0, on aura pour un pareil point

$$\varphi = \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi + \ldots + \varepsilon_m\pi + \psi.$$

Mais lorsque z atteint a_0, l'angle ψ devient égal à φ_0, et la variation totale de l'argument est

$$\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m);$$

on a donc

$$n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_m),$$

n étant le nombre des racines comprises dans le contour C. Soient m' le nombre des termes de la parenthèse dont la valeur est $+1$, m'' le nombre des termes dont la valeur est -1; la formule s'écrit

$$n = \frac{1}{2}(m' - m'').$$

Lorsque la valeur initiale X_0 de X est négative, on peut répéter le même raisonnement en prenant pour φ_0 et ψ des angles compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$.

25. La somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$, qui correspond à la variation de t entre les limites t_0 et t_1, est ce que Cauchy nomme *indice* de la fonction $\frac{Y}{X}$ entre les limites t_0 et t_1, et il représente cet indice par la notation

$$I_{t_0}^{t_1}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \text{ou} \quad I_{t_0}^{t_1} F(t).$$

Si l'on partage une ligne quelconque en plusieurs parties, l'indice du quotient $\frac{Y}{X}$ relatif à cette ligne est évidemment égal à la somme des indices du même quotient pour chacune des parties de la ligne.

On calcule aisément l'indice relatif à une ligne donnée, lorsque le long de cette ligne X et Y sont des fonctions entières de la variable t, à l'aide des remarques suivantes (Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*, 25[e] Cahier).

1° Si le degré de Y surpasse celui de X, en effectuant la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste Y_1 de degré moindre que X, on a

$$\frac{Y}{X} = Q + \frac{Y_1}{X},$$

Q étant une fonction entière. Il est clair que les quotients $\frac{Y}{X}$ et $\frac{Y_1}{X}$ deviennent infinis en même temps et ont des valeurs de même signe pour les valeurs de la variable voisines de celles qui les rendent infinis; il en résulte

$$I_{t_0}^{t_1}\left(\frac{Y}{X}\right) = I_{t_0}^{t_1}\left(\frac{Y_1}{X}\right).$$

2° Considérons les deux quotients inverses $\frac{Y}{X}$, $\frac{X}{Y}$ et leurs indices I, I_1, quand t varie de t_0 à t_1. Chaque fois que l'une des fonctions X, Y s'annule et change de signe, l'un des deux quotients devient infini et son indice augmente ou diminue d'une unité, suivant que ce quotient passe d'une valeur positive à une valeur négative, ou inversement. Par conséquent, si le quotient $\frac{Y}{X}$ a le même signe pour t_0 et t_1, le nombre des changements de signes qu'il éprouve en allant d'une valeur positive à une valeur négative est égal au nombre des changements de signes qu'il éprouve en allant d'une valeur négative à une valeur positive, et l'on a

$$I + I_1 = 0.$$

Mais si le quotient a des signes contraires pour t_0 et t_1, on a

$$I + I_1 = \pm 1,$$

le signe + correspondant au cas où la quantité $\frac{Y_0}{X_0}$ est positive, le

signe — à celui où elle est négative. D'une manière générale, les deux indices I et I_1 satisfont à une relation de la forme

$$I + I_1 = \varepsilon,$$

dans laquelle ε désigne un nombre égal à zéro, à $+1$ ou à -1.

Il résulte de là que l'on peut exprimer l'indice de la fonction $\frac{Y}{X}$ à l'aide d'une somme de termes analogues à ε, et de l'indice d'un dernier quotient dont le diviseur ne contiendra plus la variable t, indice évidemment égal à zéro. Pour fixer les idées, supposons que X soit d'un degré plus élevé que Y, et, pour l'uniformité des notations, représentons ce dernier polynôme par X_1. Effectuons la division de X par X_1, jusqu'à ce que nous arrivions à un reste d'un degré moindre que celui de X_1; appelons X_2 ce reste changé de signe. Divisons X_1 par X_2; soit X_3 le reste changé de signe; en continuant cette série d'opérations, on parviendra à un reste constant, puisqu'on peut supposer que les polynômes X et X_1 n'ont pas de facteurs binômes communs; soit X_n ce dernier reste changé de signe. On a les relations

$$\begin{gathered}
I\left(\frac{X_1}{X}\right) - I\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = \varepsilon_1, \\
I\left(\frac{X_2}{X_1}\right) - I\left(\frac{X_3}{X_2}\right) = \varepsilon_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
I\left(\frac{X_{n-1}}{X_{n-2}}\right) - I\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right) = \varepsilon_{n-1}, \\
I\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right) + I\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right) = \varepsilon_n.
\end{gathered}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et observant que $I\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right)$ est nul, il vient

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Pour obtenir $I\left(\frac{X_1}{X}\right)$, on calculera les valeurs

$$\begin{matrix}
(X)_{t_0}, & (X_1)_{t_0}, \ldots, & (X_{p-1})_{t_0}, & (X_p)_{t_0}, \ldots, & X_n, \\
(X)_{t_1}, & (X_1)_{t_1}, \ldots, & (X_{p-1})_{t_1}, & (X_p)_{t_1}, \ldots, & X_n
\end{matrix}$$

des fonctions X pour les deux valeurs t_0, t_1 de la variable t. Considé-

rons deux termes consécutifs $(X_{p-1})_{t_0}$, $(X_p)_{t_0}$ de la première suite, et les termes correspondants $(X_{p-1})_{t_1}$, $(X_p)_{t_1}$ de la seconde. Si les signes des termes $(X_{p-1})_{t_0}$, $(X_p)_{t_0}$ présentent une permanence ou une variation, et de même les signes de $(X_{p-1})_{t_1}$, $(X_p)_{t_1}$ une permanence ou une variation, on aura

$$\varepsilon_p = 0.$$

Si les signes des deux premiers termes présentent une permanence, les signes des deux derniers une variation, on aura

$$\varepsilon_p = 1.$$

Enfin, si les signes des deux premiers termes offrent une variation et ceux des autres une permanence, on aura

$$\varepsilon_p = -1.$$

Représentons par P_ν le nombre des permanences de la première suite qui se transforment en variations dans la seconde, et par V_p le nombre des variations qui se changent en permanences, il est clair que

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right) = P_\nu - V_p.$$

Mais, si l'on désigne par V le nombre des variations de la première suite, et par V′ le nombre des variations de la seconde, on a aussi

$$V' = V + P_\nu - V_p,$$

d'où

$$V' - V = P_\nu - V_p,$$

et

$$I\left(\frac{X_1}{X}\right) = V' - V.$$

Ainsi l'indice de la fonction $\frac{X_1}{X}$ est égal au nombre des variations gagnées par la suite des polynômes, quand on passe de t_0 à t_1.

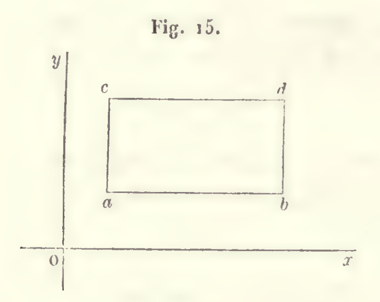
26. Supposons que le contour C soit un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées (*fig.* 15). Appelons y_0 et y_1 les ordonnées des deux côtés *ab*, *cd* parallèles à l'axe des x, x_0 et x_1 les abscisses des deux côtés *ac*, *bd* parallèles à l'axe des y. Soit

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\psi(x,y);$$

on aura

le long de *ab*.... .	$X = \varphi(x, y_0)$,	$Y = \psi(x, y_0)$,	x variant de x_0 à x_1;
le long de *dc*......	$X = \varphi(x, y_1)$,	$Y = \psi(x, y_1)$,	x variant de x_1 à x_0;
le long de *bd*.... .	$X = \varphi(x_1, y)$,	$Y = \psi(x_1, y)$,	y variant de y_0 à y_1;
le long de *ca*......	$X = \varphi(x_0, y)$,	$Y = \psi(x_0, y)$,	y variant de y_1 à y_0.

Fig. 15.



Supposons en second lieu que le contour C soit la circonférence d'un cercle de rayon r, ayant son centre à l'origine. On peut définir les divers points de la circonférence par la formule $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où θ désigne un angle variant de $-\pi$ à $+\pi$. Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = t,$$

on aura

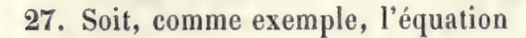
$$z = r\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2ti}{1 + t^2}\right),$$

et la variable t variera de $-\infty$ à $+\infty$. On abrége le calcul en opérant de la manière suivante : on a

$$z = r\,\frac{1 + ti}{1 - ti};$$

la substitution de cette valeur dans le polynôme $f(z)$ donnera un résultat de la forme $\frac{\varphi(t) + i\psi(t)}{(1 - ti)^n}$. La variation de l'argument de ce quotient, lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$, est égale à la différence entre la variation de l'argument du numérateur et la variation de l'argument

du dénominateur. Mais l'argument de $1 - ti$, passant de la valeur $+\frac{\pi}{2}$ à la valeur $-\frac{\pi}{2}$, éprouve une variation égale à $-\pi$; donc la variation de l'argument du dénominateur est $-n\pi$. Par conséquent, si l'on représente par I l'indice du numérateur, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, la variation de l'argument du quotient sera $\pi(\mathrm{I}+n)$.



27. Soit, comme exemple, l'équation

$$z^4 - 5z + 1 = 0.$$

Prenons d'abord pour contour un rectangle dont les côtés, parallèles aux axes, sont déterminés par les abscisses $x_0 = -1$, $x_1 = +1$ et les ordonnées $y_0 = -1$, $y_1 = +1$. On a

$$f(x+yi) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 5x + 1 + (4x^3y - 4xy^3 - 5y)i.$$

Le long du côté ab

$$\mathrm{X} = x^4 - 6x^2 - 5x + 2, \quad \mathrm{X}_1 = -4x^3 + 4x + 5, \quad \mathrm{X}_2 = 20x^2 + 15x - 8,$$
$$\mathrm{X}_3 = -3x - 124, \quad \mathrm{X}_4 = -301868;$$

les signes des résultats des substitutions de -1 et $+1$ étant

$$+,\quad +,\quad -,\quad -,\quad -,$$
$$-,\quad +,\quad +,\quad -,\quad -,$$

l'indice relatif à ce côté est 1. Le long du côté dc, parallèle à ab, on a

$$\mathrm{X} = x^4 - 6x^2 - 5x + 2, \quad \mathrm{X}_1 = 4x^3 - 4x - 5.$$

Nous remarquons que sur les côtés ab et dc les polynômes X sont égaux, et les polynômes Y égaux et de signes contraires. Mais x varie sur le premier côté de -1 à $+1$, sur le second de $+1$ à -1; il en résulte que les indices relatifs à ces deux côtés sont égaux. Le long du côté bd, on a

$$\mathrm{X} = y^4 - 6y^2 - 3, \quad \mathrm{X}_1 = -4y^3 - y, \quad \mathrm{X}_2 = 25y^2 + 12,$$
$$\mathrm{X}_3 = -23y, \quad \mathrm{X}_4 = -276;$$

les signes correspondant à -1 et $+1$ étant

$$\begin{array}{ccccc} -, & +, & +, & +, & -, \\ -, & -, & +, & -, & -, \end{array}$$

l'indice est nul. Enfin, le long de *ca*, on a

$$X = y^4 - 6y^2 + 7, \quad X_1 = 4y^3 - 9y, \quad X_2 = 15y^2 - 28,$$
$$X_3 = 23y, \quad X_4 = 644.$$

En substituant d'abord $+1$, puis -1, les signes des résultats sont

$$\begin{array}{ccccc} +, & -, & -, & +, & +, \\ +, & +, & -, & -, & +, \end{array}$$

l'indice est encore nul. On conclut de ce qui précède qu'une seule racine est comprise dans le carré *abdc*; cette racine est nécessairement réelle. Il est bon de remarquer que les indices relatifs aux côtés *ab* et *dc* du rectangle sont égaux toutes les fois que ces deux côtés sont équidistants de l'axe des x.

Prenons maintenant pour contour une circonférence d'un rayon égal à l'unité et ayant pour centre l'origine. On a sur cette circonférence

$$f(z) = \frac{(7t^4 - 12t^2 - 3) + 10(t^3 + t)i}{(1 - ti)^4}.$$

On obtient l'indice du numérateur à l'aide des polynômes

$$X = 7t^4 - 12t^2 - 3, \quad X_1 = t^3 + t, \quad X_2 = 19t^2 + 3,$$
$$X_3 = -t, \quad X_4 = -3;$$

l'indice étant égal à -2, on en conclut que la circonférence ne comprend qu'une racine.

Si l'on remplace la circonférence dont le rayon est 1 par une autre de rayon égal à 2, on a

$$f(z) = \frac{27t^4 - 102t^2 + 7 + 40(-t^3 + 2t)i}{(1 - ti)^4};$$

l'indice du numérateur s'obtient à l'aide des fonctions

$$X = 27t^4 - 102t^2 + 7, \quad X_1 = -t^3 + 2t, \quad X_2 = 48t^2 - 7,$$
$$X_3 = -t, \quad X_4 = 7.$$

Cet indice étant égal à 4, on en conclut que la seconde circonférence comprend les quatre racines de l'équation. Il est évident, à l'inspection de l'équation, qu'elle n'admet que deux racines réelles comprises, l'une entre zéro et 1, l'autre entre 1 et 2. Le module des deux racines imaginaires conjuguées est donc compris entre 1 et 2; on vérifie ce résultat, en remarquant que ce module a pour expression

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda + \frac{10}{\sqrt{2\lambda}}},$$

λ désignant la racine positive de l'équation

$$8\lambda^3 - 8\lambda - 25 = 0.$$

Continuité des racines.

28. Soit $f(z, u) = 0$ une équation dont le premier membre est un polynôme entier en z et u, du degré m par rapport à u, et que nous supposons irréductible, c'est-à-dire non décomposable en un produit de polynômes entiers en z et u. Si l'on attribue à z une certaine valeur, l'équation en u a m racines; nous allons démontrer que, si le paramètre z varie d'une manière continue, ces m racines varient aussi d'une manière continue (Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, 1841). Cette propriété importante résulte du théorème suivant :

Théorème III. — *Si pour $z = a$ l'équation a n racines égales à b, pour une valeur de z voisine de a, l'équation a n racines voisines de b.*

Pour abréger, remplaçons z et u par $a + z'$ et $b + u'$; pour $z' = 0$, l'équation $f(a + z', b + u') = 0$ admet n racines égales à zéro. En ordonnant le premier membre de l'équation par rapport aux puissances

croissantes de u', on a

$$f(a+z', b+u') = Z_0 + Z_1 u' + Z_2 u'^2 + \ldots + Z_n u'^n + Z_{n+1} u'^{n+1} + \ldots + Z_m u'^m.$$

Les polynômes $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ s'annulent pour $z' = 0$, mais Z_n ne s'annule pas. Du point a comme centre, décrivons un cercle de rayon ρ qui ne comprenne aucune racine du polynôme Z_n, et assujettissons le point z' à rester dans ce cercle. Soit A le plus petit module du polynôme Z_n dans le cercle ρ, B le plus grand module de chacun des polynômes suivants $Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots, Z_m$ dans le même cercle. Nous pouvons mettre le premier membre de l'équation sous la forme

$$f(a+z', b+u') = Z_n u'^n \left(\frac{Z_0}{Z_n}\frac{1}{u'^n} + \frac{Z_1}{Z_n}\frac{1}{u'^{n-1}} + \ldots + \frac{Z_{n-1}}{Z_n}\frac{1}{u'} + 1 + \frac{Z_{n+1}}{Z_n}u' + \frac{Z_{n+2}}{Z_n}u'^2 + \ldots + \frac{Z_m}{Z_n}u'^{m-n}\right),$$

ou

$$f(a+z', b+u') = Z_n u'^n(1 + P + Q),$$

en posant

$$P = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}u' + \frac{Z_{n+2}}{Z_n}u'^2 + \ldots + \frac{Z_m}{Z_n}u'^{m-n},$$

$$Q = \frac{Z_0}{Z_n}\frac{1}{u'^n} + \frac{Z_1}{Z_n}\frac{1}{u'^{n-1}} + \ldots + \frac{Z_{n-1}}{Z_n}\frac{1}{u'}.$$

Si l'on fait mouvoir le point u' sur la circonférence d'un cercle ayant pour centre b et un rayon r plus petit que l'unité, on a

$$\operatorname{mod} P < \frac{B}{A}(r + r^2 + \ldots) = \frac{B}{A}\frac{r}{1-r}.$$

On choisira le rayon r de manière que

$$\frac{B}{A}\frac{r}{1-r} \leqq \frac{1}{2};$$

il suffit pour cela de prendre

$$r \leqq \frac{A}{A+2B};$$

alors le module de P sera plus petit que $\frac{1}{2}$. Le rayon r étant choisi de cette façon, et le point u' se mouvant sur cette circonférence, on a

$$\operatorname{mod} Q < \frac{1}{A}\left(\frac{\operatorname{mod} Z_0}{r^n} + \frac{\operatorname{mod} Z_1}{r^{n-1}} + \ldots + \frac{\operatorname{mod} Z_{n-1}}{r}\right).$$

Les polynômes $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ étant des fonctions continues de z', qui s'annulent pour $z' = 0$, on peut trouver un rayon ρ' plus petit que ρ, et tel que, pour tout point z' situé dans le cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ρ', le module de chacun de ces polynômes soit moindre qu'un nombre donné C, satisfaisant à la condition

$$\frac{C}{A}\left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{r}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{C}{A}\,\frac{1 - r^n}{r^n(1 - r)} \leqq \frac{1}{2};$$

il suffit pour cela de prendre

$$C \leqq \frac{A\, r^n(1 - r)}{2(1 - r^n)}.$$

Le rayon ρ' étant choisi de cette façon, le module de Q sera moindre que $\frac{1}{2}$ pour toutes les valeurs de z' situées dans le cercle ρ' et de u' situées sur la circonférence r, et de même le module de P.

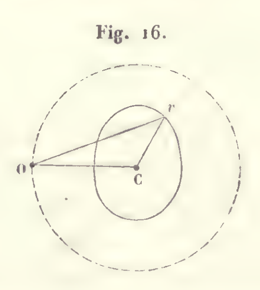
Le point z' restant fixe à l'intérieur du cercle ρ', concevons que la variable u' décrive la circonférence r dans le sens positif, et considérons l'expression

$$f(a + z', b + u') = Z_n u'^n (1 + P + Q),$$

qui est un polynôme entier en u'. L'argument du facteur u'^n éprouve une augmentation égale à $2\pi \times n$. Le facteur $1 + P + Q$, que nous désignerons par v, est une fonction monotrope de u'; figurons-le par un point v dans un plan (*fig.* 16), et marquons le point C qui correspond à $v = 1$; la distance Cv est égale au module de P + Q, qui est moindre que l'unité. Quand la variable u' décrit la circonférence r, le point v décrit une courbe fermée située dans le cercle dont le point C

est le centre et le rayon égal à l'unité, et par conséquent l'argument de v reprend sa valeur primitive. Ainsi l'argument du polynôme

Fig. 16.



$f(a+z', b+u')$ éprouve une augmentation égale à $2\pi \times n$; on en conclut que ce polynôme admet n racines à l'intérieur du cercle r.

Corollaire. — *Si pour $z=a$ la valeur $u=b$ est racine simple, pour une valeur de z voisine de a l'équation admettra une racine simple voisine de b et une seule.*

Définition d'une fonction algébrique.

29. Supposons que, pour $z=z_0$, u_0 soit racine simple de l'équation $f(z, u)=0$; faisons mouvoir le point z sur une courbe; en un point z_1 voisin de z_0 l'équation admet une racine simple u_1 voisine de u_0, et une seule; en un point voisin de z_1 elle admet une racine simple u_2 voisine de u_1, et ainsi de suite. La série des valeurs $u_0, u_1, u_2, \ldots$ forme une suite continue, que l'on regardera comme une fonction de z.

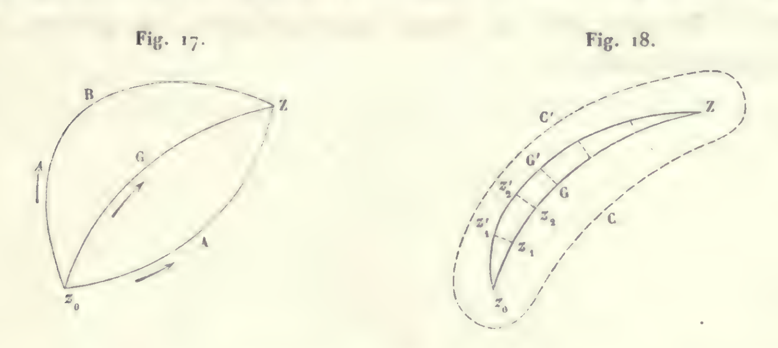
On peut continuer de cette manière tant que la racine considérée u conserve une valeur finie et reste racine simple, c'est-à-dire ne devient pas égale à une autre. Les points où une racine devient infinie sont les racines du coefficient de la plus haute puissance de u dans l'équation; leur nombre est au plus égal à $m'-m$, m désignant le degré de l'équation par rapport à u et m' le degré par rapport à z et u. On obtient les points où l'équation admet des racines finies égales entre elles en éliminant u entre les deux équations

$$f(z, u)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u}=0;$$

leur nombre est au plus égal à $m'(m'-1)$. Telles sont les deux sortes de points *singuliers* que nous rencontrerons dans l'étude des fonctions algébriques.

30. Théorème IV. — *Lorsque, par des déformations successives, on peut amener la courbe* A (*fig.* 17) *qui va du point* z_0 *au point* Z *à la courbe* B *qui unit les mêmes points, sans franchir aucun point pour lequel la racine considérée devient infinie ou égale à une autre, ces deux courbes conduisent en* Z *à la même valeur de la fonction.*

Supposons d'abord que les deux courbes A et B enveloppent une aire dans laquelle il n'y ait aucun point singulier. Soit M le plus petit module de la différence des racines prises deux à deux pour un point quelconque z de cette aire. D'après le théorème précédent, on peut assigner un rayon ρ tel, que si z se déplace dans un cercle de rayon ρ ayant pour centre un point quelconque de l'aire, chacune des racines éprouvera une variation ayant un module moindre que $\frac{M}{2}$. Imaginons que le centre du cercle ρ décrive une courbe G intermédiaire entre A et B, l'enveloppe de ce cercle se composera de deux courbes C et C′ situées de part et d'autre de la courbe G (*fig.* 18). Cela posé, considérons une courbe G′



voisine de G et située entre les deux courbes C et C′; marquons sur les deux courbes G et G′ deux systèmes de points correspondants

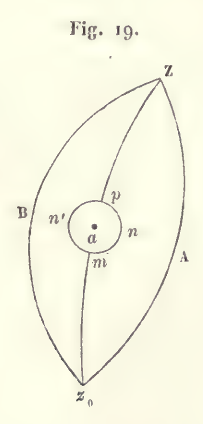
$$z_0,\quad z_1,\quad z_2,\ldots,\quad Z,$$
$$z_0,\quad z'_1,\quad z'_2,\ldots,\quad Z,$$

tels que l'aire $z_0\, z_1\, z'_1\, z_0$ soit comprise dans le cercle décrit du point z_0

comme centre avec le rayon ρ, que l'aire $z_1 z_2 z'_2 z'_1 z_1$ soit comprise dans le cercle décrit du point z_1 comme centre avec le même rayon ρ, etc. Il suffirait pour cela de prendre pour z_1, z'_1 les points où le premier cercle coupe les courbes G et G', pour z_2, z'_2 les points où le second cercle coupe G et G', etc. Nous partons de z_0 avec la valeur initiale u_0; les deux chemins $z_0 z_1$, $z_0 z'_1 z_1$ conduisent en z_1 à des valeurs qui diffèrent chacune de u_0 d'une quantité moindre que $\frac{M}{2}$, et qui, par conséquent, diffèrent entre elles d'une quantité moindre que M; la différence entre deux racines au point z_1 étant plus grande que M, on en conclut que ces deux valeurs sont rigoureusement égales; ainsi les deux chemins $z_0 z_1$, $z_0 z'_1 z_1$ conduisent en z_1 à la même valeur u_1.

Considérons maintenant les deux chemins $z_0 z_1 z_2$, $z_0 z'_1 z'_2 z_2$; on peut remplacer le second par $z_0 z'_1 z_1 + z_1 z'_1 z'_2 z_2$, en parcourant la traverse $z_1 z'_1$ deux fois dans des sens contraires; la première partie $z_0 z'_1 z_1$ donnant u_1 comme $z_0 z_1$, ceci revient à partir du point z_1 avec la valeur initiale u_1 et à décrire les deux chemins $z_1 z_2$, $z_1 z'_1 z'_2 z_2$; ces deux chemins, étant compris dans le cercle de rayon ρ décrit du point z_1 comme centre, conduisent en z_2 à la même valeur u_2, et ainsi de suite. On en conclut que les deux lignes G et G' conduisent en Z à la même valeur U. Par une série de lignes intermédiaires, on passera de la courbe A à la courbe B.

Fig. 19.



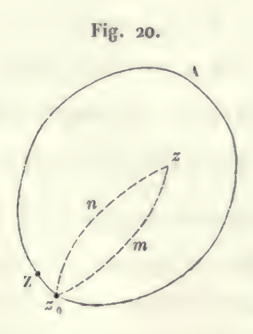
Supposons qu'entre les deux courbes A et B il y ait un point singulier a (*fig.* 19), où l'équation admette une racine infinie ou une racine

multiple b, mais telle, que, lorsque la courbe A en se déformant passe par ce point, la fonction u conserve une valeur finie ou reste racine simple, et par conséquent diffère de la racine multiple b. Ce point a se comportera, dans la question actuelle, comme un point ordinaire; en effet, les courbes A et B peuvent être remplacées par les lignes $z_0 mnp\mathrm{Z}$, $z_0 mn'p\mathrm{Z}$, formées de deux parties communes et des deux moitiés d'un cercle très-petit ayant pour centre le point a; sur ces deux nouveaux chemins, on parcourt d'abord la partie $z_0 m$ avec la même valeur initiale u_0, ce qui conduit en m à la même valeur u_1, qui, par hypothèse, est finie ou diffère de la racine multiple b d'une quantité finie; les deux demi-circonférences conduisent en p à la même valeur u_2; car si les valeurs obtenues étaient différentes, elles différeraient peu l'une de l'autre et différeraient de b de quantités finies; mais, dans le voisinage du point a, les racines peu différentes l'une de l'autre sont celles qui diffèrent très-peu de b. Enfin, la dernière partie $p\mathrm{Z}$ conduira en Z à la même valeur de la fonction.

31. Théorème V. — *Une fonction algébrique est holomorphe dans toute partie du plan limitée par une courbe* A *que l'on peut réduire à un point, sans franchir aucun point où la racine considérée devienne infinie ou égale à une autre.*

Prenons sur la courbe un point Z (*fig.* 20) voisin du point z_0; la courbe $z_0\mathrm{A}\mathrm{Z}$ peut être ramenée, par hypothèse, à la ligne infiniment

Fig. 20.



petite $z_0\mathrm{Z}$, sans franchir aucun point singulier où la racine considérée devienne infinie ou égale à une autre; il en résulte que, si la variable z

décrit la courbe z_0AZ, la fonction, dont la valeur initiale est u_0, acquiert en Z la même valeur que si la variable avait décrit la ligne infiniment petite z_0Z; la courbe fermée A ramène donc en z_0 la valeur initiale u_0. Supposons maintenant que la variable aille du point z_0 à un point quelconque z situé dans la partie du plan considérée par deux chemins z_0mz, z_0nz situés dans cette partie du plan; la courbe fermée z_0Az_0 pouvant être réduite à la courbe fermée z_0mznz_0, sans franchir aucun point singulier, celle-ci ramènera, comme la première, la valeur initiale u_0; on en conclut (n° 11) que les deux chemins z_0mz, z_0nz conduisent en z à la même valeur de la fonction. Ainsi la fonction u a une valeur unique en chacun des points situés dans la partie du plan limitée par la courbe A; c'est une fonction monotrope dans cette partie du plan.

La fonction étant continue, à un accroissement infiniment petit Δz de la variable correspond un accroissement infiniment petit Δu de la fonction, et l'on a

$$(f'_z.\Delta z + f'_u.\Delta u) + \frac{1}{2}(f''_{z^2}.\Delta z^2 + 2f''_{zu}.\Delta z\Delta u + f''_{u^2}.\Delta u^2) + \ldots = 0.$$

Si l'on pose $\Delta u = v\Delta z$ et si l'on divise tous les termes par Δz, cette équation devient

$$(f'_z + vf'_u) + \frac{1}{2}\Delta z(f''_{z^2} + 2vf''_{zu} + v^2f''_{u^2}) + \ldots = 0.$$

Puisque u est racine simple de l'équation $f(z, u) = 0$, la quantité f'_u est différente de zéro. Pour $\Delta z = 0$, l'équation précédente a une racine simple finie $\lambda = -\frac{f'_z}{f'_u}$. D'après le théorème de la continuité, à une valeur très-petite de Δz correspond une valeur de v très-voisine de λ, et une seule; on en conclut que le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tend vers une limite finie et déterminée λ, quand l'accroissement Δz attribué à la variable tend vers zéro d'une manière quelconque, et par conséquent que la fonction admet une dérivée. Il résulte de ce qui précède que, dans l'aire A, la fonction algébrique est continue, monotrope, et admet une dérivée; c'est donc une fonction holomorphe dans cette étendue.

Loi de la permutation des racines autour des points critiques.

32. Supposons qu'au point a l'équation admette une racine b d'ordre n; en un point z_1, voisin de a, elle aura n racines voisines de b. Désignons ces racines par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_n.$$

Si la variable z part de z_1, la fonction ayant la valeur initiale u_1, et décrit un petit cercle autour du point a dans le sens positif, la fonction reprend sa valeur primitive u_1, ou bien, comme sa variation ne peut être que très-petite, elle se change en une autre des n racines précédentes, par exemple en u_2. Dans le premier cas, la racine u_1, se reproduisant elle-même, est une fonction monotrope de z dans le voisinage du point a. Dans le second cas, si l'on décrit le cercle une seconde fois avec la valeur initiale u_2 obtenue après le premier tour, il est impossible que l'on retrouve u_2, car le mouvement inverse ramènerait u_1; on arrivera donc à u_1 ou à une nouvelle racine u_3. Dans le premier cas, les deux racines u_1 et u_2 se permutent quand la variable z tourne autour du point a. Dans le second cas, si l'on décrit le cercle une troisième fois avec la valeur initiale u_3 obtenue après le second tour, il est impossible que l'on retrouve u_3 ou u_2, car le mouvement inverse ramènerait u_2 ou u_1; on arrivera donc à u_1 ou à une nouvelle racine u_4. Dans le premier cas, les trois racines u_1, u_2, u_3 forment ce qu'on appelle un *système circulaire,* ce qui veut dire que, si l'on place les trois quantités sur un cercle, chacune d'elles se change en la suivante, quand z tourne autour du point a. Supposons qu'en continuant de cette manière on arrive à la dernière racine u_n; en décrivant le cercle encore une fois, on reviendrait nécessairement à la première racine u_1, et les n racines voisines de b formeraient un seul système circulaire. Ainsi :

Théorème VI. — *Lorsqu'au point a l'équation admet une racine b d'ordre n, les n racines voisines de b pour une valeur de z voisine de a forment un ou plusieurs systèmes circulaires.*

Manière d'obtenir les systèmes circulaires.

33. Si l'on pose $z = a + z'$, $u = b + u'$, l'équation prend la forme

$$(1) \qquad f(a + z', b + u') = \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0;$$

le premier membre est une somme de termes contenant les deux variables infiniment petites z' et u' à des puissances entières, ou une seule d'entre elles. Il y aura un terme au moins indépendant de u' et un terme au moins indépendant de z', sans quoi le premier membre de l'équation serait divisible par une puissance de u' ou par une puissance de z'. Parmi les termes indépendants de z', celui qui contient u' au degré le moins élevé est du degré n, puisque l'équation admet n racines égales à zéro pour $z' = 0$. Considérons d'abord le cas particulier où, parmi les termes indépendants de u', il y en a un contenant z' à la première puissance; en groupant les deux termes dont nous venons de parler, on mettra l'équation sous la forme

$$(2) \qquad (Az' + Bu'^{n}) + \varphi(z', u') = 0,$$

tous les termes du polynôme $\varphi(z', u')$ étant infiniment petits par rapport à l'un ou à l'autre des deux premiers. Si l'on pose

$$z' = z''^{n}, \quad u' = v z'',$$

les deux premiers termes contiendront z''^{n} en facteur, et chacun des termes suivants une puissance de z'' supérieure à n; on pourra donc diviser par z''^{n} tous les termes de l'équation, qui deviendra

$$(3) \qquad (A + Bv^{n}) + z'' \psi(z'', v) = 0,$$

$\psi(z'', v)$ étant un polynôme entier en z'' et v.

Pour $z'' = 0$, l'équation (3) se réduit à l'équation binôme

$$(4) \qquad A + Bv^{n} = 0, \quad \text{ou} \quad v^{n} = -\frac{A}{B};$$

elle admet n racines simples, finies et différentes de zéro. Désignons par

$$v_1, \quad v_2, \ldots, \quad v_n$$

ces racines, rangées dans un ordre tel, que leurs arguments forment une progression arithmétique ayant pour raison $\frac{2\pi}{n}$. D'après le théorème de la continuité, pour une valeur très-petite de z'', l'équation (3) admet n racines simples respectivement voisines des précédentes, et chacune d'elles est une fonction holomorphe de z'' dans le voisinage de $z'' = 0$; nous les représenterons par

$$v_1 + \varepsilon_1, \quad v_2 + \varepsilon_2, \ldots, \quad v_n + \varepsilon_n,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ étant des quantités très-petites qui s'évanouissent avec z''. On obtient ainsi les n racines de l'équation (1) voisines de zéro

$$u'_1 = (v_1 + \varepsilon_1) z'^{\frac{1}{n}}, \quad u'_2 = (v_2 + \varepsilon_2) z'^{\frac{1}{n}}, \ldots, \quad u'_n = (v_n + \varepsilon_n) z'^{\frac{1}{n}},$$

en donnant à $z'^{\frac{1}{n}}$ l'une quelconque de ses n valeurs.

Chacune de ces racines se compose de deux parties, une partie infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{n}$ et une autre d'ordre supérieur. La loi de permutation des valeurs approchées

$$v_1 z'^{\frac{1}{n}}, \quad v_2 z'^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots, \quad v_n z'^{\frac{1}{n}}$$

est évidente : lorsque z décrit un petit cercle autour du point a, l'argument de $z'^{\frac{1}{n}}$ augmente de $\frac{2\pi}{n}$, ce qui revient à remplacer v_1 par v_2, v_2 par $v_3, \ldots, v_n$ par v_1; les n valeurs approchées forment donc un système circulaire.

Les valeurs exactes jouissent de la même propriété. En effet, la valeur approchée de la première racine devenant $v_2 z'^{\frac{1}{n}}$, la valeur exacte prend la forme $(v_2 + \varepsilon'_1) z'^{\frac{1}{n}}$; il est impossible qu'elle soit égale à une racine autre que la seconde, car si l'on avait, par exemple,

$$(v_2 + \varepsilon'_1) z'^{\frac{1}{n}} = (v_3 + \varepsilon_3) z'^{\frac{1}{n}},$$

on en déduirait

$$v_2 - v_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon'_1,$$

et la quantité infiniment petite $\varepsilon_3 - \varepsilon'_1$ serait égale à la quantité finie $v_2 - v_3$; on a donc $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$, et la racine u'_1 se change en u'_2. De même u'_2 se change en u'_3, u'_3 en $u'_4, \ldots, u'_n$ en u'_1.

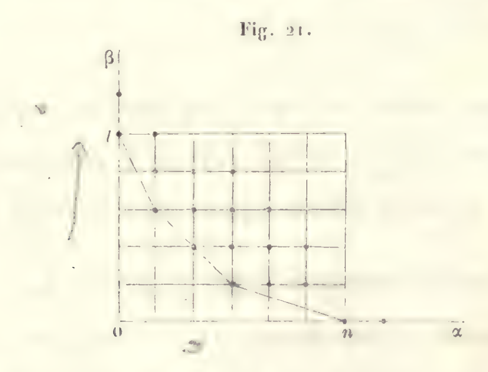
Remarquons que la formule $u = vz'^{\frac{1}{n}}$, dans laquelle v désigne l'une quelconque des racines de l'équation (3), représente le système circulaire des n racines de l'équation (2), quand on fait tourner la variable z autour du point a.

34. Considérons maintenant le cas où, dans l'équation (1), le premier terme indépendant de u' contient z' à une puissance l supérieure à la première. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

Théorème VII. — *Le groupe des n racines voisines de zéro se décompose en sous-groupes tels, que le rapport de chacune des racines d'un même sous-groupe à une même puissance commensurable de z' ait une limite déterminée, finie et différente de zéro.*

Pour démontrer ce théorème, nous suivrons la méthode ingénieuse qui a été employée par M. Puiseux dans son remarquable *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV; 1850). Traçons dans un plan deux axes rectangulaires $O\alpha$, $O\beta$

Fig. 21.



(*fig.* 21), et marquons les points qui ont pour coordonnées les exposants α et β dans les différents termes de l'équation

$$(1) \qquad \sum A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$

Aux termes indépendants de z' correspondent des points situés sur l'axe $O\alpha$; le premier d'entre eux a une abscisse égale à n. Aux termes indépendants de u' correspondent des points situés sur l'axe $O\beta$; le premier d'entre eux a une ordonnée égale à l. Concevons une droite mobile appliquée d'abord sur l'axe $O\alpha$; faisons-la tourner autour du point n de gauche à droite, jusqu'à ce qu'elle rencontre un ou plusieurs autres points; faisons-la tourner ensuite autour du dernier de ces points, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'elle rencontre un ou plusieurs autres points; en continuant de la sorte, la droite arrivera à une dernière position où elle passera par le point l, situé sur l'axe $O\beta$. Nous formerons ainsi une ligne brisée convexe allant du point n au point l, et telle que la droite que l'on obtient en prolongeant chacun de ses côtés laisse au-dessus d'elle tous les autres points. Nous verrons que chacun des côtés de cette ligne convexe donne un sous-groupe de racines jouissant de la propriété énoncée.

Posons $u' = vz'^{\mu}$, v étant une quantité finie qui ne s'annule pas avec z'; le degré du terme $A_{\alpha\beta}u'^{\alpha}z'^{\beta}$ par rapport à z' est $\alpha\mu + \beta$. Nous remarquons que la droite $y - \beta = -\mu(x - \alpha)$, menée par le point (α, β) et ayant pour coefficient angulaire $-\mu$, coupe l'axe $O\beta$ en un point dont l'ordonnée $\alpha\mu + \beta$ est égale au degré du terme; il en résulte que les termes de même degré sont en ligne droite et que la droite s'éloigne de l'origine parallèlement à elle-même, à mesure que le degré du terme augmente.

Considérons d'abord le premier côté de la ligne convexe, celui qui part du point $(\alpha = n, \beta = o)$; sur ce côté se trouvent plusieurs points auxquels correspondent des termes de même degré

$$A u'^{n} + \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} + A_{\alpha_1\beta_1} u'^{\alpha_1} z'^{\beta_1},$$

que nous supposerons ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de u'; nous désignerons ici par $A_{\alpha\beta}u'^{\alpha}z'^{\beta}$ un terme quelconque intermédiaire de ce premier groupe. Ces termes étant du même degré, on a

$$n\mu = \alpha\mu + \beta = \alpha_1\mu + \beta_1,$$

d'où

$$\mu = \frac{\beta}{n - \alpha} = \frac{\beta_1}{n - \alpha_1};$$

ainsi l'exposant μ est un nombre commensurable $\frac{q}{p}$. Posons $z' = z''^p$, d'où $u' = vz''^q$, les termes du premier groupe seront du degré

$$nq = \alpha q + \beta p = \alpha_1 q + \beta_1 p$$

par rapport à z'' et les autres termes d'un degré plus élevé. On pourra donc diviser par z''^{nq} tous les termes de l'équation (1), qui deviendra ainsi

$$(\mathrm{A} v^n + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} v^\alpha + \mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1}) + z'' \varphi(v, z'') = 0$$

ou

(5) $$v^{\alpha_1}(\mathrm{A} v^{n-\alpha_1} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_1} + \mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1}) + z'' \varphi(v, z'') = 0,$$

$\varphi(v, z'')$ étant un polynôme entier en v et z''. L'équation

(6) $$\mathrm{A} v^{n-\alpha_1} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_1} + \mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1} = 0$$

admettant $n - \alpha_1$ racines finies et différentes de zéro, on en conclut que, pour une valeur très-petite de z'', l'équation (5) admet $n - \alpha_1$ racines voisines respectivement des précédentes, ce qui donne pour l'équation (1) un premier sous-groupe de $n - \alpha_1$ racines de la forme $vz'^{\frac{q}{p}}$, et telles que le rapport de chacune d'elles à $z'^{\frac{q}{p}}$ tend vers une limite finie et différente de zéro.

Considérons maintenant le second côté de la ligne convexe; il donne une nouvelle manière de constituer un groupe de termes

$$\mathrm{A}_{\alpha_1\beta_1} u'^{\alpha_1} z'^{\beta_1} + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} u'^\alpha z'^\beta + \mathrm{A}_{\alpha_2\beta_2} u'^{\alpha_2} z'^{\beta_2}$$

d'un degré moindre que tous les autres. On a

$$\alpha_1 \mu + \beta_1 = \alpha\mu + \beta = \alpha_2 \mu + \beta_2,$$

d'où

$$\mu = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2};$$

l'exposant μ est encore un nombre commensurable $\frac{q}{p}$, mais il a une valeur plus grande que la précédente, puisque, à mesure que le côté tourne dans le sens indiqué, la valeur de μ augmente. On posera,

comme précédemment, $z' = z''^p$, d'où $u' = vz''^q$; tous les termes de l'équation seront divisibles par $z''^{\alpha_1 q + \beta_1 p}$, et l'équation se réduira à

$$(7) \qquad v^{\alpha_2}(A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-\alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2}) + z''\varphi(v, z'') = 0.$$

L'équation

$$(8) \qquad A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-\alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2} = 0$$

admettant $\alpha_1 - \alpha_2$ racines finies et différentes de zéro, on en conclut que, pour une valeur très-petite de z'', l'équation (7) admet $\alpha_1 - \alpha_2$ racines voisines respectivement des précédentes, ce qui donne pour l'équation (1) un second sous-groupe de $\alpha_1 - \alpha_2$ racines de la forme $vz'^{\frac{q}{p}}$, et telles, que le rapport de chacune d'elles à $z'^{\frac{q}{p}}$ tend vers une limite finie et différente de zéro. On continuera de cette manière jusqu'au dernier côté qui fournira un sous-groupe de $\alpha_h - 0$ racines.

Puisque

$$(n - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_h - 0) = n,$$

on a ainsi les n racines de l'équation (1) voisines de zéro.

35. Théorème VIII. — *Chaque sous-groupe se décompose en systèmes circulaires.*

Considérons, par exemple, le premier sous-groupe; on a

$$\mu = \frac{\beta}{n-\alpha} = \frac{\beta_1}{n-\alpha_1} = \frac{q}{p};$$

la fraction $\frac{q}{p}$ étant supposée irréductible, les dénominateurs $n - \alpha$, $n - \alpha_1$ sont des multiples de p que nous désignerons par kp et $k_1 p$; l'équation (6) devient

$$(9) \qquad A v^{k_1 p} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{(k_1-k)p} + A_{\alpha_1\beta_1} = 0;$$

si l'on pose $v^p = \lambda$, cette équation se réduit à

$$(10) \qquad A\lambda^{k_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\lambda^{k_1-k} + A_{\alpha_1\beta_1} = 0.$$

A une racine simple de l'équation (10) correspondent p racines simples de l'équation (9), fournies par l'équation binôme $v^p = \lambda$; ces racines

$$v_1, \quad v_2, \ldots, \quad v_p$$

ont même module, et nous les supposerons rangées dans un ordre tel que leurs arguments soient en progression arithmétique ayant pour raison $\frac{2q\pi}{p}$. L'équation (5) admet p racines simples respectivement voisines des précédentes

$$v_1 + \varepsilon_1, \quad v_2 + \varepsilon_2, \ldots, \quad v_p + \varepsilon_p,$$

et chacune d'elles est une fonction holomorphe de z'' dans le voisinage de $z'' = 0$. L'équation (1) admet ainsi les p racines

$$u'_1 = (v_1 + \varepsilon_1) z'^{\frac{q}{p}}, \quad u'_2 = (v_2 + \varepsilon_2) z'^{\frac{q}{p}}, \ldots, \quad u'_p = (v_p + \varepsilon_p) z'^{\frac{q}{p}}.$$

Les valeurs approchées

$$v_1 z'^{\frac{q}{p}}, \quad v_2 z'^{\frac{q}{p}}, \ldots, \quad v_p z'^{\frac{q}{p}}$$

forment un système circulaire; car, lorsque la variable z tourne autour du point a, l'argument de $z'^{\frac{q}{p}}$ augmente de $\frac{2q\pi}{p}$; ceci revient à remplacer v_1 par v_2, v_2 par $v_3, \ldots, v_p$ par v_1. On verra, comme précédemment (n° 33), que les valeurs exactes jouissent de la même propriété. Ce système circulaire de p racines de l'équation (1) peut être représenté par la formule $u' = vz'^{\frac{q}{p}}$, v étant l'une quelconque de celles des racines de l'équation (5) qui, pour $z' = 0$, se réduisent à une racine de l'équation binôme $v^p = \lambda$, et étant une fonction holomorphe de z''.

Ainsi chacune des racines simples de l'équation (10) donne un système circulaire de p racines.

36. Supposons maintenant que l'équation (10) ait une racine multiple λ d'ordre n'; chacune des racines $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de l'équation binôme $v^p = \lambda$ sera une racine d'ordre n' de l'équation (9); pour une

valeur très-petite de z'', l'équation (5) admet n' racines voisines de v_1, n' voisines de $v_2, \ldots$, n' voisines de v_p. On en conclut que l'équation (1) admet n' racines ayant la même valeur approchée $v_1 z'^{\frac{q}{p}}$, n' autres ayant la même valeur approchée $v_2 z'^{\frac{q}{p}}$, etc. Les valeurs approchées de ces pn' racines sont représentées par la formule $v_1 z'^{\frac{q}{p}}$, la variable z' tournant autour du point a; il en résulte que leurs valeurs exactes pourront être représentées par la formule $u' = (v_1 + v') z'^{\frac{q}{p}}$, dans laquelle v' est une quantité infiniment petite. Ceci revient à remplacer v par $v_1 + v'$ dans l'équation (5), qui prend alors la forme

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} v'^{\alpha} z''^{\beta} = 0. \tag{11}$$

On lui appliquera la même méthode qu'à l'équation (1); les termes indépendants de z'' proviennent des termes indépendants de z'' dans l'équation (5); v_1 étant racine d'ordre n' de la parenthèse, le premier terme sera $A'v'^{n'}$; pour une valeur très-petite de z'', l'équation (11) admettra donc n' racines très-petites. Si les équations analogues à l'équation (10) n'admettent que des racines simples, ces n' racines se disposeront en systèmes circulaires de p' racines, représentés chacun par une formule telle que $v' = wz''^{\frac{q'}{p'}}$ w étant une fonction holomorphe de $z''' = z''^{\frac{1}{p'}} = z'^{\frac{1}{pp'}}$ ne s'annulant pas pour $z''' = 0$.

L'équation (1) admettra donc la solution

$$u' = \left(v_1 + wz'^{\frac{q'}{pp'}}\right) z'^{\frac{q}{p}} = v_1 z'^{\frac{q}{p}} + wz'^{\frac{q_1}{pp'}},$$

q_1 désignant le nombre entier $q' + qp'$ premier avec p'. Il est aisé de voir que cette formule donne un système circulaire de pp' racines; il suffit pour cela de considérer la valeur approchée

$$v_1 z'^{\frac{q}{p}} + w_1 z'^{\frac{q_1}{pp'}},$$

w_1 étant la valeur de w pour $z''' = 0$. Faisons tourner la variable z autour du point a; après p tours, le premier terme se reproduit, mais

l'argument du second augmente de $\frac{2q_1\pi}{p'}$; ainsi les p premières racines diffèrent par le premier terme; ensuite, de p en p, elles diffèrent par le second terme. Après pp' tours, la fonction w reprend sa valeur primitive, et l'on retrouve les mêmes racines dans le même ordre. On peut représenter ce système circulaire de pp' racines par la formule

$$u' = v z'^{\frac{qp'}{pp'}},$$

v étant une fonction holomorphe de $z''' = z'^{\frac{1}{pp'}}$ ne s'annulant pas pour $z''' = 0$.

On continuera l'application de cette méthode jusqu'à ce qu'on ait des expressions approchées distinctes pour les n valeurs infiniment petites de u'. Cela arrivera nécessairement. Nous avons vu, en effet, que ces n racines se partagent généralement en plusieurs sous-groupes qui correspondent aux différents côtés d'une ligne brisée convexe; les $k_1 p$ racines d'un sous-groupe se ramènent à l'équation (9) et, plus simplement, à l'équation (10) du degré k_1. Une racine de cette équation est d'un ordre n' de multiplicité inférieur ou égal à k_1 et par conséquent à $k_1 p$, et par suite inférieur à n; ainsi le nombre n' des racines infiniment petites de l'équation (11), à laquelle on arrive après la première opération, est inférieur au nombre n des racines infiniment petites de l'équation (1). Après la seconde opération, le nombre n' sera remplacé par un nombre n'' encore plus petit; en continuant de cette manière, on arrivera à une équation n'ayant qu'une racine infiniment petite, et la séparation des racines en systèmes circulaires sera effectuée.

Pour que la séparation ne s'effectuât pas, il faudrait que, à partir d'un certain rang, toutes les équations successives auxquelles on est conduit eussent le même nombre de racines infiniment petites. Afin de simplifier les notations, supposons que ceci ait lieu dès la première opération; pour que $n' = n$, il faut que $k_1 = n$, et, par suite, $p = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = l = nq$; la ligne convexe se réduit à une seule droite; l'équation (10), qui est alors identique à l'équation (9) et du degré n, devant admettre une racine d'ordre n, est de la forme $A(v - v_0)^n = 0$. On a posé $u' = v z'^q$; l'équation (5) devient

$$A(v - v_0)^n + z'\varphi(v, z') = 0.$$

En posant ensuite $v = v_0 + v'$, on arrive à l'équation (11), dans laquelle le premier terme indépendant de z' est Av'^n. Si cette équation présente les mêmes caractères, on effectuera la seconde opération en posant $v' = wz'^{q'}$, $w = w_0 + w'$, et ainsi de suite. De cette manière, les n racines infiniment petites auraient la même valeur approchée

$$u' = v_0 z'^q + w_0 z'^{q+q'} + \ldots;$$

elles ne différeraient donc entre elles que d'une quantité infiniment petite d'un ordre aussi élevé qu'on voudrait; ce qui est impossible, si l'équation proposée est irréductible et par conséquent n'admet pas de racines égales pour toutes les valeurs de z.

Concevons, en effet, que l'on ait formé l'équation aux différences des racines de l'équation proposée deux à deux; cette équation admet $n(n-1)$ racines infiniment petites dans le voisinage du point $z = a$. D'après le théorème VII, à l'aide d'une ligne brisée convexe, on peut partager ce groupe de racines en sous-groupes de racines d'un même ordre fini et commensurable par rapport à z'; l'ordre le plus élevé correspond au dernier côté de la ligne brisée, celui qui contient le premier terme en z' seul. Ainsi la différence de deux racines est une quantité infiniment petite dont l'ordre ne peut dépasser une limite déterminée.

Pôles d'une fonction algébrique.

37. Soit

$$Z_0 u^m + Z_1 u^{m-1} + \ldots + Z_m = 0 \tag{12}$$

l'équation proposée, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de u. Quand la variable z tend vers un point a, racine du polynôme Z_0, une ou plusieurs valeurs de u deviennent infinies; pour avoir ces valeurs, on posera $z = a + z'$, $u = \frac{1}{u'}$, et l'on cherchera les racines infiniment petites de l'équation

$$Z_0 + Z_1 u' + \ldots + Z_m u'^m = 0,$$

qui est de la forme

$$\sum A_{\alpha\beta} u'^\alpha z'^\beta = 0. \tag{13}$$

Quand, pour $z'=0$, l'équation (13) n'a qu'une racine nulle, elle admet dans le voisinage du point a une racine très-petite, qui est une fonction holomorphe de z; le point a est, dans ce cas, un pôle. Mais si, pour $z'=0$, la racine $u'=0$ est multiple et d'ordre n, le point a sera un point critique. On appliquera à l'équation (13) la méthode indiquée précédemment; les n racines infiniment petites formeront un ou plusieurs systèmes circulaires, dont chacun sera représenté par la formule $u'=vz'^{\frac{q}{p}}$, v étant une fonction holomorphe de $z''=z'^{\frac{1}{p}}$ qui ne s'annule pas avec z''; chacun d'eux donne un système de p valeurs infiniment grandes de u, représentées par la formule $u=\frac{1}{v}z'^{-\frac{q}{p}}=wz'^{-\frac{q}{p}}$, w étant une fonction holomorphe de z'', ne s'annulant pas avec z''. Le nombre des pôles et des points critiques où des racines deviennent infinies est au plus égal au degré de Z_0, c'est-à-dire à $m'-m$.

Enfin, pour étudier les racines quand la variable z est très-grande, on pose $z=\frac{1}{z'}$, et l'on donne à z' des valeurs très-petites; l'équation proposée se transforme en une équation algébrique entre z' et u; on lui appliquera la méthode précédente; le point $z'=0$ dans le plan sur lequel on figure la nouvelle variable z', et par conséquent le point O' sur la sphère, sera un point ordinaire, ou un pôle, ou un point critique.

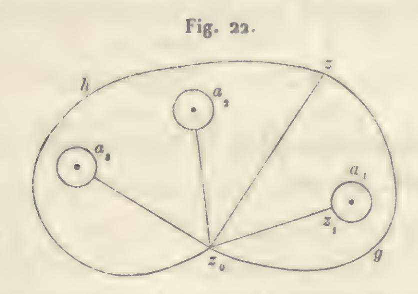
Nous avons appelé, d'une manière générale, *points singuliers* les valeurs de la variable où la fonction cesse d'être holomorphe. Dans l'étude des fonctions algébriques, pour toutes les valeurs finies ou infinies de la variable z, en d'autres termes sur toute la sphère, nous n'avons rencontré que deux sortes de points singuliers : 1° des pôles, c'est-à-dire des points où une branche de la fonction u devient infinie, de manière toutefois que la branche correspondante de la fonction $\frac{1}{u}$ reste holomorphe dans le voisinage de ce point; 2° des points critiques tels que, dans le voisinage de chacun d'eux, une branche de l'une des fonctions u ou $\frac{1}{u}$ acquière un nombre fini de valeurs différentes qui se permutent les unes dans les autres quand la variable tourne autour de ce point, et qui deviennent égales en ce point. Nous appellerons dorénavant *points critiques algébriques* les points critiques qui présentent ce caractère, et nous com-

prendrons sous la dénomination de *points singuliers algébriques* les pôles et les points critiques algébriques. Il résulte de la discussion précédente que le nombre des points singuliers d'une fonction algébrique sur toute la sphère est fini. Nous rencontrerons plus tard, dans l'étude des fonctions transcendantes, des points singuliers d'une autre espèce.

Système de lacets fondamentaux.

38. Nous pouvons maintenant compléter la définition des fonctions algébriques. Soit $f(z, u) = 0$ une équation irréductible dont le premier membre est un polynôme entier en z et u, du degré m par rapport à u; concevons que la variable z parte d'un point fixe z_0, qui ne soit ni un point critique, ni un pôle, et adoptons pour valeur initiale de la fonction une racine correspondante u_0. Marquons dans le plan les points critiques $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Imaginons des courbes fermées qui ne se coupent pas et qui, partant du point z_0, enveloppent chacune un point critique. Pour préciser, nous formerons ces courbes, auxquelles nous donnerons le nom de *lacets*, de lignes droites allant de l'origine z_0 à des points très-voisins des points critiques, et de cercles infiniment petits décrits autour de ces points. Ainsi, quand la variable z parcourt le premier lacet, elle va d'abord de z_0 (*fig.* 22) à un point z_1 très-voisin du

Fig. 22.



point critique a_1; elle tourne ensuite autour du point a_1, puis revient en z_0 par le même chemin $z_1 z_0$. Il est évident que tous les chemins qui vont de l'origine z_0 à un point quelconque z du plan se ramènent à un chemin déterminé, par exemple à la droite $z_0 z$, ou à ce chemin précédé d'un ou de plusieurs lacets, un même lacet pouvant d'ailleurs être

parcouru plusieurs fois. Ainsi, sur la figure, le chemin $z_0 gz$ se ramène au lacet (a_1) décrit dans le sens positif et suivi de la droite $z_0 z$; le chemin $z_0 hz$ se ramène aux deux lacets (a_3) et (a_2) décrits dans le sens négatif et suivis de la droite $z_0 z$. Si la droite $z_0 z$ passait par un point singulier, on éviterait ce point à l'aide d'un demi-cercle très-petit d'un côté ou de l'autre.

Cela posé, concevons que la variable z parte du point z_0, la fonction ayant la valeur initiale u_0, et décrive la droite $z_0 z_1$, la fonction acquerra en z_1 une certaine valeur. Supposons que cette racine appartienne à un système circulaire de p racines se permutant autour du point critique a; quand la variable aura décrit le petit cercle autour du point a dans le sens positif, on obtiendra en z_1 une autre racine; si l'on revient ensuite à z_0 par la droite $z_1 z_0$, la fonction aura en z_0 une valeur u_1 différente de la première. Si l'on décrit une seconde fois le même lacet avec la valeur u_1, on retrouvera d'abord en z_1 la racine précédente; un second tour autour du point critique a dans le sens positif amènera une nouvelle racine, et, en revenant au point z_0, on aura une troisième valeur u_2, et ainsi de suite. Quand le lacet aura été parcouru p fois successivement dans le sens positif, on reviendra à la valeur initiale u_0. De cette manière, on peut dire que le lacet (a) unit les p racines u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_{p-1}$. Pour plus de clarté, nous regarderons ce lacet (a), relatif à un point critique d'ordre p, comme la réunion de p lacets binaires unissant chacun deux racines, et nous les désignerons par

$$(a)_0^1, \quad (a)_1^2, \ldots, \quad (a)_{p-2}^{p-1}, \quad (a)_{p-1}^0,$$

en les supposant tous décrits dans le sens positif. Les mêmes lacets, décrits en sens négatif, seront

$$(-a)_0^{p-1}, \quad (-a)_{p-1}^{p-2}, \ldots, \quad (-a)_2^1, \quad (-a)_1^0.$$

Nous les avons écrits en ordre inverse, tels qu'ils se présentent quand on les parcourt successivement. Si $p = 2$, on aura les deux lacets binaires positifs $(a)_0^1$, $(a)_1^0$, conduisant, le premier de la racine u_0 à la racine u_1, le second de u_1 à u_0. Le premier lacet négatif conduit aussi de u_1 à u_0, le second de u_0 à u_1.

Un lacet relatif à un autre point critique unira d'autres racines entre

elles, ou bien unira l'une des racines précédentes à d'autres racines, et ainsi de suite. Nous démontrerons plus tard (n° 135) que, si l'équation proposée $f(z, u) = 0$ est irréductible, on peut, en partant du point z_0 avec la valeur initiale u_0 et décrivant des lacets convenables, revenir à ce point avec l'une quelconque des m racines de l'équation $f(z_0, u) = 0$. Si ensuite on décrit la droite $z_0 z$ avec chacune de ces m valeurs, la fonction acquerra m valeurs différentes au point z, savoir les m racines de l'équation $f(z, u) = 0$, dans laquelle l'inconnue est u. De cette manière, l'équation algébrique définit une fonction polytrope qui a m valeurs en chaque point.

Chacune des branches de la fonction, admettant une dérivée $u' = -\frac{f'_z}{f'_u}$, est une fonction holomorphe de z, dans toute partie du plan ne comprenant aucun des pôles ou des points critiques où cette branche devient infinie ou se permute avec d'autres.

39. Soient

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_{m-1}$$

les m racines de l'équation pour $z = z_0$; nous appellerons *lacets fondamentaux* (Clebsch et Gordan, *Théorie des fonctions abéliennes*) un système de $m - 1$ lacets binaires permettant de passer de la racine u_0 à toutes les autres. Voici comment on procédera pour former ce système : après avoir décomposé les lacets complexes en lacets simples, comme nous l'avons expliqué, on prendra un lacet (a_1) unissant la racine u_0 à une autre que l'on appellera u_1, et l'on exclura tous les autres lacets qui unissent u_0 et u_1; parmi ceux qui restent, on prendra un lacet (a_2) unissant l'une des racines u_0 et u_1 à une autre que l'on appellera u_2, et l'on exclura tous les autres lacets qui unissent l'une des racines u_0 et u_1 à u_2; parmi ceux qui restent, on prendra un lacet (a_3) unissant l'une des racines u_0, u_1, u_2 à une autre que l'on appellera u_3, et l'on exclura tous les autres lacets qui unissent l'une des racines u_0, u_1, u_2 à u_3, et ainsi de suite; enfin, on prendra un dernier lacet (a_{m-1}) unissant l'une des racines $u_0, u_1, \ldots, u_{m-2}$ à l'autre racine u_{m-1}. On obtient ainsi un système de $m - 1$ lacets binaires unissant la racine u_0 à toutes les autres; ce sera un système de lacets fondamentaux.

Parmi les chemins formés de lacets fondamentaux et qui conduisent

de la racine u_0 à la racine u_n, il en est un dont les lacets successifs donnent au point z_0 des racines dont les indices vont en croissant; supposons, en effet, que l'on veuille revenir de la racine u_n à la racine u_0 par des indices décroissants; d'après la manière même dont on a choisi les lacets fondamentaux, la racine u_n n'est unie qu'à une seule racine d'indice inférieur par un lacet fondamental; soit u_h cette racine; le dernier lacet sera $(a_n)_h^n$; de même, la racine u_h n'est unie qu'à une seule racine d'indice inférieur par un lacet fondamental; soit u_g cette racine; l'avant-dernier lacet sera $(a_h)_g^h$; on continuera de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive à la racine u_0. On obtient ainsi un chemin formé de lacets fondamentaux et ramenant de la racine u_n à la racine u_0 par une série d'indices décroissants; ce chemin décrit dans l'autre sens conduit de u_0 à u_n par des indices croissants; nous le désignerons par $(\mathrm{V})_0^n$.

Tous les autres chemins formés de lacets fondamentaux et conduisant de u_0 à u_n peuvent se ramener à ce chemin particulier par des suppressions de lacets parcourus chacun deux fois successivement dans des sens contraires. En effet, supposons que dans un autre chemin l'indice passe par un maximum p, c'est-à-dire par une valeur plus grande que la précédente et la suivante; puisque la racine u_p n'est unie qu'à une seule racine u_k d'indice inférieur par un lacet fondamental, on arrivera à la racine u_p par le lacet $(a_p)_k^p$; pour que l'indice diminue ensuite, il est nécessaire que l'on parcoure le même lacet en sens inverse; la ligne fermée $(a_p)_k^p + (a_p)_p^k$, composée du même lacet parcouru deux fois successivement dans des sens contraires, se réduit évidemment à un point et peut être supprimée. Si, après cette suppression, l'indice passe encore par un maximum p', on aura la partie $(a_{p'})_{k'}^{p'} + (a_{p'})_{p'}^{k'}$, composée du même lacet parcouru deux fois successivement dans des sens contraires et que l'on pourra supprimer. Après plusieurs suppressions de cette sorte, on arrivera au chemin $(\mathrm{V})_0^n$, qui conduit de la racine u_0 à la racine u_n par une suite d'indices croissants. Il en résulte que le chemin $(\mathrm{V})_0^n$ est celui qui conduit de la racine u_0 à la racine u_n par le moindre nombre de lacets fondamentaux.

Considérons les deux chemins $(\mathrm{V})_0^n$ et $(\mathrm{V})_0^p$, formés comme nous venons de le dire et conduisant de la racine initiale u_0 aux deux racines u_n et u_p. Soit g le plus grand indice commun aux deux séries d'indices croissants; d'après ce que nous avons dit, tous les indices précédents

sont les mêmes; les deux chemins commencent donc par une partie commune $(V)_0^g$, puis ils se séparent et continuent, l'un suivant $(V)_g^n$, l'autre suivant $(V)_g^p$, ces deux derniers chemins n'ayant plus aucun lacet commun. Pour aller de la racine u_n à la racine u_p par le moindre nombre de lacets fondamentaux, il faut rétrograder sur le chemin $(V)_0^n$ de u_n à u_g, puis s'avancer sur le chemin $(V)_0^p$ de u_g à u_p. Nous représenterons ce chemin par $(V)_n^g + (V)_g^p$; la série des indices est formée d'une partie décroissante, suivie d'une partie croissante. Tous les chemins formés de lacets fondamentaux et conduisant de la racine u_n à la racine u_p peuvent être ramenés à celui-là par des suppressions de lacets parcourus chacun deux fois successivement dans des sens contraires; car, lorsque l'indice passe par un maximum p, le chemin contient une partie $(a_p)_k^p + (a_p)_p^k$ que l'on peut supprimer; après plusieurs suppressions pareilles, on obtiendra une série ne présentant plus de maximum et formée par conséquent d'une partie décroissante suivie d'une partie croissante, l'une des parties pouvant être nulle; on arrivera ainsi au chemin $(V)_n^g + (V)_g^p$, considérée plus haut. D'après cela, en faisant abstraction des lacets parcourus chacun deux fois dans des sens contraires, on peut dire qu'il n'y a qu'un chemin formé de lacets fondamentaux et conduisant d'une racine à une autre.

Remarquons que les p lacets binaires qui se rapportent à un système circulaire de racines ne peuvent appartenir à un même système de lacets fondamentaux; car en désignant ces lacets décrits dans le sens positif par

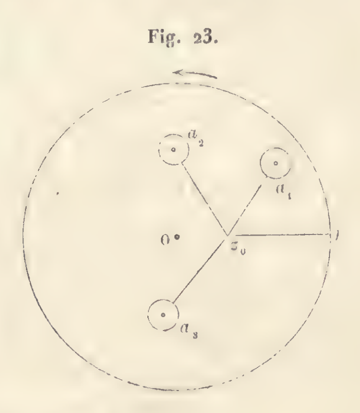
$$(a)_{\alpha_0}^{\alpha_1},\quad (a)_{\alpha_1}^{\alpha_2},\ldots,\quad (a)_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}},\quad (a)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0},$$

on voit que les $p - 1$ premiers lacets unissent la racine u_{α_0} aux autres racines du système circulaire; le dernier lacet, unissant la dernière racine à la première, doit être exclu. Si l'on exclut ainsi l'un des lacets de chaque système circulaire, le nombre des lacets binaires effectifs dans toute l'étendue du plan est $\Sigma(p - 1)$; ce nombre est égal ou supérieur à $m - 1$.

Quand on représente la variation de z par le mouvement d'un point sur la sphère, si le point O′ est lui-même un point critique, on peut joindre aux lacets précédents le lacet qui sur la sphère part du point z_0 et enveloppe le point O′. Mais les nouveaux lacets binaires introduits de

la sorte se ramènent à ceux qui correspondent aux valeurs finies de z. Nous pouvons, en effet, concevoir le lacet O′ comme formé d'un arc de grand cercle et d'une circonférence très-petite décrite autour du point O′; à ce lacet correspond dans le plan un *circuit* formé d'une droite $z_0 l$ (*fig.* 23), d'une circonférence d'un très-grand rayon ayant

Fig. 23.



pour centre le point O, et de la droite lz_0 parcourue en sens inverse; ce circuit enveloppe tous les points critiques du plan, et il se ramène à la suite des lacets (a_1), (a_2), (a_3), ..., parcourus dans un ordre déterminé. On peut donc remplacer chaque lacet binaire $(O')_\alpha^\beta$ par la suite des lacets binaires (a_1), (a_2), (a_3), ..., qui entrent d'une manière effective dans le circuit correspondant, c'est-à-dire dans le circuit parcouru avec la racine u_α prise comme valeur initiale; seulement nous rappelons que le circuit est décrit dans le sens positif, lorsque le lacet (O′) est décrit dans le sens négatif pour un observateur placé en O′ (nº 17).

CHAPITRE III.

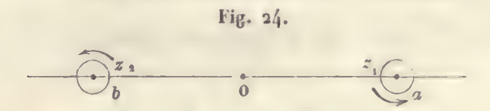
EXEMPLES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

40. *Exemple I.* — Considérons l'équation

$$u^3 - 3u + 2z = 0.$$

Il y a deux points critiques a et b situés sur l'axe Ox (*fig.* 24), l'un $z = 1$, pour lequel l'équation admet la racine double $u = 1$ et la racine simple $u = -2$; l'autre $z = -1$, pour lequel l'équation admet la racine double $u = -1$ et la racine simple $u = 2$. Les trois racines de

Fig. 24.



l'équation sont réelles pour toute valeur réelle de z telle que l'on ait $z^2 < 1$, c'est-à-dire en tous les points de la droite finie ab. Pour voir comment se comportent autour du point critique a les deux racines voisines de l'unité, nous poserons

$$z = 1 + z', \quad u = 1 + u';$$

l'équation devient

$$(2z' + 3u'^2) + u'^3 = 0;$$

les deux valeurs infiniment petites de u', dont les valeurs approchées sont

$$u' = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}}\, z'^{\frac{1}{2}},$$

se permutent quand z tourne autour du point critique a (33); en z_1, les deux valeurs de u étant réelles et voisines de l'unité, sont positives.

Quand on change le signe de z, les trois valeurs de u changent de signe; il en résulte que deux racines se permutent aussi autour du point b, et que ces deux racines ont en z_2 des valeurs réelles et négatives, voisines de -1.

Nous prendrons comme origine des lacets le point $z=0$. Pour $z=0$, les trois racines de l'équation sont $u_0=0$, $u_1=\sqrt{3}$, $u_2=-\sqrt{3}$. Lorsque la variable z décrit la droite Oz_1, la fonction ayant la valeur initiale $u_0=0$, l'équation

$$-u(3-u^2)+2z=0$$

montre que u conserve une valeur positive et par conséquent acquiert en z_1 une valeur voisine de 1; quand la variable tourne ensuite autour du point a, cette racine se change en une autre racine positive, voisine de 1; la variable revenant de z_1 à O, cette nouvelle racine, différente de la première, reste positive et par conséquent acquiert au point O la valeur $u_1=\sqrt{3}$. Ainsi le lacet (a) unit les deux racines u_0 et u_1. De même le lacet (b) unit les deux racines u_0 et u_2. Les deux lacets binaires $(a)_0^1$, $(b)_0^2$ forment un système de lacets fondamentaux.

Si l'on pose $z=\frac{1}{z'}$, $u=\frac{1}{u'}$, l'équation devient

$$(z'+2u'^3)-3z'u'^2=0;$$

pour les valeurs infiniment petites de z', les trois valeurs de u' sont infiniment petites et ont pour valeurs approchées

$$u'=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,z'^{\frac{1}{3}};$$

elles se permutent circulairement, quand la variable tourne autour du point $z'=0$. Ainsi, sur la sphère, le point O′ est un nouveau point critique; le lacet, qui part de l'origine O et enveloppe le point O′, unit les trois racines u_0, u_1, u_2. Pour voir dans quel ordre s'effectue la permutation, considérons le circuit qui sur le plan correspond au lacet (O′) et supposons que le rayon du circuit ait un argument compris entre π et 2π; le circuit, décrit dans le sens positif, peut être remplacé par la suite des deux lacets (a) et (b). Si l'on part du point O avec la valeur initiale u_0, le lacet (a) changeant u_0 en u_1 et le lacet (b) étant neutre

par rapport à cette racine, on revient en O avec la racine u_1. En décrivant le circuit une seconde fois, comme le lacet (a) change u_1 en u_0 et ensuite le lacet (b') u_0 en u_2, on revient en O avec la racine u_2; en décrivant le circuit une troisième fois, on ramène la valeur initiale u_0. Nous avons ainsi les trois lacets binaires $(O')_0^1$, $(O')_1^2$, $(O')_2^0$, décrits dans le sens qui correspond au mouvement positif sur le circuit. On pourrait former un système de lacets fondamentaux avec les deux lacets $(O')_0^1$, $(O')_1^2$, ou avec les deux lacets $(a)_0^1$, $(O')_1^2$.

41. *Exemple II.* — Considérons l'équation

$$u^3 - 3u^2 + z^6 = 0.$$

Pour $z = 0$, l'équation admet la racine simple $u = 3$ et deux racines égales à zéro. Afin de voir comment se comportent ces deux dernières racines dans le voisinage du point $z = 0$, on posera $u = vz^3$; l'équation devient

$$3v^2 - 1 - v^3z^3 = 0;$$

les deux valeurs finies de v sont monotropes dans le voisinage du point $z = 0$ et ont pour valeurs approchées

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{3}};$$

les deux valeurs infiniment petites de u sont donc monotropes dans ce voisinage et ont pour valeurs approchées

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}} z^3, \quad u = -\frac{1}{\sqrt{3}} z^3.$$

Ainsi le point $z = 0$ est neutre, relativement aux deux racines qui deviennent égales en ce point. Nous désignerons les trois racines par u_0, u_1, u_2, et nous les distinguerons par leurs valeurs approchées

$$u_0 = 3, \quad u_1 = \frac{z^3}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = -\frac{z^3}{\sqrt{3}}.$$

Pour chacune des six valeurs de z satisfaisant à l'équation $z^6 = 4$, l'équation admet une racine simple $u = -1$ et une racine double $u = 2$.

Si l'on appelle z_1 l'une de ces valeurs de z, et si l'on pose $z = z_1 + z'$, $u = 2 + u'$, l'équation devient

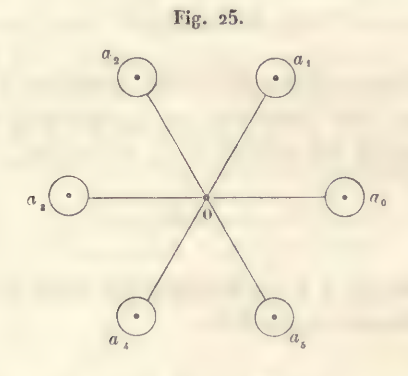
$$3u'^2 + 6z_1^5 z' + \ldots = 0;$$

les deux valeurs infiniment petites de u', dont les valeurs approchées sont

$$u' = i\sqrt{2}\, z_1^{\frac{5}{2}}\, z'^{\frac{1}{2}},$$

se permutent, quand on tourne autour du point critique. Il y a donc six points critiques a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (*fig.* 25), situés aux sommets

Fig. 25.



d'un hexagone régulier dont le centre est l'origine. Imaginons ces points joints à l'origine par des lacets formés chacun d'un rayon et d'un petit cercle. Sur chaque rayon, les trois racines sont réelles, deux positives, une négative; chacune d'elles d'ailleurs conserve son signe; sur les rayons Oa_0, Oa_2, Oa_4, la racine u_1 est positive, la racine u_2 négative; sur les rayons Oa_1, Oa_3, Oa_5, au contraire, la racine u_1 est négative, la racine u_2 positive. Quand on arrive près du point critique, les deux racines positives acquièrent des valeurs voisines de 2 et se permutent l'une dans l'autre. On en conclut que chacun des lacets (a_0), (a_2), (a_4) unit les deux racines u_0 et u_1, et que chacun des lacets (a_1), (a_3), (a_5) unit les deux racines u_0 et u_2. Les deux lacets $(a_0)_0^1$, $(a_1)_0^2$ forment un système de lacets fondamentaux.

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, $u = \frac{1}{u'}$, l'équation devient

$$u'^3 + z'^6 - 3z'^6 u' = 0.$$

Pour $z' = 0$, les trois valeurs de u' sont égales à zéro. En posant $u' = vz'^2$, on a

$$v^3 + 1 - 3z'^2 v = 0;$$

chacune des valeurs de v est holomorphe dans le voisinage du point $z' = 0$. Ainsi, sur la sphère, le point O' est pôle pour chacune des valeurs de u.

42. *Exemple III.* — L'équation

$$u^3 - 3u + 2z^2(2 - z^2) = 0$$

admet des racines égales pour les valeurs de z qui satisfont à l'équation

$$(z^2 - 1)^2(z^4 - 2z^2 - 1) = 0.$$

Pour $z = \pm 1$, la racine double est $u = 1$; si l'on pose $z = \pm 1 + z'$, $u = 1 + u'$, l'équation devient

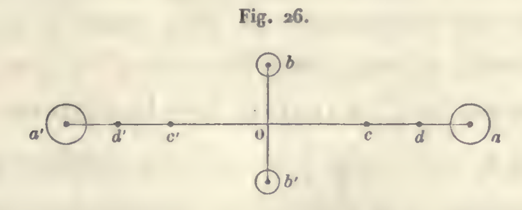
$$(3u'^2 - 8z'^2) + u'^3 \mp 8z'^3 - 2z'^4 = 0;$$

les deux valeurs infiniment petites de u' restent monotropes dans le voisinage du point $z = 1$ ou $z = -1$ et ont pour valeurs approchées

$$u' = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, z', \quad u' = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\, z';$$

ainsi les deux points $z = \pm 1$, que nous marquons c et c' (*fig.* 26), sont neutres. Il y a quatre points critiques donnés par l'équation $z^4 - 2z^2 - 1 = 0$; deux de ces points a et a' sont situés sur l'axe des

Fig. 26.



x et correspondent aux solutions $z = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$; les deux autres b et b' sont situés sur l'axe des y et correspondent aux solutions

$z = \pm i\sqrt{\sqrt{2}-1}$. En ces quatre points, la racine double est $u = -1$, la racine simple $u = 2$.

Dans le voisinage de l'origine, les valeurs approchées des racines sont

$$u_0 = \frac{4}{3}z^2, \quad u_1 = -\sqrt{3}, \quad u_2 = +\sqrt{3}.$$

Sur la droite finie bb', les trois racines sont réelles, une positive, deux négatives; les deux racines négatives deviennent égales et se permutent autour du point b et autour du point b'; on en conclut que chacun des deux lacets (b) et (b') unit les deux racines u_0 et u_1. Sur la droite finie aa', les trois racines sont encore réelles; entre les points d et d', qui correspondent à $z = \pm\sqrt{2}$, deux racines sont positives et une négative; sur da et $d'a'$, au contraire, deux racines sont négatives et une positive; ceci provient de ce qu'en d ou d' l'une des deux racines positives u_0 et u_2 s'annule et change de signe. Pour voir laquelle éprouve ce changement, considérons la dérivée

$$\frac{du}{dz} = \frac{8z(1-z^2)}{3(1-u^2)},$$

et remarquons que u n'acquiert la valeur $+1$ que pour $z = \pm 1$. Quand la variable z décrit la droite Oc, la racine positive u_0 reste comprise entre zéro et 1; sa dérivée étant positive, elle croît de zéro à 1; ayant dans le voisinage du point c la valeur approchée $u_0 = 1 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(z-1)$, elle continue à croître et devient plus grande que 1; la dérivée reste ainsi positive, et la racine u_0 croît indéfiniment au delà du point c. On en conclut que c'est la racine u_2 qui change de signe au point d; on peut d'ailleurs le voir directement; en effet, quand la variable z décrit la droite Oc, la racine u_2 reste comprise entre $\sqrt{3}$ et 1; sa dérivée étant négative, elle décroît de $\sqrt{3}$ à 1; ayant dans le voisinage du point c la valeur approchée $u_2 = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}(z-1)$, elle continue à décroître et devient plus petite que 1; la dérivée reste ainsi négative, et la racine u_2 décroît de 1 à zéro, et de zéro à -1 quand z va de c en d, et de d en a. La racine négative u_1 décroît de $-\sqrt{3}$ à -2 quand z décrit Oc, puis

croît de -2 à -1 quand z décrit ca. Au point a les deux racines négatives u_1 et u_2 deviennent égales et se permutent; au delà elles sont imaginaires. Il résulte de ce qui précède que chacun des lacets (a) et (a') unit les deux racines u_1 et u_2. Les deux lacets $(b)_0^1$, $(a)_1^2$ forment un système de lacets fondamentaux.

Sur la sphère, le point O′ est un point critique autour duquel se permutent les trois racines. Si le lacet (O′) passe entre les points b' et a, et est décrit dans le sens qui correspond au mouvement positif sur le circuit, il est l'assemblage des trois lacets binaires $(O')_0^2$, $(O')_2^1$, $(O')_1^0$.

43. *Exemple IV.* — L'équation

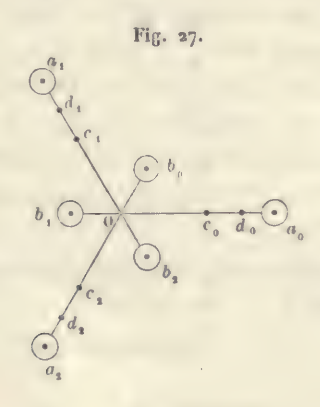
$$u^3 - 3u + 2z^3(2 - z^3) = 0$$

admet des racines égales pour les valeurs de z qui vérifient l'équation

$$(z^3 - 1)^2(z^3 - 1 - \sqrt{2})(z^3 - 1 + \sqrt{2}) = 0.$$

Les points c_0, c_1, c_2 (*fig.* 27) qui correspondent à l'équation $z^3 - 1 = 0$ sont neutres, parce que les deux racines qui deviennent égales restent

Fig. 27.



monotropes autour de ces points. A l'équation $z^3 = 1 + \sqrt{2}$ correspondent trois points critiques a_0, a_1, a_2, situés aux sommets d'un triangle équilatéral; à l'équation $z^3 = -(\sqrt{2} - 1)$, trois autres points critiques b_0, b_1, b_2, situés aux sommets d'un second triangle équilatéral.

Pour $z = 0$, on a $u_0 = \frac{4}{3} z^3$, $u_1 = -\sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{3}$. Sur la droite Ob_0, les trois racines sont réelles, une positive, deux négatives; ce sont les deux racines négatives qui deviennent égales et se permutent autour du point b_0; ainsi le lacet (b_0) unit les deux racines u_0 et u_1. Les lacets (b_1) et (b_2) unissent ces deux mêmes racines. Sur les droites Oa_0, Oa_1, Oa_2, les trois racines sont aussi réelles. Marquons les points d_0, d_1, d_2 qui correspondent à $z^3 = 2$. Sur Od_0, deux racines sont positives, une négative; sur $d_0 a_0$, une positive, deux négatives. On verra, comme dans l'exemple précédent, que c'est la racine u_2 qui change de signe au point d_0; on en conclut que le lacet (a_0) unit les deux racines u_1 et u_2. Les lacets (a_1), (a_2) unissent ces deux mêmes racines. Les deux lacets $(b_0)_0^1$, $(a_0)_1^2$ forment un système de lacets fondamentaux.

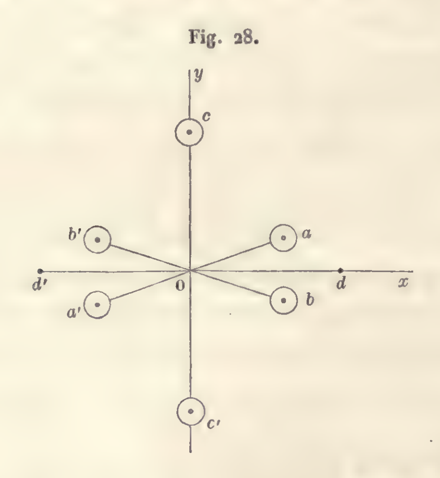
Sur la sphère, le point O′ est pôle pour chacune des racines.

44. *Exemple V.* — Considérons l'équation

$$u^3 + 3z^2u^2 - (z^2 - 1)^2 - 4z^6 = 0.$$

La dérivée du premier membre par rapport à u est $3u(u + 2z^2)$; elle s'annule pour $u = -2z^2$ et $u = 0$. La première solution donne

Fig. 28.



$(z^2 - 1)^2 = 0$; mais les points a et d' (*fig.* 28), qui correspondent à $z = \pm 1$, sont neutres, parce que, autour de chacun d'eux, les racines restent monotropes.

Pour $u=0$, on a $(z^2-1)^2+4z^6=0$, d'où

$$z=\pm i,\quad z=\pm\frac{\sqrt{7}\pm i}{4};$$

il en résulte six points critiques autour de chacun desquels deux racines se permutent : deux, c et c', sont situés sur l'axe des y; les quatre autres, a, a', b, b', symétriques deux à deux par rapport à l'origine, aux sommets d'un rectangle.

Pour $z=0$, l'équation proposée se réduit à $u^3-1=0$, et admet les trois racines $u_0=1$, $u_1=j$, $u_2=j^2$, j désignant l'une des racines imaginaires de l'équation $j^3-1=0$. Sur la droite finie cc', l'équation a une racine réelle u_0 et deux racines imaginaires conjuguées u_1 et u_2; ce sont celles-ci qui deviennent égales en c et c', et se permutent autour de ces points; ainsi chacun des lacets (c), (c') unit les deux racines u_1 et u_2. Le lacet (a') unit les mêmes racines que (a), le lacet (b') les mêmes que (b). La fonction algébrique devant acquérir au point $z=0$ les trois valeurs u_0, u_1, u_2, il est nécessaire que l'un au moins des deux lacets (a), (b) unisse la racine u_0 à l'une des deux racines u_1 et u_2. Nous remarquons d'ailleurs que si, sur le lacet (a), on a $z=x+yi$, on a $z=x-yi$ sur le lacet (b), et par conséquent les trois valeurs de u sur le lacet (b) sont respectivement conjuguées de celles que l'on obtient sur le lacet (a); on en conclut que chacun d'eux unit la racine u_0 à l'une des racines u_1 et u_2. Si le lacet (a) unit u_0 et u_1, le lacet (b) unira u_0 et u_2. On formera un système de lacets fondamentaux en prenant soit $(a)_0^1$ et $(b)_0^2$, soit $(a)_0^1$ et $(c)_1^2$, soit $(b)_0^2$ et $(c)_1^2$.

Le point O', sur la sphère, est pôle pour chacune des racines.

45. *Exemple VI.* — Soit l'équation

(1) $$u^3-3zu+z^3=0.$$

Les points critiques sont donnés par l'équation $z^3(z^3-4)=0$, qui se décompose en deux, l'une $z=0$, l'autre $z^3-4=0$.

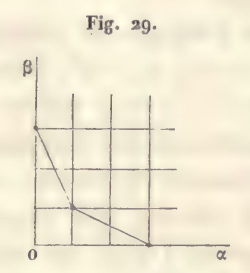
Pour $z=0$, les trois racines sont nulles. La méthode géométrique du n° 34 montre qu'il y a deux manières de former le groupe des

termes principaux dans l'équation proposée (*fig.* 29). Dans le premier mode, la partie principale étant $u^3 - 3zu$, u est du degré $\frac{1}{2}$. Si l'on pose $z = z'^2$, $u = vz'$, l'équation devient

$$v(v^2 - 3) + z'^3 = 0;$$

on obtient ainsi deux racines ayant pour valeurs approchées $\pm\sqrt{3}z^{\frac{1}{2}}$, et qui se permutent quand la variable z tourne autour du point O. Dans

Fig. 29.



le second mode, la partie principale étant $-3zu + z^3$, u est du degré 2. Si l'on pose $u = vz^2$, l'équation devient

$$(-3v + 1) + v^3z^3 = 0,$$

ce qui donne une racine ayant pour valeur approchée $\frac{1}{3}z^2$ et monotrope dans le voisinage du point O.

L'autre équation $z^3 - 4 = 0$ admet les racines

$$2^{\frac{2}{3}}, \quad 2^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad 2^{\frac{2}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

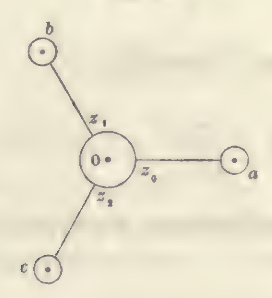
auxquelles correspondent les sommets a, b, c (*fig.* 30) d'un triangle équilatéral; autour de chacun de ces points se permutent deux racines de l'équation proposée.

Pour former les lacets, nous ferons partir la variable d'un point z_0, situé à une très-petite distance du point O sur l'axe Ox; en ce point, les trois racines se distingueront par leurs valeurs approchées

$$u_0 = \frac{1}{3}z^2, \quad u_1 = 3^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = -3^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}.$$

Le lacet (a) est formé, comme à l'ordinaire, d'une droite et d'un petit cercle; le lacet (b), d'un arc $z_0 z_1$ égal à un tiers de circonférence, d'une droite partant du point z_1 et d'un petit cercle; le lacet (c), d'un arc $z_0 z_1 z_2$ égal à deux tiers de circonférence, d'une droite partant du point z_2 et d'un petit cercle; enfin le lacet (O), d'un cercle $z_0 z_1 z_2 z_0$. Les lacets se succèdent dans l'ordre (a), (b), (c), (O).

Fig. 30.



Sur la droite Oa, les trois racines de l'équation proposée sont réelles, deux positives, une négative; ce sont les deux racines positives qui se permutent autour du point a; ainsi le lacet (a) unit les deux racines u_0 et u_1.

Quand la variable z décrit l'arc $z_0 z_1$, les trois racines deviennent

$$u_0 = \frac{1}{3} z_0^2 e^{\frac{4\pi}{3}}, \quad u_1 = 3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{3}} = -3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4\pi i}{3}}, \quad u_2 = -3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Sur le rayon Ob, on a $z = xe^{\frac{2\pi i}{3}}$; si l'on pose $u = u'e^{\frac{4\pi i}{3}}$, l'équation devient $u'^3 - 3xu' + x^3 = 0$. Ainsi, quand on passe du rayon Oa au rayon Ob, les trois racines sont multipliées par $e^{\frac{4\pi i}{3}}$; les deux racines positives se permutant autour du point (a), ce sont les deux racines u_0 et u_2 qui se permutent autour du point b, et par conséquent le lacet (b) unit les deux racines u_0 et u_2.

Quand la variable z décrit l'arc $z_0 z_1 z_2$, les trois racines deviennent

$$u_0 = \frac{1}{3} z_0^2 e^{\frac{8\pi i}{3}} = \frac{1}{3} z_0^2 e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad u_1 = 3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad u_2 = -3^{\frac{1}{2}} z_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Quand on passe du rayon Oa au rayon Oc, les racines sont multipliées par $e^{\frac{2\pi i}{3}}$; ainsi le lacet (c) unit les deux racines u_0 et u_1.

D'ailleurs le lacet (O) unit les deux racines u_1 et u_2. On a ainsi les quatre lacets $(a)_0^1$, $(b)_0^2$, $(c)_0^1$, $(\mathrm{O})_1^2$. Sur la sphère, le point O′ est pôle par rapport à chacune des racines. Le lacet (O′) ou le circuit correspondant, parcouru avec l'une quelconque des racines prise comme valeur initiale, doit ramener la même racine, ce qu'il est facile de vérifier.

46. *Exemple VII.* — Soit l'équation

$$(1) \qquad u^3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} zu + z^3 + 1 = 0.$$

On obtient les points critiques en résolvant l'équation

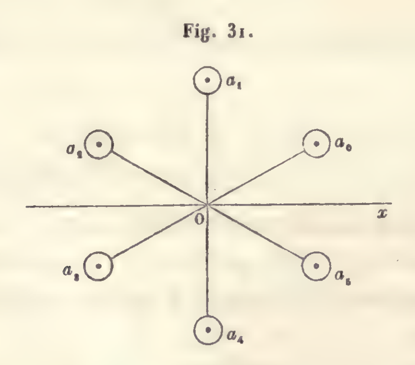
$$(2) \qquad z^6 + 1 = 0,$$

d'où

$$z = \cos\frac{(2h+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2h+1)\pi}{6};$$

ces points, au nombre de six, sont les sommets d'un hexagone régulier

Fig. 31.



ayant son côté égal à l'unité, et disposé comme l'indique la figure 31. En chacun des sommets, l'équation (1) admet une racine double et une

racine simple. La valeur de z relative à l'un des sommets et la racine double correspondante n'annulent pas la dérivée partielle $\frac{df}{dz}$; on en conclut que les deux valeurs de u voisines l'une de l'autre se permutent lorsque z décrit une petite courbe fermée autour de ce point. A l'origine, les trois racines ont les valeurs

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Imaginons que le point z s'avance, en suivant une ligne droite, de l'origine vers un des sommets, puis décrive autour de ce point une petite courbe fermée; les racines varient d'une manière continue en partant de leurs valeurs initiales; dans le voisinage du sommet, deux racines ont une différence très-petite et se permutent lorsque le point z décrit la courbe qui entoure ce sommet. Cherchons quelles sont les racines qui se permutent autour de chacun des points critiques.

Les racines de l'équation (1) sont données par la formule

$$u = A + \frac{z}{\sqrt[3]{2}\,A}, \tag{3}$$

dans laquelle A désigne l'une quelconque des valeurs du radical cubique

$$A = \sqrt[3]{-\frac{1+z^3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+z^6}}. \tag{4}$$

Le long du rayon sur lequel marche z, on a

$$z = r\left[\cos(2h+1)\frac{\pi}{6} + i\sin(2h+1)\frac{\pi}{6}\right],$$

et par conséquent

$$z^6 = -r^6 \quad \text{et} \quad z^3 = \pm i r^3.$$

On prendra le signe + pour les valeurs o, 2, 4 de h, c'est-à-dire lorsque le point z s'avance sur l'un des rayons Oa_0, Oa_2, Oa_4, et le signe — si le point z s'avance sur les rayons Oa_1, Oa_3, Oa_5 qui correspondent aux valeurs 1, 3, 5 de h. Puisque le nombre r varie de zéro à l'unité, on peut poser $r^3 = \sin\varphi$ et faire varier φ de o à $\frac{\pi}{2}$.

Considérons d'abord le cas où h a l'une des valeurs o, 2, 4; l'expression de A devient

$$A = \sqrt[3]{-\frac{1+i\sin\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = -\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}}$$
$$= -\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right];$$

il faudra attribuer à k successivement les trois valeurs o, 1, 2. On a en même temps

$$\frac{z}{\sqrt[3]{2}A} = -\sqrt[3]{\sin\frac{\varphi}{2}}\left\{\cos\left[(2h+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} - \frac{2k\pi}{3}\right] + i\sin\left[(2h+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{6} - \frac{2k\pi}{3}\right]\right\}.$$

Remarquons que, quelle que soit celle des valeurs o, 2, 4 que l'on attribue à h, si l'on fait φ égal à zéro, les racines u_0, u_1, u_2 correspondent à $k=0$, $k=1$, $k=2$. Faisons varier φ de zéro à $\frac{\pi}{2}$; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les valeurs de u sont données par la formule

$$-\frac{u}{\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}}} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$+ \cos\left[(2h+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} - \frac{2k\pi}{3}\right] + i\sin\left[(2h+1)\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} - \frac{2k\pi}{3}\right].$$

Dans cette formule, il faut remplacer h par l'un des nombres o, 2, 4, puis k par o, 1, 2. Les arguments des valeurs correspondantes des deux termes du second membre sont renfermés dans le tableau

suivant :

$$h=0\left\{\begin{array}{lll} k=0, & \dfrac{\pi}{12}, & \dfrac{\pi}{12}, \\ k=1, & \dfrac{9\pi}{12}, & \dfrac{17\pi}{12}, \\ k=2, & \dfrac{17\pi}{12}, & \dfrac{9\pi}{12}. \end{array}\right.$$

$$h=2\left\{\begin{array}{lll} k=0, & \dfrac{\pi}{12}, & \dfrac{9\pi}{12}, \\ k=1, & \dfrac{9\pi}{12}, & \dfrac{\pi}{12}, \\ k=2, & \dfrac{17\pi}{12}, & \dfrac{17\pi}{12}. \end{array}\right.$$

$$h=4\left\{\begin{array}{lll} k=0, & \dfrac{\pi}{12}, & \dfrac{17\pi}{12}, \\ k=1, & \dfrac{9\pi}{12}, & \dfrac{9\pi}{12}, \\ k=2, & \dfrac{17\pi}{12}, & \dfrac{\pi}{12}. \end{array}\right.$$

On conclut de ce tableau que le lacet (a_0) unit les deux racines u_1 et u_2, le lacet (a_2) les deux racines u_0 et u_1, le lacet (a_4) les deux racines u_0 et u_2.

Considérons maintenant le cas où l'on suppose que h a l'une des valeurs 1, 3, 5. On a alors

$$z^3 = -ir^3,$$

puis

$$A = -\sqrt[3]{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],$$

$$\frac{z}{\sqrt[3]{2}A} = -\sqrt[3]{\sin\frac{\varphi}{2}}\left\{\cos\left[(2h+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right]+i\sin\left[(2h+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\varphi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right]\right\}.$$

Il faut observer que pour $\varphi = 0$ les racines u_0, u_2, u_1 correspondent à $k=0$, $k=1$, $k=2$. Les valeurs de u à l'un des sommets a_1, a_3, a_5

sont données par la formule

$$-\frac{u}{\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}}} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3}\right)$$
$$+\cos\left[(2h+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right]+i\sin\left[(2h+1)\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right],$$

dans laquelle on doit remplacer h successivement par l'un des nombres 1, 3, 5, puis k par l'un des nombres 0, 1, 2. Les arguments des deux termes du second membre ont des valeurs comprises dans le tableau suivant :

$$h=1\begin{cases} k=0, & -\frac{\pi}{12}, & \frac{7\pi}{12}, \\ k=1, & \frac{15\pi}{12}, & \frac{15\pi}{12}, \\ k=2, & \frac{7\pi}{12}, & -\frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

$$h=3\begin{cases} k=0, & -\frac{\pi}{12}, & \frac{15\pi}{12}, \\ k=1, & \frac{15\pi}{12}, & -\frac{\pi}{12}, \\ k=2, & \frac{7\pi}{12}, & \frac{7\pi}{12}. \end{cases}$$

$$h=5\begin{cases} k=0, & -\frac{\pi}{12}, & -\frac{\pi}{12}, \\ k=1, & \frac{15\pi}{12}, & \frac{7\pi}{12}, \\ k=2, & \frac{7\pi}{12}, & \frac{15\pi}{12}. \end{cases}$$

On en conclut que les lacets (a_1), (a_3), (a_5) unissent respectivement les racines u_0 et u_1, u_0 et u_2, u_1 et u_2.

Le point O′, sur la sphère, est pôle pour chacune des racines.

47. *Exemple VIII.* — Considérons l'équation

$$u^5-(1-z^2)u^4-\frac{4^4}{5^5}z^2(1-z^2)^4=0.$$

La dérivée partielle du premier membre par rapport à u étant égale à $5u^3\left[u - \frac{4}{5}(1 - z^2)\right]$, l'équation admet des racines égales lorsqu'on a, soit $u = 0$, et par suite $z = 0$ ou $z = \pm 1$, soit $u = \frac{4}{5}(1 - z^2)$, et par suite $z = \pm 1$; ce dernier cas rentre dans le précédent. Pour $z = 0$, l'équation a une racine simple $u_0 = 1$ et quatre racines égales à zéro; les valeurs approchées de ces quatre racines sont

$$u_1 = \alpha z^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = -\alpha i z^{\frac{1}{2}}, \quad u_3 = -\alpha z^{\frac{1}{2}}, \quad u_4 = \alpha i z^{\frac{1}{2}},$$

la quantité α vérifiant l'équation $\alpha^4 = -\frac{4^4}{5^5}$; les deux racines u_1 et u_3 se permutent autour du point O, de même u_2 et u_4, ce qui donne deux systèmes circulaires. Pour $z = \pm 1$, l'équation admet cinq racines égales à zéro; si l'on pose $z = 1 + z'$, on a

$$u^5 - \frac{4^6}{5^5} z'^4 + \cdots = 0;$$

les valeurs approchées des racines, dans le voisinage du point $z = 1$, sont données par la formule $u = \frac{4}{5} 4^{\frac{1}{5}} z'^{\frac{4}{5}}$; elles forment un système circulaire de cinq racines se permutant autour du point critique. Les racines, étant respectivement égales pour des valeurs de z égales et de signes contraires, se permutent suivant la même loi autour du point $z = -1$. Il y a donc trois points critiques, l'origine O et les deux points a et b qui correspondent à $z = \pm 1$ (*fig.* 32).

Si l'on fait $z = \frac{1}{z'}$, $u = \frac{1}{u'}$, l'équation devient

$$\frac{4^4}{5^5}(1 - z'^2)^4 u'^5 - z'^8(1 - z'^2) u' - z'^{10} = 0.$$

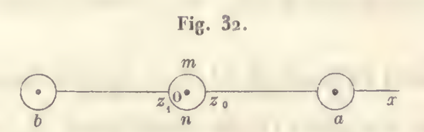
Pour $z' = 0$, les cinq valeurs de u' sont égales à zéro. En posant $u' = v z'^2$, on met l'équation sous la forme

$$\frac{4^4}{5^5}(1 - z'^2) v^5 - (1 - z'^2) v - 1 = 0;$$

pour $z' = 0$, l'équation admet une racine double $v = -\frac{5}{4}$ et trois racines simples. En posant $v = -\frac{5}{4} + v'$, on reconnaît aisément que les deux valeurs infiniment petites de v' restent monotropes autour du point $z' = 0$. On en conclut que sur la sphère le point O' est pôle relativement à chacune des racines.

Il s'agit maintenant de voir dans quel ordre les racines se permutent autour des points critiques a et b. De l'origine comme centre

Fig. 32.



avec un rayon très-petit, décrivons un cercle. Nous distinguerons les racines par leurs valeurs approchées

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \alpha z^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = -\alpha i z^{\frac{1}{2}}, \quad u_3 = -\alpha z^{\frac{1}{2}}, \quad u_4 = \alpha i z^{\frac{1}{2}},$$

au point initial z_0 situé sur l'axe Ox à une très-petite distance du point O. Le lacet (a) est formé d'une droite et d'un petit cercle, le lacet (b) d'un demi-cercle $z_0 m z_1$, d'une droite et d'un petit cercle autour du point b, le lacet (O) du cercle $z_0 m z_1 n z_0$; de cette manière, les lacets se succèdent dans l'ordre (a), (b), (O). Quand la variable z, partant du point z_0, décrit le lacet (a) une première fois, dans le sens direct, la fonction u passe de la valeur initiale u_0 à une autre que nous représenterons par $\alpha z^{\frac{1}{2}}$, α étant une certaine racine de l'équation $\alpha^4 = -\frac{4^4}{5^5}$. Je dis maintenant que, si la variable z décrit le lacet (a) plusieurs fois successivement dans le sens direct, les racines se succéderont dans l'ordre u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. En effet, au lacet (O') sur la sphère correspond dans le plan un circuit enveloppant les trois points critiques et se ramenant par conséquent à la suite des trois lacets (a), (b), (O); le point O' n'étant pas critique, la racine prise comme valeur initiale doit se reproduire à la fin du circuit. Or, si l'on part du point z_0 avec la valeur initiale u_0, après le lacet (a) on a u_1; la demi-circonférence $z_0 m z_1$ change u_1 en u_4; le lacet $(z_1\, b)$ devant ramener en z_1 et par conséquent en z_0 la première

racine u_0, il est nécessaire que la racine u_4 soit la cinquième du système circulaire. Nous avons donc à choisir entre les deux dispositions

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4,$$

$$u_0, \quad u_1, \quad u_3, \quad u_2, \quad u_4.$$

La seconde ne convient pas; car si l'on part du point z_0 avec la valeur initiale u_1, on aurait u_3 après le lacet (a), u_2 après le demi-cercle $z_0 m z_1$, u_4 après le lacet $(z_1 b)$, u_1 après le demi-cercle $z_1 m z_0$, u_3 après le lacet (O), et la valeur initiale u_1 ne se reproduirait pas. Avec la première disposition, on a u_2 après le lacet (a), u_1 après le demi-cercle $z_0 m z_1$, u_2 après le lacet $(z_1 b)$, u_3 après le demi-cercle $z_1 m z_0$, u_1 après le lacet (O), et la racine initiale u_1 se reproduit. Ainsi le lacet complexe (a) est l'assemblage des cinq lacets binaires positifs

$$(a)_0^1, \quad (a)_1^2, \quad (a)_2^3, \quad (a)_3^4, \quad (a)_4^0.$$

Le lacet (b), dont l'origine est aussi en z_0, se compose du demi-cercle $z_0 m z_1$, du lacet $(z_1 b)$ symétrique du lacet $(z_0 a)$ par rapport au point O, et du demi-cercle $z_1 m z_0$. Les valeurs de u étant les mêmes en deux points symétriques, la permutation s'effectue sur le lacet $(z_1 b)$ comme sur le lacet $(z_0 a)$. On part du point z_0 avec la valeur initiale u_0; après le demi-cercle $z_0 m z_1$, on a en z_1 la même valeur u_0; le lacet $(z_1 b)$ change u_0 en u_1, et cette racine, après le demi-cercle $z_1 m z_0$, devient u_2. En décrivant le lacet (b) une seconde fois, on revient en z_1 avec la valeur u_1; le lacet $(z_1 b)$ la change en u_2, et, après le demi-cercle $z_1 m z_0$, elle devient u_3, et ainsi de suite. On obtient de la sorte les cinq lacets binaires positifs

$$(b)_0^2, \quad (b)_2^3, \quad (b)_3^4, \quad (b)_4^1, \quad (b)_1^0.$$

Le lacet (O) est neutre relativement à la racine u_0; mais il unit les racines u_1 et u_3, u_2 et u_4. Il est l'assemblage des deux lacets binaires $(\mathrm{O})_1^3$, $(\mathrm{O})_2^4$.

On peut former le système des lacets fondamentaux de bien des manières, par exemple avec les quatre lacets $(a)_0^1$, $(a)_1^2$, $(a)_2^3$, $(a)_3^4$, ou bien avec les quatre lacets $(a)_0^1$, $(a)_1^2$, $(\mathrm{O})_1^3$, $(\mathrm{O})_2^4$. Dans ce second

mode, les chemins qui conduisent de la racine u_0 à toutes les autres sont (nº 39)

$$V_0^1 = (a)_0^1, \quad V_0^2 = (a)_0^1 + (a)_1^2, \quad V_0^3 = (a)_0^1 + (O)_1^3, \quad V_0^4 = (a)_0^1 + (a)_1^2 + (O)_2^4.$$

Exemple IX. — Considérons enfin la fonction définie par l'équation algébrique

$$(u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_m) - z = 0.$$

Quand la variable z décrit une circonférence ayant pour centre l'origine, le produit des distances du point u aux m points fixes a_1, $a_2, \ldots, a_m$ reste constant, et ce point décrit une cassinoïde à m foyers. Quand le point z décrit une droite partant de l'origine, le point u décrit une courbe telle, que la somme des arguments des droites qui vont des m foyers à chacun des points de la courbe est constante. Les deux séries de lignes décrites par le point z étant orthogonales, les deux séries de lignes correspondantes décrites par le point u sont aussi orthogonales. En particulier, lorsque le polynôme est du second degré, les deux séries de lignes orthogonales se composent de cassinoïdes à deux foyers et d'hyperboles équilatères.

LIVRE II.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS DES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES ET CROISSANTES DE LA VARIABLE.

48. Lemme. — *Lorsqu'on multiplie les termes d'une série convergente, ayant tous ses termes positifs, par des nombres positifs inférieurs à un nombre déterminé, on obtient une nouvelle série convergente.*

Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

une série convergente ayant tous ses termes positifs; si l'on multiplie les termes de cette série par les nombres positifs

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \ldots,$$

plus petits qu'un nombre déterminé B, on obtient une nouvelle série convergente

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots.$$

En effet, soient S_n la somme des n premiers termes de la première série, S'_n la somme des n premiers termes de la seconde série, on a $S'_n < BS_n$; mais la somme S_n est moindre que sa limite S; on a donc $S'_n < BS$, et par conséquent la seconde série est aussi convergente.

49. Théorème I. — *Étant donnée une série ordonnée suivant les puis-*

sances entières positives et croissantes d'une variable imaginaire, si, pour une valeur de la variable dont le module est r', les modules des termes de la série sont moindres qu'un nombre déterminé, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est plus petit que r'.

(Abel.)

Soit

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

la série proposée, dans laquelle z désigne une variable imaginaire, u_0, $u_1, \ldots$ des coefficients réels ou imaginaires. Appelons a_0, $a_1, \ldots$ les modules des coefficients. Nous supposons que les modules

$$a_0, \quad a_1 r', \quad a_2 r'^2, \ldots$$

des différents termes de la série, pour une valeur de z dont le module est r', sont plus petits qu'un nombre déterminé B. Donnons à la variable une valeur dont le module r soit plus petit que r', et considérons la série convergente

$$1 + \frac{r}{r'} + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \ldots;$$

si nous multiplions les termes de cette série respectivement par les nombres

$$a_0, \quad a_1 r', \quad a_2 r'^2, \ldots$$

moindres que B, nous obtiendrons, en vertu du lemme précédent, une nouvelle série convergente

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$$

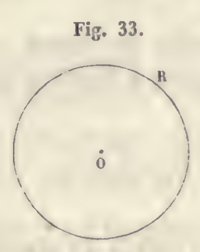
Ainsi, pour toute valeur de z ayant un module plus petit que r', la série des modules est convergente, et par conséquent la série proposée est elle-même convergente.

Cercle de convergence.

50. Imaginons des valeurs croissantes du module pour lesquelles les modules des termes de la série conservent des valeurs finies, c'est-à-dire restent moindres qu'une quantité déterminée; ou ces valeurs croissantes

augmentent à l'infini, ou elles tendent vers une limite R. Dans le premier cas, la série proposée est convergente pour toutes les valeurs de z; car, soit r le module d'une valeur quelconque attribuée à z, les modules des termes de la série conservant des valeurs finies pour un module r' plus grand que r, la série est convergente pour cette valeur de z. Dans le second cas, la série est convergente à l'intérieur du cercle décrit de l'origine comme centre, avec un rayon égal à R (*fig.* 33); car, si l'on

Fig. 33.



attribue à la variable z une valeur ayant un module r inférieur à R, les modules des termes de la série conservant des valeurs finies pour un module r' plus grand que r, mais plus petit que R, la série est convergente pour cette valeur de z. Pour tous les points situés à l'extérieur du cercle R, les modules des termes augmentant à l'infini, la série est divergente. Ainsi la circonférence R partage le plan en deux régions : pour tous les points situés à l'intérieur du cercle, la série est convergente; pour tous les points situés à l'extérieur, elle est divergente. C'est pourquoi nous donnerons à ce cercle le nom de *cercle de convergence*. Une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de la variable définit donc une fonction finie et monotrope dans le cercle de convergence.

Sur la circonférence R elle-même, il y a incertitude : si, pour le module R, les modules des termes ne tendent pas vers zéro, la série sera divergente sur toute la circonférence; si, pour ce même module, les modules des termes tendent vers zéro, la série peut être convergente ou divergente sur toute la circonférence, ou bien convergente en certains points, divergente en d'autres.

Remarquons qu'en chacun des points situés à l'intérieur du cercle de convergence non-seulement la série proposée est convergente, mais encore la série des modules de ses différents termes.

Exemples. — 1° La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente dans toute l'étendue du plan.

2° La série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

est convergente dans le cercle de rayon 1; sur la circonférence, les modules des termes étant égaux à l'unité, la série est divergente.

3° La série

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots$$

est aussi convergente dans le cercle de rayon 1; sur la circonférence, la série des modules des termes étant convergente, la série est elle-même convergente.

4° La série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

est convergente dans le cercle de rayon 1; sur la circonférence, on voit immédiatement qu'elle est convergente au point $z = -1$, divergente au point $z = +1$; on démontre d'ailleurs qu'elle est convergente sur toute la circonférence, excepté en ce dernier point.

5° Si l'on considère la série

$$1 + 1.z + 1.2z^2 + 1.2.3z^3 + \dots$$

et si l'on attribue à z une valeur quelconque différente de zéro, les modules des termes augmentent à l'infini; il en résulte que la série n'est convergente que pour $z = 0$; dans ce cas, le rayon du cercle de convergence se réduit à zéro.

51. Théorème II. — *La fonction définie par une série ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable est continue dans le cercle de convergence.*

La série

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

étant convergente dans un cercle de rayon R, appelons $f(z)$ la somme des termes de la série pour une valeur quelconque de z située à l'intérieur du cercle de convergence. Soit $\varphi(z)$ la somme des n premiers termes de la série, et $\psi(z)$ le reste; nous aurons

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z).$$

De l'origine comme centre, avec un rayon R′ un peu plus petit que R, décrivons un cercle. On peut assigner une valeur de n telle que, pour cette valeur et pour toutes les valeurs plus grandes, le module du reste $\psi(z)$ soit plus petit qu'une quantité très-petite donnée $\frac{\alpha}{3}$, quelle que soit la position de la variable z à l'intérieur du cercle R′. Il suffit, pour cela, de prendre n tel que l'on ait

$$a_n R'^n + a_{n+1} R'^{n+1} + \dots < \frac{\alpha}{3};$$

ce qui est possible, puisque la série

$$a_0 + a_1 R' + \dots$$

est convergente. Pour tout module r plus petit que R′, on aura, à plus forte raison,

$$a_n r^n + a^{n+1} r^{n+1} + \dots < \frac{\alpha}{3}.$$

Le module du reste $\psi(z)$, étant plus petit que cette somme, sera lui-même moindre que $\frac{\alpha}{3}$.

Supposons maintenant que nous donnions à la variable deux valeurs voisines z et z' situées à l'intérieur du cercle R′, la fonction prendra les deux valeurs

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z), \quad f(z') = \varphi(z') + \psi(z'),$$

dont la différence est

$$f(z') - f(z) = \varphi(z') - \varphi(z) + \psi(z') - \psi(z).$$

Le polynôme entier $\varphi(z)$ du degré $n-1$ étant une fonction continue de la variable z, on peut assigner un nombre ρ tel que, pour toutes les positions du point z' à l'intérieur du cercle décrit du point z comme centre avec un rayon égal à ρ, la variation $\varphi(z')-\varphi(z)$ du polynôme ait un module plus petit que $\frac{\alpha}{3}$. Mais les modules des restes $\psi(z')$ et $\psi(z)$ sont déjà plus petits que $\frac{\alpha}{3}$; donc la variation $f(z')-f(z)$ aura un module plus petit que α pour toutes ces positions du point z'; c'est en cela que consiste la continuité. Ainsi la fonction, définie par la série, varie d'une manière continue dans l'intérieur du cercle de convergence.

52. Lemme. — *Si l'on prend les dérivées des différents termes de la série, on forme une nouvelle série convergente dans le même cercle que la première.*

Soit la série

$$f(z)=u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots$$

convergente dans le cercle de rayon R. Nous allons démontrer que la série

$$u_1+2u_2z+3u_3z^2+\ldots,$$

que l'on obtient en prenant la dérivée de chacun des termes, est convergente dans le même cercle. De l'origine comme centre, avec un rayon R′ un peu plus petit que R, décrivons un cercle, et donnons à z une valeur dont le module r soit plus petit que R′. Si l'on multiplie les termes de la série convergente

$$1+2\frac{r}{R'}+3\frac{r^2}{R'^2}+\ldots$$

respectivement par les nombres

$$a_1,\quad a_2R',\quad a_3R'^2,\ldots,$$

qui tendent vers zéro, et qui par conséquent sont inférieurs à un nombre fixe B, on obtient une série convergente

$$a_1+2a_2r+3a_3r^2+\ldots.$$

Ainsi la nouvelle série est convergente dans le même cercle que la

première; elle définit dans ce cercle une fonction continue et monotrope que nous désignerons par $f'(z)$.

En prenant de même les dérivées des termes de cette seconde série, on obtiendra une troisième série convergente dans le même cercle R; elle définit une fonction continue et monotrope, que nous désignerons par $f''(z)$, et ainsi de suite indéfiniment.

53. Théorème III. — *La fonction définie par la série a une dérivée.*

Soit la série

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

convergente dans le cercle R. Du point z comme centre, décrivons un cercle tangent au cercle R; pour un point $z+h$ situé dans ce petit cercle, la série sera encore convergente, et l'on aura

$$(1) \qquad f(z+h) = u_0 + u_1(z+h) + u_2(z+h)^2 + \ldots.$$

Concevons que l'on développe les puissances successives du binôme $z+h$, et que l'on dispose les termes en un tableau de la manière suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \\ u_1 z + u_1 h + 0 + 0 + \ldots, \\ u_2 z^2 + 2u_2 z h + u_2 h^2 + 0 + \ldots, \\ u_3 z^3 + 3u_3 z^2 h + 3u_3 z h^2 + u_3 h^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

en complétant le tableau par des zéros. La somme des termes d'une même ligne horizontale constituant un terme de la série (1), la somme des termes contenus dans les m premières lignes horizontales est égale à la somme des m premiers termes de la série (1). Nous allons démontrer que, si l'on évalue le tableau par colonnes verticales, au lieu de l'évaluer par lignes horizontales, la série

$$(3) \qquad v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots,$$

que l'on obtient et qui est ordonnée suivant les puissances croissantes de h, est convergente et a même somme que la série (1).

Désignons par r le module de z et par ρ celui de h; puisque ρ est

plus petit que $R - r$ et par suite $r + \rho$ plus petit que R, la série

$$(1)' \qquad a_0 + a_1(r+\rho) + a_2(r+\rho)^2 + \ldots$$

est convergente. Développons les puissances du binôme $r + \rho$ et disposons les termes en un tableau analogue au précédent :

$$(2)' \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 + \ \ 0 \ \ + \ \ 0 \ \ + 0 \ + \ldots, \\ a_1 r + \ a_1\rho \ \ + \ \ 0 \ \ + 0 \ + \ldots, \\ a_2 r^2 + 2a_2 r\rho + \ a_2\rho^2 \ + 0 \ + \ldots, \\ a_3 r^3 + 3a_3 r^2\rho + 3a_3 r\rho^2 + a_3\rho^3 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Appelons S_m la somme des m premiers termes de la série $(1)'$, S la limite vers laquelle elle tend, quand m augmente indéfiniment. Les m premiers termes d'une colonne verticale quelconque du tableau $(2)'$ appartenant aux m premières lignes horizontales, leur somme est plus petite que la somme des termes de ces m premières lignes horizontales, c'est-à-dire plus petite que S_m et, par conséquent, plus petite que S; cette somme tend donc vers une limite, quand m augmente indéfiniment; ainsi chaque colonne verticale, prise à part, constitue une série convergente. Désignons par b_0, $b_1\rho$, $b_2\rho^2$,... les sommes des diverses colonnes verticales, et considérons la série

$$(3)' \qquad b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + \ldots$$

Appelons S'_n la somme des n premiers termes de cette série. Généralisons le raisonnement que nous avons fait précédemment; les m premiers termes des n premières colonnes verticales appartiennent aux m premières lignes horizontales; leur somme est plus petite que la somme des termes de ces m premières lignes horizontales, c'est-à-dire plus petite que S_m, si m est plus grand que n, et par conséquent plus petite que S. Si, laissant n fixe, on fait augmenter m indéfiniment, on en conclut que cette somme tend vers une limite plus petite que S; mais cette limite est précisément S'_n ; la quantité S'_n est donc plus petite que S. D'autre part, cette quantité S'_n est plus grande que la somme des n premiers termes des n premières colonnes verticales, c'est-à-dire plus grande que S_n. La somme S'_n, étant comprise entre S_n et S, tend

vers une limite égale à S, quand n augmente indéfiniment. Ainsi la série (3)′ est convergente et a même somme que la série (1)′.

Revenons maintenant au tableau (2). Nous remarquons d'abord que les termes d'une même colonne verticale, ayant pour modules les termes correspondants du tableau (2)′, forment une série convergente. Nous avons désigné par v_0, $v_1 h$, $v_2 h^2, \ldots$ les sommes des diverses colonnes verticales; ces quantités ayant des modules respectivement moindres que les termes de la série convergente (3)′, la série (3) est elle-même convergente. Appelons Σ_n la somme des n premiers termes de la série (1), Σ'_n celle des n premiers termes de la série (3); la différence $\Sigma'_n - \Sigma_n$ est égale à la somme des termes des n premières colonnes verticales du tableau (2), à partir de la $n+1^{ième}$ ligne horizontale; le module de cette différence est moindre que la somme des modules des termes, c'est-à-dire moindre que $S'_n - S_n$; elle tend donc vers zéro, quand n augmente indéfiniment. La somme Σ_n tendant vers la limite $f(z+h)$, on en conclut que la somme Σ'_n tend vers la même limite. On a donc

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1.2} + \ldots.$$

On déduit de là

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + f''(z)\frac{h}{1} + \ldots$$

Le second membre de cette égalité est une fonction continue de h; quand h est très-petit, il diffère très-peu de $f'(z)$, et quand h tend vers zéro d'une manière quelconque, il tend vers $f'(z)$. Ainsi le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable tend vers une même limite, de quelque manière que l'accroissement de la variable tende vers zéro, et par conséquent la fonction $f(z)$ a une dérivée qui est représentée par la série $f'(z)$.

De tout ce qui précède, on conclut qu'une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable, définit une fonction *holomorphe* dans le cercle de convergence.

54. *Remarque I.* — La série

$$1 + z + z^2 + \ldots$$

est divergente en chaque point de la circonférence du cercle de convergence. Cependant, si le point intérieur z s'approche d'un point de cette circonférence autre que le point $z = 1$, la somme S, qui est égale à $\frac{1}{1-z}$, tend vers une limite parfaitement déterminée.

Remarque II. — Supposons que la série $u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$ soit convergente en un point z_1 de la circonférence du cercle de convergence, et appelons A la somme en ce point; Abel a fait voir que, lorsque le point z se rapproche du point z_1 suivant le rayon Oz_1, la somme variable S tend vers une limite égale à A.

On peut représenter, en effet, les valeurs de z, pour les divers points du rayon Oz_1, par la formule $z = \zeta z_1$, ζ étant une quantité réelle qui varie de 0 à 1. Si l'on représente en même temps par a_n le produit $u_n z_1^n$, on aura

$$S = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$$

et

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Appelons σ_n la somme des $n+1$ premiers termes de cette dernière série, le terme a_n sera égal à $\sigma_n - \sigma_{n-1}$, et l'on pourra exprimer la somme S de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
S &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)\zeta + (\sigma_2 - \sigma_1)\zeta^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)\zeta^3 + \ldots \\
&= (1-\zeta)(\sigma_0 + \sigma_1\zeta + \sigma_2\zeta^2 + \sigma_3\zeta^3 + \ldots) \\
&= (1-\zeta)(\sigma_0 + \sigma_1\zeta + \sigma_2\zeta^2 + \ldots + \sigma_{n-1}\zeta^{n-1}) \\
&\quad + (1-\zeta)(\sigma_n\zeta^n + \sigma_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots) \\
&= (1-\zeta)(\sigma_0 + \sigma_1\zeta + \ldots + \sigma_{n-1}\zeta^{n-1}) \\
&\quad + A(1-\zeta)(\zeta^n + \zeta^{n+1} + \ldots) \\
&\quad + (1-\zeta)(\varepsilon_n\zeta^n + \varepsilon_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots),
\end{aligned}$$

ε^n, ε^{n+1},... désignant les différences entre les sommes σ_n, σ_{n+1}, ... et A; nous représenterons le nombre positif $1-\zeta$ par β. On peut supposer n assez grand pour que le plus grand des modules des quantités ε_n, ε_{n+1}, ... soit moindre qu'un nombre donné quelconque $\frac{\alpha}{2}$; le module de

$$(1-\zeta)(\varepsilon_n\zeta^n + \varepsilon_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots)$$

sera alors moindre que $\frac{\alpha}{2}\zeta^n$, et par suite moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Le module de

$$(1-\zeta)(\sigma_0+\sigma_1\zeta+\ldots+\sigma_{n-1}\zeta^{n-1})$$

est plus petit que $n\beta M$, M étant le plus grand des modules des sommes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots$; la somme

$$A(1-\zeta)(\zeta^n+\zeta^{n+1}+\ldots)$$

est égale à $A\zeta^n$ ou à $A(1-\beta)^n$. Considérons la différence

$$A - A(1-\beta)^n = A[1-(1-\beta)^n];$$

on a $(1-\beta)^n > 1 - n\beta$, la quantité $[1-(1-\beta)^n]$ est donc un nombre positif moindre que $n\beta$, et le module de $A(1-\beta)^n - A$ est plus petit que $n\beta A_0$, A_0 désignant le module de A. Il résulte de ce qui précède que le module de la différence A — S est moindre que

$$n\beta(A_0+M)+\frac{\alpha}{2},$$

et par conséquent moindre que α, pour toute valeur de β plus petite que $\frac{\alpha}{2n(A_0+M)}$. Ainsi la somme variable S a pour limite A.

La démonstration précédente est de Lejeune-Dirichlet.

CHAPITRE II.

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES.

Les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$.

55. Considérons les séries

$$(1)\qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$(2)\qquad \frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

$$(3)\qquad 1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots;$$

le rayon du cercle de convergence étant infini, ces trois séries définissent des fonctions holomorphes de z dans toute l'étendue du plan. On désigne ces trois fonctions par e^z, $\sin z$, $\cos z$, parce que, lorsque la variable z a une valeur réelle x, ces séries sont les développements de la fonction exponentielle e^x telle qu'on la définit en Algèbre, et des deux fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ telles qu'on les définit géométriquement. La fonction $\sin z$ est impaire, la fonction $\cos z$ paire.

On obtient la dérivée de chacune de ces fonctions en prenant la dérivée de chaque terme de la série (n° 53), ce qui donne

$$\mathrm{D}e^z=e^z,\quad \mathrm{D}\sin z=\cos z,\quad \mathrm{D}\cos z=-\sin z.$$

Ces trois fonctions se ramènent à une seule d'entre elles; car si, dans la série (1), on remplace z par zi ou par $-zi$, on a

$$(4)\qquad e^{zi}=\cos z+i\sin z,$$

$$(5)\qquad e^{-zi}=\cos z-i\sin z;$$

d'où l'on déduit

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \tag{6}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{7}$$

Les deux fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont ramenées ainsi à la fonction exponentielle e^z.

Il résulte aussi de la relation (4) que toute quantité imaginaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ peut être mise sous la forme très-simple $z = re^{\theta i}$, r étant le module de cette quantité, θ l'un de ses arguments.

56. La propriété fondamentale de la fonction exponentielle consiste dans la relation

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}. \tag{8}$$

Pour la démontrer, appelons Σ_n, Σ'_n, Σ''_n les sommes des n premiers termes des séries qui définissent les trois fonctions e^z, $e^{z'}$, $e^{z+z'}$, savoir :

$$\Sigma_n = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$\Sigma'_n = 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1.2} + \ldots + \frac{z'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$\Sigma''_n = 1 + \frac{z+z'}{1} + \frac{(z+z')^2}{1.2} + \ldots + \frac{(z+z')^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Désignons par r et r' les modules de z et de z', et appelons de même S_n, S'_n, S''_n les sommes des n premiers termes des séries qui représentent les fonctions réelles e^r, $e^{r'}$, $e^{r+r'}$, savoir :

$$S_n = 1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$S'_n = 1 + \frac{r'}{1} + \frac{r'^2}{1.2} + \ldots + \frac{r'^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

$$S''_n = 1 + \frac{r+r'}{1} + \frac{(r+r')^2}{1.2} + \ldots + \frac{(r+r')^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Considérons, en outre, la somme des $2n-1$ premiers termes de la dernière série

$$S''_{2n-1} = 1 + \frac{r+r'}{1} + \frac{(r+r')^2}{1.2} + \ldots + \frac{(r+r')^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}.$$

Concevons que l'on ait effectué le produit des deux polynômes S_n et S'_n, et que l'on ait développé les binômes dans les sommes S''_n et S''_{2n-1}; nous remarquons que tous les termes de S''_n se trouvent dans le produit $S_n \times S'_n$, et que tous les termes de ce produit se trouvent dans S''_{2n-1}; on a donc

$$S''_n < S_n \times S'_n < S''_{2n-1};$$

mais, quand n augmente indéfiniment, les deux sommes S''_n, S''_{2n-1} tendent vers la même limite $e^{r+r'}$. Il en résulte que la différence $S_n \times S'_n - S''_n$, qui est plus petite que $S''_{2n-1} - S''_n$, a pour limite zéro.

Concevons de même que l'on ait effectué le produit des deux sommes Σ_n et Σ'_n et développé les binômes dans la somme Σ''_n; le produit contient tous les termes de Σ''_n avec d'autres quantités; les termes de la différence $\Sigma_n \times \Sigma'_n - \Sigma''_n$ ayant pour modules les termes correspondants de la différence $S_n \times S'_n - S''_n$, on a

$$\text{mod}(\Sigma_n \times \Sigma'_n - \Sigma''_n) < S_n \times S'_n - S''_n,$$

et par suite

$$\text{lim.mod}(\Sigma_n \times \Sigma'_n - \Sigma''_n) = 0,$$

ou

$$\lim(\Sigma_n \times \Sigma'_n) = \lim \Sigma''_n,$$

c'est-à-dire

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}.$$

57. La fonction e^z est *périodique*. On a, en effet, d'après le théorème précédent,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \times e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z; \tag{9}$$

la période est $2\pi i$.

En vertu des relations (6) et (7), les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont aussi périodiques; la période est 2π.

On a de même

(10) $$e^{z+\pi i} = e^z \times e^{\pi i} = e^z(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^z,$$

et par suite

(11) $$\sin(z+\pi) = -\sin z, \quad \cos(z+\pi) = -\cos z.$$

A l'aide des relations précédentes, on généralise aisément les relations

(12) $$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$$

(13) $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

(14) $$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z',$$

(15) $$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$

qui ont été établies en Trigonométrie pour les arcs réels.

On définit la fonction méromorphe $\operatorname{tang} z$ en posant

(16) $$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z};$$

cette fonction est périodique, et admet la période π.

Les tables ordinaires de logarithmes de sinus et de cosinus permettent de calculer les valeurs des fonctions précédentes pour une valeur imaginaire $x + yi$ attribuée à la variable z. On a d'abord

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y);$$

c'est une quantité imaginaire ayant pour module e^x et pour argument y. On a ensuite

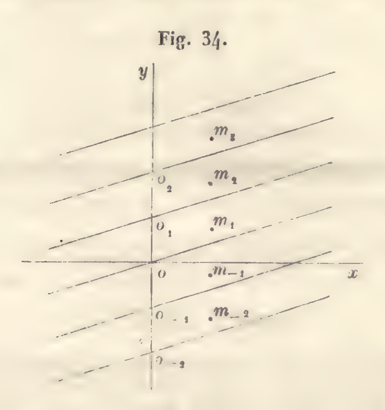
$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x,$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x.$$

58. Voici comment on peut se représenter la périodicité de la fonction e^z. Sur l'axe oy (*fig.* 34), portons de part et d'autre de l'origine des longueurs égales à 2π, et, par les points de division o, o_1, o_2, ..., o_{-1}, o_{-2}, ..., menons des droites parallèles dans une direction arbitraire,

autre que oy; ces parallèles diviseront le plan en bandes égales; aux points homologues m_1, m_2, m_3, ..., m_{-1}, m_{-2}, ... de ces différentes

Fig. 34.



bandes, c'est-à-dire aux points représentés par la formule $z + 2n\pi i$, n étant un nombre entier quelconque, la fonction reprend la même valeur.

Dans chaque bande, la fonction

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

passe par toutes les valeurs possibles, et une fois seulement par chacune d'elles; car son module e^x varie de zéro à l'infini, et, quand x reste constant, son argument y varie de y_0 à $y_0 + 2\pi$. Quand la variable z s'éloigne indéfiniment dans une bande du côté des x positifs ou du côté opposé, le module de la fonction devient infini ou tend vers zéro.

Pour figurer la périodicité des fonctions $\cos z$ et $\sin z$, on portera sur l'axe ox des longueurs égales à 2π, et par les points de division on mènera des droites parallèles dans une direction arbitraire autre que ox. Dans chaque bande, les fonctions passent par toutes les valeurs possibles et deux fois par chacune d'elles. Si l'on veut en effet que la fonction $\cos z$ ait une valeur donnée u, on posera

$$\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = u,$$

d'où

$$e^{2zi} - 2ue^{zi} + 1 = 0,$$

$$e^{zi} = u \pm \sqrt{u^2 - 1};$$

dans chaque bande, il existe une valeur de z et une seule pour laquelle la fonction e^{zi} admet la valeur $u+\sqrt{u^2-1}$, et une autre valeur de z pour laquelle elle admet la valeur $u-\sqrt{u^2-1}$; en ces deux points, et en ces deux points seulement, la fonction $\cos z$ acquiert la valeur u. Puisque $\cos(2\pi-z)=\cos z$, les deux valeurs de z qui, dans chaque bande, correspondent à une même valeur de u, ont, abstraction faite des multiples de 2π, une somme constante et égale à 2π.

De même, si l'on veut que la fonction $\sin z$ ait une valeur donnée u, on posera

$$\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=u,$$

d'où

$$e^{2zi}-2iue^{zi}-1=0,$$

$$e^{zi}=iu\pm\sqrt{1-u^2};$$

ce qui conduit à la même conclusion. En vertu de la relation

$$\sin(\pi-z)=\sin z,$$

les deux valeurs de z qui, dans chaque bande, correspondent à une même valeur de u, ont, abstraction faite des multiples de 2π, une somme constante et égale à π. Quand la variable z s'éloigne indéfiniment dans une bande, d'un côté ou de l'autre, les modules des fonctions $\sin z$ et $\cos z$ deviennent infinis.

Pour figurer la périodicité de la fonction $\operatorname{tang} z$, on portera sur l'axe ox des longueurs égales à π, et par les points de division on mènera des parallèles dans une direction arbitraire autre que ox. Dans chaque bande, la fonction passe par toutes les valeurs possibles, et une fois seulement pour chacune d'elles. Car, de la relation

$$\operatorname{tang} z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{i(e^{zi}+e^{-zi})}=u,$$

on déduit

$$e^{2zi}=\frac{1+ui}{1-ui};$$

dans chaque bande la fonction e^{2zi} ne passant qu'une fois par la valeur $\frac{1+ui}{1-ui}$, la fonction $\operatorname{tang} z$ ne passe qu'une fois par la valeur u. La

fonction $\tang z$ devient nulle aux points $z = n\pi$, infinie aux points $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$; il y a une racine et un pôle dans chaque bande. Quand la variable z s'éloigne indéfiniment dans une bande, du côté des y positifs ou du côté opposé, la fonction u tend vers $+i$ ou vers $-i$.

59. Pour étudier la variation d'une fonction, quand la variable z est très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$ et l'on donne à z' des valeurs voisines de zéro (n° 17). Si l'on fait $z' = x' + y'i = r'e^{\theta' i}$, on a

$$e^z = e^{\frac{1}{z'}} = e^{\frac{\cos\theta'}{r'}} e^{-\frac{i\sin\theta'}{r'}}.$$

Lorsque la nouvelle variable z' se rapproche du point $z' = 0$, le module de la fonction devient nul, infini ou égal à l'unité, suivant que $\cos\theta'$ a une valeur négative, positive, ou nulle; l'argument augmente à l'infini en valeur absolue, excepté quand la valeur de $\sin\theta'$ est nulle. Le point $z' = 0$ est un point singulier d'une espèce particulière; la fonction e^z, quoique monotrope dans le voisinage, acquiert en ce point des valeurs différentes, suivant le chemin suivi pour y arriver. Nous dirons que ce point est un point d'*indétermination*. Ainsi la fonction e^z est *holomorphe* sur toute la sphère, excepté au point O', qui est un point d'indétermination.

On a de même

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\sin\theta'}{r'}} e^{\frac{i\cos\theta'}{r'}} + e^{-\frac{\sin\theta'}{r'}} e^{-\frac{i\cos\theta'}{r'}}\right),$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{\sin\theta'}{r'}} e^{\frac{i\cos\theta'}{r'}} - e^{-\frac{\sin\theta'}{r'}} e^{-\frac{i\cos\theta'}{r'}}\right).$$

Lorsque la variable z' se rapproche du point $z' = 0$, le module de $\cos z$ et celui de $\sin z$ deviennent infinis, excepté quand $\sin\theta'$ a une valeur nulle; dans ce cas, on a

$$\cos z = \cos\frac{1}{x'}, \quad \sin z = \sin\frac{1}{x'},$$

et la valeur de la fonction, comprise entre -1 et $+1$, est indéterminée. Le point O' est encore un point d'indétermination. Ainsi les

fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont *holomorphes* sur toute la sphère, excepté au point O′, qui est un point d'indétermination.

Lorsque la variable z' se rapproche du point $z' = 0$, la fonction $\tang z$ tend vers la valeur $-i$ ou $+i$, suivant que la valeur de $\sin\theta'$ est positive ou négative. Quand $\sin\theta' = 0$, la fonction $\tang\frac{1}{x'}$ est indéterminée. Ainsi la fonction $\tang z$ est *méromorphe* sur toute la sphère, excepté au point O′ qui est un point d'indétermination; elle admet d'ailleurs une infinité de pôles.

La fonction log$z$.

60. Nous avons défini la fonction exponentielle et les fonctions circulaires directes; occupons-nous maintenant des fonctions inverses. Considérons d'abord l'équation

$$e^u = z,$$

dans laquelle u est l'inconnue. Si l'on pose

$$z = re^{\theta i}, \quad u = X + Yi,$$

cette équation devient

$$e^X e^{Yi} = re^{\theta i};$$

elle sera vérifiée si l'on fait

$$e^X = r, \quad Y = \theta + 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque, et par ces valeurs seulement. La quantité réelle X est le logarithme népérien du nombre positif r; en le désignant par Lr, on a

$$u = Lr + (\theta + 2n\pi)i.$$

Ainsi à une valeur de z correspondent une infinité de valeurs de u formant une progression arithmétique dont la raison est $2\pi i$. Chacune de ces valeurs est un logarithme de z; on a donc

$$\log z = Lr + (\theta + 2n\pi)i. \tag{17}$$

Supposons que l'on fasse partir la variable z du point $z = 1$, en attri-

buant à l'argument θ la valeur initiale $\theta = 0$, et que l'on adopte la détermination

$$(18) \qquad u = \log z = \mathrm{L}r + \theta i;$$

si le point z se meut d'une manière continue dans le plan, sans passer par le point $z = 0$, r et θ variant d'une manière continue, nous aurons une fonction partant de la valeur initiale $u = 0$ et variant d'une manière continue.

La fonction devient infinie au point $z = 0$. Lorsque la variable z décrit un cercle autour de ce point, dans le sens positif, son argument θ augmente de 2π, et la fonction augmente de $2\pi i$; ainsi, quand la variable z fait une infinité de révolutions autour du point $z = 0$, la fonction $\log z$ acquiert une infinité de valeurs différentes, qui sont données par la formule (17). Le point $z = 0$ est ici un point critique différent de ceux que nous avons rencontrés dans l'étude des fonctions algébriques; nous l'appellerons *point critique logarithmique*.

Quelle que soit la détermination que l'on prenne, la fonction $\log z$ admet une dérivée; car, si l'on considère la fonction directe $z = e^u$, on sait que le rapport $\frac{\Delta z}{\Delta u}$ tend vers une limite égale à e^u; le rapport inverse tend donc vers une limite égale à $\frac{1}{e^u}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{z}$. On conclut de là que $\log z$ est une fonction holomorphe de z dans toute partie du plan ne comprenant pas le point critique $z = 0$. Nous remarquons en outre que la dérivée est la même pour toutes les déterminations de la fonction.

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, on a

$$u = -\log z',$$

et le point $z' = 0$ est un point critique de même nature que le précédent. Sur la sphère, la fonction $\log z$ admet donc les deux points critiques logarithmiques O et O'.

Ce que nous avons dit de la fonction $\log z$ s'applique à la fonction $\log(z - a)$. Le premier point critique est ici $z = a$. La quantité $z - a$ étant figurée par le point z, quand on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point a, à chaque tour décrit par le point z au-

tour du point a dans le sens positif, la fonction augmente de $2\pi i$. Sur la sphère, le point O′ est aussi un point critique.

De la relation $e^u \times e^{u'} = e^{u+u'}$, on déduit la propriété fondamentale des logarithmes

$$\log(zz') = \log z + \log z'.$$

La fonction arc tang z.

61. Considérons de même l'équation

$$\operatorname{tang} u = z,$$

dans laquelle u est l'inconnue. D'après une transformation déjà faite (n° 58), on a

$$e^{2ui} = \frac{1+zi}{1-zi},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2i}\log\frac{1+zi}{1-zi}.$$

A chaque valeur de z correspondent une infinité de valeurs du logarithme et par conséquent une infinité de valeurs de u. Chacune de ces valeurs est une détermination de la fonction inverse arc tang z; on a donc

$$(19) \qquad u = \operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+zi}{1-zi}.$$

Pour voir quelle loi suivent ces diverses valeurs, nous mettrons l'expression précédente sous la forme

$$u = \frac{1}{2i}\left[\log(-1) + \log\frac{z-i}{z+i}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}[\log(z-i) - \log(z+i)].$$

Il y a ici deux points critiques logarithmiques $z = +i$, $z = -i$; quand la variable z décrit un petit cercle autour du premier point critique ou autour du second, dans le sens positif, $\log(z-i)$ ou $\log(z+i)$ augmente de $2\pi i$, et par conséquent u éprouve une variation égale à $+\pi$

ou à $-\pi$. Les valeurs de u qui correspondent à une même valeur de z forment donc une progression arithmétique dont la raison est π. Sur la sphère, le point O′ est un point ordinaire.

Supposons que, la variable z partant de $z=0$, on adopte dans l'expression (19) le logarithme dont la valeur initiale est zéro, on aura une fonction $\operatorname{arctang} z$ ayant pour valeur initiale zéro, et holomorphe sur toute partie de la sphère qui ne comprend aucun des deux points critiques $z=\pm i$.

Les fonctions arcsin$z$, arccos$z$.

62. On définira d'une manière analogue les deux fonctions $\arcsin z$, $\arccos z$. Soit l'équation

$$\sin u = z,$$

d'où l'on déduit (nº 58)

$$e^{ui} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

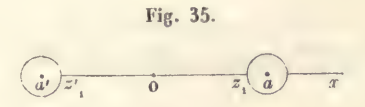
$$u = \frac{1}{i}\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right).$$

Nous prendrons l'expression

$$u = \arcsin z = \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \tag{20}$$

en adoptant le logarithme dont la valeur initiale est zéro. Cette fonction ne devient infinie pour aucune valeur finie de z, car la quantité $iz+\sqrt{1-z^2}$ ne s'annule pas; mais il y a deux points critiques a et a' (*fig.* 35), qui correspondent aux valeurs $z=\pm 1$, et autour de chacun desquels le radical change de signe.

Fig. 35.



Pour voir comment la fonction se comporte autour du point a, supposons que la variable z aille de l'origine à un point z_1 voisin de a, en suivant la droite Ox; on a, dans ce cas, $z=x$; la quantité $ix+\sqrt{1-x^2}$

a pour module l'unité et pour argument un angle θ satisfaisant aux relations $\sin\theta = x$, $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, et s'annulant avec x; on en conclut $u = \theta$ (n° 60), et, par conséquent, quand x varie de o à 1, u croît de o à $\frac{\pi}{2}$. Lorsque la variable z tourne autour du point a, le radical change de signe, et la fonction devient

$$u = \frac{1}{i}\log(iz - \sqrt{1-z^2}),$$

ce second logarithme, comme le premier, ayant en z_1 une valeur voisine de $\frac{\pi i}{2}$, puisque la fonction est continue dans le voisinage du point a. Mais cette expression peut se mettre sous la forme

$$(21)\quad u = \frac{1}{i}\log(-1) - \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2}) = \pi - \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

ce dernier logarithme ayant aussi en z_1 une valeur voisine de $\frac{\pi i}{2}$, et par conséquent étant égal à celui de la formule (20). Si la variable z revient ensuite à l'origine en suivant la droite Ox, la fonction u croît de $\frac{\pi}{2}$ à π. Ainsi, quand la variable z décrit le lacet (a), la fonction varie de o à π, et elle est représentée ensuite par la formule (21), dans laquelle le logarithme a à l'origine la valeur zéro.

Si la variable z faisait deux tours autour du point a, le radical changeant deux fois de signe, la fonction reprendrait en z_1 sa valeur primitive, et l'on reviendrait à l'origine avec la valeur initiale $u = 0$.

Supposons que la variable z aille de l'origine à un point z'_1 voisin de a', en suivant la droite Oa'; comme on a toujours $u = \theta$, u variera de o à $-\frac{\pi}{2}$. La variable tournant autour du point a', le radical change de signe et la fonction devient

$$u = \frac{1}{i}\log(iz - \sqrt{1-z^2}),$$

ce logarithme, comme le premier, ayant en z'_1 une valeur voisine de $-\frac{\pi i}{2}$. Mais cette expression peut se mettre sous la forme

$$(22)\quad u = -\pi - \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

ce dernier logarithme ayant aussi en z'_1 une valeur voisine de $-\frac{\pi i}{2}$, et par conséquent étant égal au premier. La variable revenant à l'origine, u varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\pi$, et elle est représentée ensuite par la formule (22), dans laquelle le logarithme a à l'origine la valeur zéro.

Supposons maintenant que la variable z décrive successivement les deux lacets (a) et (a'); après le premier lacet, la fonction a acquis la valeur π; les formules (21) et (22) montrent que, sur le second lacet, la fonction varie de π à 2π et est représentée ensuite par la formule

$$(23) \qquad u = 2\pi + \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

dans laquelle le logarithme a à l'origine la valeur zéro.

Si la variable avait décrit d'abord le lacet (a'), puis le lacet (a), la fonction aurait varié de 0 à $-\pi$ et de $-\pi$ à -2π, et serait ensuite représentée par la formule

$$(24) \qquad u = -2\pi + \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

dans laquelle le logarithme a encore à l'origine la valeur zéro.

Cela posé, tous les chemins qui vont de l'origine à un point z du plan peuvent se ramener à un chemin déterminé, ou à ce chemin précédé d'une série de lacets (a) et (a'). Appelons u_1 la valeur qu'acquiert la fonction au point z, quand la variable suit le chemin déterminé. Puisque le même lacet, parcouru deux fois successivement, ne produit aucun changement dans la fonction, on peut en faire abstraction; la série sera formée alors de lacets alternatifs (a) et (a'). Si leur nombre est pair, la valeur de la fonction, après l'ensemble des lacets, est $2n\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et la fonction est représentée alors par la formule

$$(25) \qquad u = 2n\pi + \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

dans laquelle le logarithme a à l'origine la valeur zéro; la variable décrivant ensuite le chemin déterminé Oz, on a $u = 2n\pi + u_1$. Si le nombre des lacets est impair, après l'avant-dernier lacet, la fonction

est représentée par la formule (25); un nouveau lacet donne

$$(26) \qquad u = 2n\pi \pm \pi - \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

le logarithme s'annulant à l'origine; la variable décrivant ensuite le chemin déterminé Oz, on a $u = 2n\pi \pm \pi - u_1$. Il résulte de là qu'à chaque valeur de z correspondent les deux séries de valeurs de la fonction : $2n\pi + u_1$, $(2n+1)\pi - u_1$.

Remarquons que, par rapport à l'une quelconque des déterminations de la fonction $u = \arcsin z$, chacun des points a et a' est un *point critique algébrique,* puisque, lorsque la variable tourne autour de l'un d'eux, la fonction n'acquiert que deux valeurs différentes, qui deviennent égales en ce point. Les valeurs en nombre infini de la fonction proviennent de la combinaison des lacets relatifs aux deux points critiques.

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, on a

$$u = \frac{1}{i}\left[\log i + \log\left(1 + \sqrt{1-z'^2}\right) - \log z'\right].$$

Le point $z' = 0$, c'est-à-dire le point O' sur la sphère, est donc un *point critique logarithmique*. Concevons que l'on trace sur la sphère un lacet qui, partant du point O, enveloppe le point O'; quand la variable décrit ce lacet, la fonction éprouve une variation égale à $\pm 2\pi$; mais ce lacet (O') peut être ramené à la suite des deux lacets (a) et (a'), pris dans un certain ordre. Ceci fait voir immédiatement que la suite de ces deux lacets doit produire une variation de la fonction égale à $\pm 2\pi$.

De même, si l'on considère l'équation $\cos u = z$, d'où

$$e^{ui} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, \quad u = \frac{1}{i}\log\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right),$$

on aura

$$(27) \qquad u = \arccos z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right),$$

c'est-à-dire $\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z$.

La fonction z^a.

63. Nous avons défini la fonction z^a, lorsque l'exposant a est réel (nº 14). Lorsque l'exposant est imaginaire, on définira la fonction de la manière suivante : puisque $z = e^{\log z}$, on posera

(28) $$u = z^a = e^{a \log z}.$$

Quand la variable z décrit une courbe fermée comprenant l'origine, la fonction u est multipliée par le facteur constant $e^{2\pi a i}$; ainsi la fonction acquiert en chaque point une infinité de valeurs en progression géométrique, et le point $z = 0$ est un point critique d'une nouvelle espèce. Soient $a = \alpha + \beta i$, $z = re^{\theta i}$, on a

$$u = e^{(\alpha \mathrm{L} r - \beta\theta) + (\beta \mathrm{L} r + \alpha\theta) i}.$$

Si la variable z se rapproche de l'origine en décrivant une courbe ayant en ce point une tangente définie par l'argument θ_0, l'argument de la fonction augmente à l'infini en valeur absolue, et le point u décrit autour du point $u = 0$ une spirale composée d'un nombre infini de circonvolutions. Quand le nombre α est positif, le module de la fonction tendant vers zéro, la spirale décrite par le point u se rapproche indéfiniment du point $u = 0$; elle s'en éloigne, au contraire, indéfiniment quand α est négatif, et elle se rapproche d'une circonférence de rayon $e^{-\beta\theta_0}$ lorsque α est nul. En faisant $z = \frac{1}{z'}$, on verra que le point O′ sur la sphère est un point critique de même espèce que le point O; seulement, quand la spirale relative au point O est infiniment petite, celle relative au point O′ est infiniment grande, et réciproquement.

Sinus et cosinus hyperboliques.

64. On désigne sous ce nom les fonctions réelles

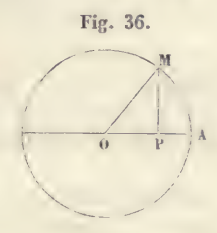
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

a première impaire, la seconde paire, et qui satisfont à la relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

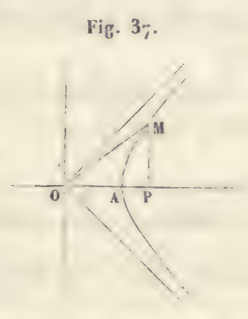
Voici d'où viennent ces dénominations : le sinus et le cosinus ordinaires sont les longueurs MP et OP (*fig.* 36), la variable x désignant

Fig. 36.



l'arc AM dans le cercle dont le rayon est égal à 1, ou le double de l'aire du secteur AOM. Il est facile de voir que, si au cercle on substitue une hyperbole équilatère ayant son demi-axe transverse OA (*fig.* 37) égal

Fig. 37.



à l'unité, et si l'on appelle x le double de l'aire du secteur AOM, les longueurs MP et OP représentent le sinus et le cosinus hyperboliques.

Ces deux fonctions jouissent des propriétés fondamentales

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a,$$
$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \cosh b.$$

On a construit des tables de ces fonctions; elles servent à trouver les valeurs de $\sin z$ et de $\cos z$, lorsque z est imaginaire; car on a (n° 56)

$$\cos yi = \cosh y, \quad \sin yi = i \sinh y,$$
$$\cos(x+yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$
$$\sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

65. *Remarque*. — La fonction $u = \cos z$ donne naissance à un système

de lignes orthogonales bien connu. Si l'on pose $z=x+yi$, $u=X+Yi$, on a

$$X+Yi=\frac{e^{-y+xi}+e^{y-xi}}{2};$$

d'où

$$X=\cos x\cosh y,\quad Y=-\sin x\sinh y.$$

En éliminant successivement x et y, on obtient les courbes

$$\frac{X^2}{\cosh^2 y}+\frac{Y^2}{\sinh^2 y}=1,$$

$$\frac{X^2}{\cos^2 x}-\frac{Y^2}{\sin^2 x}=1,$$

qui correspondent, les premières aux droites parallèles à l'axe des x, les secondes aux droites parallèles à l'axe des y; ce sont des ellipses et des hyperboles homofocales.

La fonction $u=\operatorname{tang} z$ donne naissance à un autre système de lignes orthogonales. On a, en effet, dans ce cas,

$$X=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\cosh 2y},\quad Y=\frac{\sinh 2y}{\cos 2x+\cosh 2y}.$$

En éliminant successivement y et x, on obtient les deux séries de lignes orthogonales

$$X^2+Y^2+2X\cot 2x-1=0,$$

$$X^2+Y^2-2Y\coth 2y+1=0.$$

Les premières sont des cercles passant par deux points fixes, les secondes des cercles ayant pour axe radical commun la perpendiculaire à la droite qui joint les deux points fixes en son milieu. Chacun de ces seconds cercles est le lieu du point dont le rapport des distances aux deux points fixes est constant et égal à une quantité dépendant de la valeur de y.

CHAPITRE III.

LA FONCTION Θ.

66. Au début de leurs admirables travaux sur les fonctions elliptiques, Abel et Jacobi ont été amenés à considérer une fonction nouvelle qui joue un rôle très-important dans l'analyse; mais c'est à Jacobi que l'on doit la découverte de ses principales propriétés.

Théorème I. — *La série*

$$\ldots + e^{-3z+3^2a} + e^{-2z+2^2a} + e^{-z+a} + 1 + e^{z+a} + e^{2z+2^2a} + e^{3z+3^2a} + \ldots,$$

dans laquelle a désigne une quantité constante dont la partie réelle est négative, est convergente.

En effet, le terme de rang n, à partir du terme 1 vers la droite, est

$$u_n = e^{nz+n^2a};$$

si l'on pose $a = a' + a''i$, $z = x + yi$, son module est

$$\text{mod.}\, u_n = e^{nx+n^2a'};$$

le nombre

$$\sqrt[n]{\text{mod.}\, u_n} = e^{x+na'}$$

tendant vers zéro, quand n augmente indéfiniment, la série, prolongée vers la droite, est convergente.

Le terme de rang n, à partir du terme 1 vers la gauche, est de même

$$u_{-n} = e^{-nz+n^2a};$$

le nombre

$$\sqrt[n]{\text{mod.}\, u_{-n}} = e^{-x+na'}$$

tendant vers zéro, la série, prolongée vers la gauche, est aussi conver-

gente. Ainsi, lorsque la partie réelle a' de la constante a est négative, la série est convergente quelle que soit z; cette série définit donc une fonction de z finie et monotrope dans toute l'étendue du plan. Nous la désignerons par $\Theta(z)$, et nous écrirons

$$(1) \qquad \Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{nz+n^2a}.$$

Séries à double entrée.

67. Pour démontrer que la fonction $\Theta(z)$ est continue et admet une dérivée, nous nous servirons d'une propriété générale des séries à double entrée. On dit qu'une série à double entrée est convergente lorsque la somme des termes enveloppés par une courbe de forme quelconque tend vers une limite déterminée, quand cette courbe s'étend à l'infini dans tous les sens.

Lemme I. — *Lorsqu'une série à double entrée, à termes réels et positifs, est convergente pour une première suite de courbes qui s'étendent à l'infini dans tous les sens, elle l'est aussi pour une autre suite de courbes, et la limite est la même.*

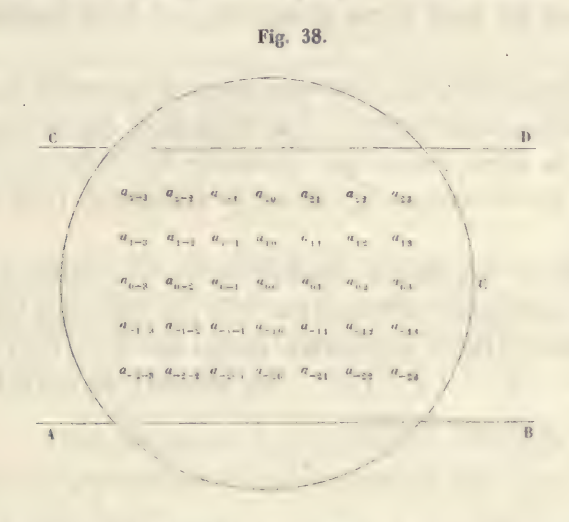
Une série à double entrée est représentée par la *fig.* 38. Soient C_0, C_1, $C_2, \ldots$ une première suite de courbes fermées s'étendant à l'infini dans tous les sens, c'est-à-dire telles que l'on puisse prendre n assez grand pour que la courbe C_n et chacune des suivantes C_{n+1}, $C_{n+2}, \ldots$ soient extérieures à un cercle décrit de l'origine comme centre avec un rayon donné; appelons S_n la somme des termes enveloppés par la courbe C_n; nous supposons que, lorsque n augmente indéfiniment, la somme S_n tend vers une limite S. Soient C'_0, C'_1, $C'_2, \ldots$ une seconde suite de courbes fermées s'étendant aussi à l'infini dans tous les sens, et désignons par $S'_{n'}$ la somme des termes enveloppés par la courbe $C'_{n'}$. Une courbe C_n de la première suite étant donnée, traçons une courbe $C'_{n'}$ de la seconde suite enveloppant la courbe C_n, puis une nouvelle courbe C_{n+p} de la première suite enveloppant $C'_{n'}$; on a

$$S_n < S'_{n'} < S_{n+p}.$$

Quand n augmente à l'infini, les deux sommes S_n et S_{n+p} tendant vers la limite S, la somme $S'_{n'}$ tend vers la même limite.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les deux courbes variables C, C′ étaient fermées. Le théorème subsiste quand l'une des courbes ou toutes les deux sont ouvertes. Supposons d'abord la courbe C fermée et la courbe C′ ouverte, comme une parabole, ou l'ensemble de deux droites parallèles AB, CD situées de part et d'autre du terme central a_{00};

Fig. 38.



la partie du tableau intérieure à la ligne C′ est celle dans laquelle se trouve ce terme central a_{00}. Une ligne $C'_{n'}$ étant donnée, fermons-la par des arcs de courbe arbitraires et traçons une courbe C_m qui enveloppe la partie du plan ainsi déterminée; la somme des termes situés dans cette partie du plan est plus petite que S_m, et par conséquent plus petite que S; si l'on éloigne indéfiniment les arcs qui ferment la courbe $C'_{n'}$, la somme tend vers une limite $S'_{n'}$ plus petite que S; cette limite étant indépendante des arcs auxiliaires, nous dirons qu'elle est la somme des termes situés à l'intérieur de la courbe $C'_{n'}$. Cela posé, une courbe C_n étant donnée, traçons une ligne $C'_{n'}$ extérieure à la courbe C_n, la somme S'_n étant plus grande que S_n, on aura

$$S_n < S'_{n'} < S;$$

ainsi, quand n' augmente à l'infini, $S'_{n'}$ tend vers une limite égale à S.

Considérons maintenant le cas où la première courbe C est ouverte,

la seconde C′ fermée. Nous supposons d'abord que la somme des termes enveloppés par la courbe C_n et des arcs arbitraires tend vers une limite S_n, quand ces arcs s'éloignent à l'infini; nous supposons ensuite que la somme S_n tend vers une limite S, quand n augmente à l'infini. Une courbe $C'_{n'}$ étant donnée, traçons une ligne C_m extérieure à cette courbe; la somme $S'_{n'}$, étant plus petite que S_m et par conséquent que S, tend vers une limite S′ quand n' augmente à l'infini. D'après ce que nous avons dit dans le cas précédent, les deux limites S et S′ sont les mêmes.

Enfin, si la courbe C′ était ouverte comme la courbe C, on prendrait une courbe fermée auxiliaire C″. En vertu de ce qui précède, la somme $S''_{m''}$ tend vers la même limite que la somme S_m, et la somme $S'_{m'}$ vers la même limite que la somme $S''_{m''}$. Donc la somme $S'_{m'}$ tend vers la même limite que S_m.

Corollaire. — On évalue ordinairement la somme des termes du tableau, soit par lignes horizontales, soit par colonnes verticales. Supposons que chaque ligne horizontale forme une série convergente; désignons par $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ les sommes de ces séries linéaires; supposons de plus que la série

$$(1) \qquad \ldots + s_{-2} + s_{-1} + s_0 + s_1 + s_2 + \ldots,$$

formée avec ces différentes sommes, soit convergente; en vertu du théorème précédent, le tableau sera convergent, et l'on obtiendra la même somme si on l'évalue par colonnes verticales. Chaque colonne verticale formera d'abord une série convergente, et si l'on appelle $s'_0, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{-1}, s'_{-2}, \ldots$ les sommes de ces nouvelles séries linéaires, la série

$$(2) \qquad \ldots + s'_{-2} + s'_{-1} + s'_0 + s'_1 + s'_2 + \ldots$$

sera aussi convergente et aura même somme que la série (1).

68. Lemme II. — *Lorsqu'une série à double entrée a tous ses termes positifs et inférieurs ou égaux à ceux d'une autre série à termes positifs que l'on sait être convergente, la série proposée est aussi convergente.*

Soient S_n la somme des termes du premier tableau enveloppés par une courbe C_n, S'_n celle des termes enveloppés par la même courbe dans le second tableau; la somme S_n est plus petite que la somme S'_n, et par

conséquent plus petite que la limite S′; elle tend donc vers une limite S inférieure à S′.

Lemme III. — *Étant donnée une série à double entrée, à termes réels, positifs ou négatifs, lorsque la série que l'on obtient en remplaçant chaque terme par sa valeur absolue est convergente, la série proposée est aussi convergente.*

Soient S'_n la somme des termes enveloppés par une courbe C_n dans le second tableau, S_n celle des termes enveloppés par la même courbe dans le premier tableau; parmi ces termes, les uns sont positifs, les autres négatifs; appelons P_n la somme des premiers, Q_n celle des seconds; on a

$$S_n = P_n - Q_n, \quad S'_n = P_n + Q_n.$$

La somme S'_n tendant vers une limite S′, quand n augmente à l'infini, les deux quantités positives P_n et Q_n, qui vont en augmentant et qui restent inférieures à S′, tendent respectivement vers des limites P et Q; leur différence S_n tend donc vers une limite égale à $P - Q$.

Lemme IV. — *Lorsqu'une série à double entrée, à termes imaginaires, est telle que la série formée par les modules de ses termes est convergente, elle est elle-même convergente.*

Un terme quelconque du tableau est de la forme $a + bi$; son module est $\sqrt{a^2 + b^2}$; on suppose que le tableau des modules est convergent. En vertu des deux lemmes précédents, le tableau formé par les quantités réelles a est convergent, et de même celui qui est formé par les quantités b. Appelons S'_n et S''_n les sommes des termes enveloppés par une courbe C_n dans ces deux derniers tableaux; la somme S_n des termes enveloppés par la même courbe dans le tableau proposé est égale à $S'_n + iS''_n$. Puisque S'_n et S''_n tendent vers des limites respectives S′ et S″, la somme S_n tend vers une limite égale à $S' + iS''$.

Comme application de ces principes, nous pouvons remarquer que les deux séries

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \cdots,$$

$$\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots,$$

dans lesquelles la quantité q a un module inférieur à 1, représentant un même tableau, évalué par lignes horizontales ou par colonnes verticales, ont la même somme.

On a de même

$$\frac{1}{1-q}-\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^2}{1-q^5}-\ldots=\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\ldots,$$

$$\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\ldots=\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\ldots,$$

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^6}+\frac{5q^5}{1-q^{10}}+\ldots=\frac{q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3(1+q^6)}{(1-q^6)^2}+\frac{q^5(1+q^{10})}{(1-q^{10})^2}+\ldots,$$

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}-\frac{\sqrt{q^3}}{3(1+q^3)}+\frac{\sqrt{q^5}}{5(1+q^5)}-\ldots=\operatorname{arctang}\sqrt{q}-\operatorname{arctang}\sqrt{q^3}+\operatorname{arctang}\sqrt{q^5}-\ldots$$

69. Théorème II. — *La fonction $\Theta(z)$ est holomorphe dans toute l'étendue du plan.*

Nous avons défini la fonction $\Theta(z)$ par la série

$$\ldots+e^{-2z+2^2a}+e^{-z+a}+1+e^{z+a}+e^{2z+2^2a}+e^{3z+3^2a}+\ldots.$$

Si l'on remplace chaque exponentielle e^{nz} par la série linéaire qu'elle représente, on a une série à double entrée

$$\begin{array}{l}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{2^2a}+\frac{2z}{1}e^{2^2a}+\frac{2^2z^2}{1.2}e^{2^2a}+\ldots\\
e^{a}+\frac{z}{1}e^{a}+\frac{z^2}{1.2}e^{a}+\ldots\\
1+0+0+\ldots\\
e^{a}-\frac{z}{1}e^{a}+\frac{z^2}{1.2}e^{a}-\ldots\\
e^{2^2a}-\frac{2z}{1}e^{2^2a}+\frac{2^2z^2}{1.2}e^{2^2a}-\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Concevons que l'on remplace chaque terme par son module; les lignes horizontales étant convergentes et, de plus, la série

$$\ldots+e^{-2\rho+2^2a'}+e^{-\rho+a'}+1+e^{\rho+a'}+e^{2\rho+2^2a'}+\ldots,$$

formée par les sommes de ces diverses séries linéaires, étant elle-même convergente, on conclut, d'après le premier lemme, que le tableau des modules est convergent. En vertu du lemme IV, le tableau proposé est aussi convergent; on peut l'évaluer par lignes verticales; la fonction $\Theta(z)$ sera alors représentée par une série

$$\Theta(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de la variable z, et convergente quel que soit z. On en conclut que la fonction monotrope $\Theta(z)$ est continue et admet une dérivée, en un mot qu'elle est *holomorphe* dans toute l'étendue du plan (Livre II, Chapitre I). Remarquons que les coefficients u_1, $u_3, \ldots$, à indices impairs, sont nuls.

70. Théorème III. — *La fonction $\Theta(z)$ est paire et simplement périodique.*

Remplacer z par $-z$ dans l'expression

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{nz + n^2 a}$$

revient à permuter dans la série les termes qui correspondent à des valeurs de n égales et de signes contraires; on a donc

(2) $$\Theta(-z) = \Theta(z).$$

Chacun des termes de la série étant périodique et admettant la période $2\pi i$, la fonction $\Theta(z)$ est elle-même périodique et admet la même période; on a donc

(3) $$\Theta(z + 2\pi i) = \Theta(z).$$

71. Théorème IV. — *La lettre m désignant un nombre entier quelconque, on a*

(4) $$\Theta(z + 2ma) = e^{-m(z+ma)}\Theta(z).$$

En effet, nous pouvons mettre la fonction $\Theta(z)$ sous la forme

(5) $$\Theta(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{1}{4a}(z+2na)^2}.$$

Si l'on remplace z par $z + 2ma$, on a

$$\Theta(z+2ma) = e^{-\frac{1}{4a}(z+2ma)^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{1}{4a}[z+2(n+m)a]^2},$$

$$\Theta(z+2ma) = e^{-m(z+ma)} e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n'=-\infty}^{n'=+\infty} e^{\frac{1}{4a}(z+2n'a)^2},$$

d'où l'on déduit la relation (4).

En particulier, pour $m = 1$, on a

(6) $$\Theta(z+2a) = e^{-(z+a)}\Theta(z).$$

72. Théorème V. — *La fonction $\Theta(z)$ s'annule pour toutes les valeurs de z comprises dans la formule*

(7) $$z = (2m+1)\pi i + (2m'+1)a,$$

dans laquelle m et m' sont des nombres entiers quelconques.

On a, en adoptant la forme (5), et désignant par m_1 un nombre entier fixe,

$$\Theta(z) = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{1}{4a}[z+2(n-m_1)a]^2} = e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{1}{4a}(z-2na)^2},$$

$$\Theta(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{4a}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ e^{\frac{1}{4a}[z+2(n-m_1)a]^2} + e^{\frac{1}{4a}(z-2na)^2} \right\}.$$

Les deux exponentielles sont égales et de signes contraires, lorsque la différence $(2n-m_1)(z-m_1 a)$ des exposants est un multiple impair de πi; on satisfait à cette condition, quel que soit n, en posant $m_1 = 2m'+1$ et $z - m_1 a = (2m+1)\pi i$; chacun des termes de la dernière somme étant alors nul, la somme est nulle. Ainsi la fonction $\Theta(z)$ s'annule pour chacune des valeurs de z représentées par la formule (7). Nous démontrerons plus tard que ces valeurs sont les seules qui jouissent de cette propriété.

CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Les quatre fonctions θ.

73. Dans le Chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés de la fonction Θ, en la prenant sous sa forme la plus simple. Si l'on remplace z par $\frac{2\pi z i}{\omega}$ et si l'on pose $a = \frac{\pi\omega' i}{\omega}$, on a

$$\Theta\left(\frac{2\pi z i}{\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')}.$$

C'est cette dernière fonction que nous emploierons désormais, et que, pour abréger, nous représenterons par le symbole $\Theta(z)$. Nous poserons en conséquence

$$(a) \qquad \Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')},$$

ou

$$(b) \qquad \Theta(z) = e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega')^2}.$$

La quantité a devant avoir sa partie réelle négative, pour la convergence de la série, il est nécessaire que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ soit imaginaire, et que, si l'on pose $\frac{\omega'}{\omega} = r + si$, le coefficient s soit positif.

Les relations (3), (4), (6) du Chapitre précédent deviennent

$$(1) \qquad \Theta(z+\omega) = \Theta(z),$$

$$(2) \qquad \Theta(z+m\omega') = e^{-\frac{m\pi i}{\omega}(2z+m\omega')}\Theta(z),$$

$$(3) \qquad \Theta(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z).$$

La fonction $\Theta(z)$ est paire; elle admet la période ω, et, quand on remplace z par $z+\omega'$, elle est multipliée par l'exponentielle $e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}$. Elle s'annule pour les valeurs

$$(4)\qquad z=(2m+1)\frac{\omega}{2}+(2m'+1)\frac{\omega'}{2},$$

que l'on déduit de la formule (7) du n° 72.

74. On peut, à l'aide de cette fonction $\Theta(z)$, former d'autres fonctions holomorphes reprenant la même valeur ou une valeur égale et de signe contraire, quand on remplace z par $z+\omega$, et jouissant de la propriété d'être multipliées par l'exponentielle $e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}$ affectée du signe + ou du signe −, quand on remplace z par $z+\omega'$. Considérons, en effet, la fonction

$$\varphi(z)=e^{\beta z}\Theta(z+\alpha).$$

Pour que $\varphi(z+\omega)=\pm\varphi(z)$, il est nécessaire que la constante β soit de la forme $\beta=\frac{b\pi i}{\omega}$, b étant un nombre entier. On a

$$\varphi(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega'+2\alpha-b\omega')}\varphi(z);$$

pour que l'exponentielle ait la valeur voulue, il faut que la constante $2\alpha-b\omega'$ soit de la forme $a\omega$, a étant un nombre entier; d'où $\alpha=a\frac{\omega}{2}+b\frac{\omega'}{2}$. En attribuant aux nombres entiers a et b les deux valeurs 0 et 1, nous obtiendrons quatre fonctions holomorphes, que nous désignerons par des signes particuliers; les autres valeurs donneraient les mêmes fonctions multipliées par des facteurs constants. Nous poserons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\theta_3(z)=\Theta(z),\\
&\theta(z)=\Theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right),\\
&\theta_2(z)=e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right),\\
&\theta_1(z)=\frac{1}{i}e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}\Theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

See note on different notation pg 125 Appell [illegible]

En adoptant la forme (a), on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')},\\
\theta(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')},\\
\theta_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\omega'\right]},\\
\theta_1(z) &= \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega}\left[(2n+1)z+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\omega'\right]}.
\end{aligned}\right.$$

La forme (b) donne

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta_3(z) &= e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega')^2},\\
\theta(z) &= e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega')^2},\\
\theta_2(z) &= e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}\left[z+(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]^2},\\
\theta_1(z) &= \frac{1}{i} e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n e^{\frac{\pi i}{\omega\omega'}\left[z+(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]^2}.
\end{aligned}\right.$$

Si, dans les séries (6), on groupe deux à deux les termes qui correspondent à des valeurs de n ou de $2n+1$ égales et de signes contraires, et si l'on pose $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, on obtient les séries

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta_3(z) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega},\\
\theta(z) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega},\\
\theta_2(z) &= 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi z}{\omega},\\
\theta_1(z) &= 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi z}{\omega}.
\end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules montrent que les trois fonctions $\theta_3(z)$, $\theta(z)$, $\theta_2(z)$ sont paires, et que $\theta_1(z)$ est impaire. D'après les formules (5), qui définissent les fonctions θ, et la formule (4), les zéros de ces quatre fonctions sont

$$(9)\quad \begin{cases} \text{zéros de } \theta_3(z), & z = \dfrac{\omega+\omega'}{2} + (m\omega + m'\omega'),\\[2mm] \text{zéros de } \theta(z), & z = \dfrac{\omega'}{2} + (m\omega + m'\omega'),\\[2mm] \text{zéros de } \theta_2(z), & z = \dfrac{\omega}{2} + (m\omega + m'\omega'),\\[2mm] \text{zéros de } \theta_1(z), & z = m\omega + m'\omega'. \end{cases}$$

75. Il résulte des considérations précédentes sur la formation de la fonction $\varphi(z)$ que l'on a

$$(10)\quad \begin{cases} \theta_3(z+\omega) = \theta_3(z),\\ \theta(z+\omega) = \theta(z),\\ \theta_2(z+\omega) = -\theta_2(z),\\ \theta_1(z+\omega) = -\theta_1(z); \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \theta_3(z+\omega') = \dfrac{1}{q}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\theta_3(z),\\[2mm] \theta(z+\omega') = -\dfrac{1}{q}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\theta(z),\\[2mm] \theta_2(z+\omega') = \dfrac{1}{q}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\theta_2(z),\\[2mm] \theta_1(z+\omega') = -\dfrac{1}{q}e^{-\frac{2\pi z i}{\omega}}\theta_1(z). \end{cases}$$

On a plus généralement, en vertu des formules (7),

$$(12)\quad \begin{cases} \theta_3(z+m\omega') = q^{-m^2}e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}\theta_3(z),\\[2mm] \theta(z+m\omega') = (-1)^m q^{-m^2}e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}\theta(z),\\[2mm] \theta_2(z+m\omega') = q^{-m^2}e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}\theta_2(z),\\[2mm] \theta_1(z+m\omega') = (-1)^m q^{-m^2}e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}\theta_1(z). \end{cases}$$

Ces dernières formules renferment le facteur

$$q^{-m^2}e^{-\frac{2m\pi zi}{\omega}} = e^{-\frac{m\pi i}{\omega}(2z+m\omega')},$$

dont le module devient infiniment grand, quand le nombre entier m augmente à l'infini en valeur absolue. On en conclut que les quatre fonctions θ deviennent elles-mêmes infiniment grandes.

Des formules (5) et (7) on déduit aussi

$$(13)\quad \begin{cases} \theta_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \theta(z), \\ \theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \theta_3(z), \\ \theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = -\theta_1(z), \\ \theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \theta_2(z); \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_2(z), \\ \theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_3(z), \\ \theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_1(z), \\ \theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta(z); \end{cases}$$

et par suite

$$(15)\quad \begin{cases} \theta_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_1(z), \\ \theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_3(z), \\ \theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta_2(z), \\ \theta_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{-i}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi zi}{\omega}}\theta(z). \end{cases}$$

Les trois fonctions elliptiques.

76. Il est aisé de reconnaître que les rapports des quatre fonctions θ deux à deux sont des fonctions méromorphes doublement périodiques. Ces rapports sont au nombre de douze; mais il suffit de considérer trois d'entre eux, les rapports de trois des fonctions θ à la quatrième, par exemple $\frac{\theta_1}{\theta}, \frac{\theta_2}{\theta}, \frac{\theta_3}{\theta}$; les autres seront les réciproques de ceux-là, et leurs quotients deux à deux. On obtient ainsi les trois fonctions auxquelles on a donné le nom de *fonctions elliptiques*, et que nous désignerons par les symboles λ, μ, ν, savoir :

$$(16) \qquad \lambda(z) = \mathrm{A}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}, \quad \mu(z) = \mathrm{B}\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)}, \quad \nu(z) = \mathrm{C}\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}.$$

La première fonction est impaire, les deux autres sont paires. Elles deviennent toutes trois infinies pour les valeurs de z qui annulent le dénominateur; chacune d'elles s'annule en même temps que son numérateur. On détermine les constantes A, B, C de manière que $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$, $\mu(0) = 1$, $\nu(0) = 1$; il en résulte

$$\mathrm{A} = \frac{\theta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}, \quad \mathrm{B} = \frac{\theta(0)}{\theta_2(0)}, \quad \mathrm{C} = \frac{\theta(0)}{\theta_3(0)}.$$

Ces trois constantes dépendent de deux rapports; nous poserons

$$(17) \qquad \sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta(0)}{\theta_3(0)},$$

et nous aurons

$$(18) \qquad \lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}, \quad \mu(z) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)}, \quad \nu(z) = \sqrt{k'}\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)}.$$

(a). *La fonction* λ. — D'après les relations (10), on a

$$\lambda(z + \omega) = -\lambda(z),$$

et par suite

$$\lambda(z + 2\omega) = \lambda(z),$$

et, d'après les relations (11),

$$\lambda(z + \omega') = \lambda(z).$$

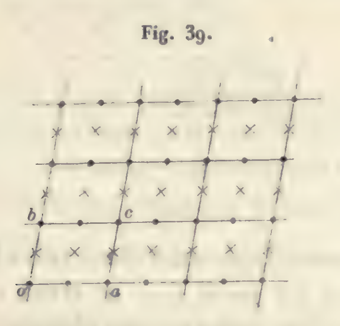
Ainsi la fonction $\lambda(z)$ admet les deux périodes 2ω, ω', et l'on a, d'une manière générale,

$$\lambda(z + 2m\omega + m'\omega') = \lambda(z),$$

m et m' étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Nous appellerons *points homologues* les points compris dans la formule $z + 2m\omega + m'\omega'$; par exemple, les points $2m\omega + m'\omega'$ sont homologues de l'origine.

Voici comment on peut représenter cette double périodicité. Dans le plan sur lequel est figurée la variable z, marquons, d'une part, les points 2ω, 4ω,... (*fig.* 39); d'autre part, les points ω', $2\omega'$,.... Les pre-

Fig. 39.



miers sont situés sur une droite oa et à égale distance les uns des autres, et de même les seconds sur une droite ob; par les premiers points menons des parallèles à ob, et par les seconds points des parallèles à oa; ces deux séries de parallèles divisent le plan en parallélogrammes égaux, et leurs points d'intersection sont les points $2m\omega + m'\omega'$ homologues de l'origine. La double périodicité consiste en ce que la fonction reprend la même valeur aux points homologues de ces divers parallélogrammes. Les zéros et les infinis de la fonction sont distribués uniformément dans le plan; nous avons indiqué les zéros par des points

ronds, les infinis ou les pôles par de petites croix. Il y a deux zéros et deux infinis dans chaque parallélogramme; par exemple, le parallélogramme *oacb* renferme les deux zéros o, ω, et les deux infinis $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega'}{2}+\omega$.

La fonction impaire $\lambda(z)$ présente une grande analogie avec la fonction $\sin\frac{\pi z}{\omega}$, par rapport à la période 2ω.

(*b*). *La fonction* μ. — D'après les relations (10) et (11), on a

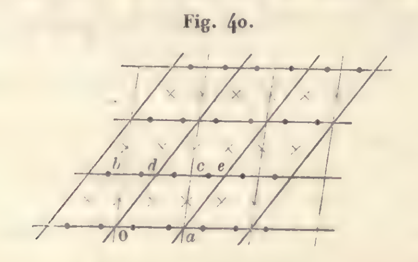
$$\mu(z+\omega)=-\mu(z),\quad \mu(z+\omega')=-\mu(z),$$

et par suite

$$\mu(z+2\omega)=\mu(z),\quad \mu(z+\omega+\omega')=\mu(z).$$

La fonction admet les deux périodes 2ω, $\omega+\omega'$. Le parallélogramme O*aed* (*fig.* 40), relatif à cette seconde fonction, a un côté

Fig. 40.



commun O*a* avec le parallélogramme O*acb* relatif à la fonction λ; l'autre côté O*d* joint l'origine au point $\omega+\omega'$ situé au milieu de *bc*. Il y a encore deux zéros et deux infinis dans chaque parallélogramme; par exemple, le parallélogramme O*aed* renferme les deux zéros $\frac{\omega}{2}$, $\frac{3\omega}{2}$ et les deux infinis $\frac{\omega'}{2}+\omega$, $\frac{\omega'}{2}+2\omega$.

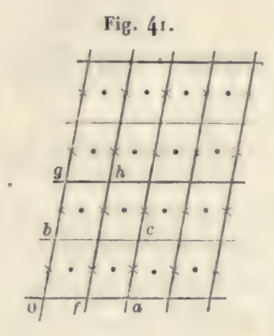
La fonction paire $\mu(z)$ présente une grande analogie avec la fonction $\cos\frac{\pi z}{\omega}$, par rapport à la période 2ω.

(*c*). *La fonction* ν. — Puisque $\nu(z+\omega)=\nu(z)$, $\nu(z+\omega')=-\nu(z)$, et par suite $\nu(z+2\omega')=\nu(z)$, la fonction admet les deux périodes ω,

$2\omega'$. Le parallélogramme $Ofhg$ (*fig.* 41), relatif à cette troisième fonction, a son côté Of moitié de Oa et son côté Og double de Ob. Il y a encore deux zéros et deux infinis dans chaque parallélogramme; par exemple, le parallélogramme $Ofhg$ renferme les deux zéros $\frac{\omega+\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}+\omega'$, et les deux infinis $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{3\omega'}{2}$. Les parallélogrammes $Oacb$, $Oaed$, $Ofhg$, relatifs aux trois fonctions elliptiques λ, μ, ν, ont des aires égales.

Il n'est pas nécessaire que les parallélogrammes aient leurs côtés rectilignes. En ce qui concerne la fonction λ, concevons que les points O

Fig. 41.



et a soient joints par une ligne quelconque, et de même les points O et b; que l'on remplace tous les côtés parallèles à Oa par des lignes égales à la ligne Oa, tous les côtés parallèles à Ob par des lignes égales à la ligne Ob; nous formerons ainsi un réseau jouissant des mêmes propriétés que le premier.

Relations entre les fonctions elliptiques.

77. Des relations (13), (14), (15) entre les fonctions θ, on déduit les relations suivantes entre les fonctions elliptiques :

$$(19)\quad \begin{cases} \lambda\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)} = \frac{\mu(z)}{\nu(z)}, \\ \mu\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = -\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\theta_1(z)}{\theta_3(z)} = -k'\frac{\lambda(z)}{\nu(z)}, \\ \nu\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{k'}\frac{\theta(z)}{\theta_3(z)} = k'\frac{1}{\nu(z)}; \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} \lambda\left(z+\dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\theta(z)}{\theta_1(z)} = \dfrac{1}{k\lambda(z)}, \\ \mu\left(z+\dfrac{\omega'}{2}\right) = -i\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\dfrac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)} = \dfrac{-i}{k}\dfrac{\nu(z)}{\lambda(z)}, \\ \nu\left(z+\dfrac{\omega'}{2}\right) = -i\sqrt{k'}\dfrac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)} = -i\dfrac{\mu(z)}{\lambda(z)}; \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\theta_3(z)}{\theta_2(z)} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\nu(z)}{\mu(z)}, \\ \mu\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = -i\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\dfrac{\theta(z)}{\theta_2(z)} = \dfrac{-ik'}{k}\dfrac{1}{\mu(z)}, \\ \nu\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = i\sqrt{k'}\dfrac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)} = ik'\dfrac{\lambda(z)}{\mu(z)}. \end{cases}$$

En faisant $z = 0$ dans les relations précédentes, on a

$$(22)\qquad \nu\left(\frac{\omega}{2}\right) = k', \quad \lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \quad \mu\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{-ik'}{k}.$$

Les constantes

$$(23)\qquad \theta_3(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}, \quad \theta(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2}, \quad \theta_2(0) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

dont on obtient les valeurs en faisant $z = 0$ dans les séries (8), ne dépendent que de la quantité $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$, et par conséquent du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des périodes. Il en est de même des constantes k et k' définies par les formules (17).

Telles sont les propriétés les plus simples des fonctions elliptiques. Nous compléterons cette étude quand nous aurons établi les théorèmes généraux qui nous sont nécessaires.

LIVRE III.

LES INTÉGRALES DÉFINIES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

78. La considération des intégrales définies, quand la variable passe par une suite de valeurs imaginaires, est due à Cauchy (*Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, 1825. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1846). Elle marque l'un des plus grands progrès de l'Analyse mathématique; elle constitue, comme nous le verrons, une méthode féconde pour l'étude des propriétés des fonctions.

Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction continue, quand la variable z décrit une certaine courbe $z_0 Z$ (fig. 42); si l'on prend sur la courbe des points intermédiaires $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, la somme*

$$(1) \qquad f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

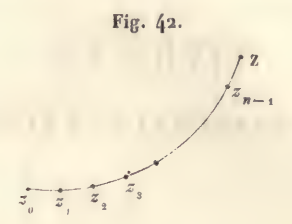
tend vers une limite déterminée, quand on augmente indéfiniment le nombre des points de division, de manière que chacun des arcs tende vers zéro.

Le point $z = x + yi$ décrivant la courbe $z_0 Z$, on peut regarder x et y comme des fonctions continues $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ d'une variable réelle t croissant de t_0 à T; de cette manière, la variable imaginaire z est une fonction de la variable réelle t,

$$z = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) = \varphi(t).$$

Nous supposerons que chacune des fonctions réelles $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ admet une dérivée. Pour fixer les idées, on pourra prendre pour variable réelle

Fig. 42.



auxiliaire t la longueur de l'arc de courbe comptée à partir du point z_0; les dérivées $\varphi'_1(t)$, $\varphi'_2(t)$ désigneront alors les cosinus des angles que la tangente à la courbe fait avec les axes Ox et Oy. Appelons t_1, $t_2, \ldots, t_{n-1}$ les valeurs de t qui correspondent aux différents points de division marqués sur la courbe. Les fonctions $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ ayant des dérivées, on a

$$\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + \varepsilon'_0],$$
$$\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_2(t_0) + \varepsilon''_0],$$

ε'_0 et ε''_0 tendant vers zéro en même temps que $t_1 - t_0$. On en déduit

$$z_1 - z_0 = \varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) + i[\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0)]$$
$$= (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + i\varphi'_2(t_0) + \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0] = (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0) + \varepsilon_0],$$

ε_0 étant une quantité imaginaire, qui tend vers zéro avec $t_1 - t_0$. On a de même

$$z_2 - z_1 = (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + \varepsilon_1],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$Z - z_{n-1} = (T - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}],$$

les quantités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ tendant respectivement vers zéro avec les différences $t_2 - t_1, \ldots, T - t_{n-1}$. La somme (1) devient ainsi

$$[f(z_0)\varphi'(t_0)(t_1 - t_0) + f(z_1)\varphi'(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + f(z_{n-1})\varphi'(t_{n-1})(T - t_{n-1})]$$
$$+ [f(z_0)\varepsilon_0(t_1 - t_0) + f(z_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1) + \ldots + f(z_{n-1})\varepsilon_{n-1}(T - t_{n-1})].$$

Nous remarquons d'abord que la seconde partie a pour limite zéro; car, si l'on appelle M le maximum du module de la fonction $f(z)$ sur la courbe $z_0 Z$, et ε le plus grand module des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, le

module de cette parenthèse est moindre que $M\varepsilon(T - t_0)$. Quant à la première partie, si l'on pose

$$f(z)\varphi'(t) = \psi(t) + i\chi(t),$$

elle se décompose en deux

$$\begin{gathered}[\psi(t_0)(t_1 - t_0) + \psi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \psi(t_{n-1})(T - t_{n-1})] \\ + i[\chi(t_0)(t_1 - t_0) + \chi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \chi(t_{n-1})(T - t_{n-1})],\end{gathered}$$

l'une réelle, l'autre imaginaire, et les deux sommes placées entre parenthèses ont respectivement pour limites les intégrales définies réelles

$$\int_{t_0}^{T} \psi(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{T} \chi(t)\,dt.$$

La somme (1) tend donc vers la limite

$$\int_{t_0}^{T} \psi(t)\,dt + i\int_{t_0}^{T} \chi(t)\,dt;$$

cette limite est ce qu'on appelle l'intégrale définie

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz,$$

prise le long de la courbe $z_0 Z$.

79. Corollaire I. — D'après ce que nous venons de dire, on a

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{T} [\psi(t) + i\chi(t)]\,dt = \int_{t_0}^{T} f(z)\varphi'(t)\,dt.$$

Corollaire II. — Si l'on appelle $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ les longueurs des cordes qui sous-tendent les arcs $z_0 z_1, z_1 z_2, \ldots, z_{n-1} Z$, et l la longueur de la courbe $z_0 Z$, le module de la somme (1) est plus petit que

$$M(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}) < Ml;$$

on a donc

$$(3) \qquad \text{mod.} \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz < Ml.$$

80. Théorème II. — *Si l'on change de variable en posant $z = \varphi(z')$, on a*

$$(4) \qquad \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z'_0}^{Z'} f(z)\varphi'(z')\,dz'.$$

On suppose que la fonction $\varphi(z')$ est continue quand la variable z' décrit une certaine courbe $z'_0 Z'$, et que, de plus, elle admet une dérivée $\varphi'(z')$; la variable z décrit une courbe correspondante $z_0 Z$; les intégrales définies sont prises suivant ces deux courbes. On a

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= (z'_1 - z'_0)[\varphi'(z'_0) + \varepsilon_0], \\ z_2 - z_1 &= (z'_2 - z'_1)[\varphi'(z'_1) + \varepsilon_1], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z - z_{n-1} &= (Z' - z'_{n-1})[\varphi'(z'_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}], \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1}) \\ &\quad = [f(z_0)\varphi'(z'_0)(z'_1 - z'_0) + f(z_1)\varphi'(z'_1)(z'_2 - z'_1) + \ldots + f(z_{n-1})\varphi'(z'_{n-1})(Z' - z'_{n-1})] \\ &\quad + [f(z_0)\varepsilon_0(z'_1 - z'_0) + f(z_1)\varepsilon_1(z'_2 - z'_1) + \ldots + f(z_{n-1})\varepsilon_{n-1}(Z' - z'_{n-1})]. \end{aligned}$$

Si, comme précédemment, on appelle M le maximum du module de $f(z)$, ε le plus grand module des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$; si l'on désigne par $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ les cordes qui sous-tendent les arcs $z'_0 z'_1$, $z'_1 z'_2, \ldots$, $z'_{n-1} Z'$, et par l' la longueur de la courbe $z'_0 Z'$, le module de la seconde partie est moindre que

$$M\varepsilon(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}) < M\varepsilon l';$$

cette seconde partie tend donc vers zéro; on en conclut que les deux intégrales sont égales.

Corollaire. — *Si, lorsque la variable z décrit la courbe $z_0 Z$, la fonction $F(z)$ est continue et admet pour dérivée $f(z)$, on a*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

l'intégrale étant prise le long de cette courbe.

Posons $u = F(z)$; quand la variable z décrit la courbe $z_0 Z$, la va-

riable u décrit une courbe correspondante $u_0 U$, et, en vertu du théorème précédent, on a

$$\int_{u_0}^{U} du = \int_{z_0}^{Z} F'(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Si l'on désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ une série de points intermédiaires sur la courbe $u_0 U$, la première intégrale est la limite de la somme

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (U - u_{n-1});$$

mais cette somme est égale à $U - u_0$; on en conclut que l'intégrale définie est égale à $U - u_0$, c'est-à-dire à $F(Z) - F(z_0)$.

81. Théorème III. — *Si la fonction $f(z)$ peut se développer en une série*

$$f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

dont tous les termes soient des fonctions continues de z quand cette variable décrit la courbe $z_0 Z$, convergente en tous les points de cette courbe, et telle que l'on puisse prendre n assez grand pour que, en chacun de ces points, le module de la somme

$$u_n + u_{n+1} + \ldots$$

soit moindre qu'un nombre donné α, on a

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{Z} u_1\,dz + \ldots,$$

toutes les intégrales étant prises le long de la courbe $z_0 Z$.

Désignons en effet par S_n la somme des n premiers termes de la dernière série, par $\varphi(z)$ la somme $u_n + u_{n+1} + \ldots$, et par l la longueur de la courbe, on a

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = S_n + \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)\,dz;$$

le module de $\varphi(z)$ étant moindre que α, le module de la dernière intégrale est moindre que αl; la somme S_n tend donc vers une limite égale à la première intégrale, quand n augmente indéfiniment.

82. Théorème IV. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, l'intégrale définie*

$$\int f(z)\,dz,$$

relative à une courbe fermée quelconque située dans cette partie du plan, est nulle.

Nous entendons par ces mots — *une partie du plan* — une aire continue, c'est-à-dire telle que l'on puisse aller d'un point à un autre sans sortir de l'aire. Si l'aire est limitée par une ligne fermée continue, nous dirons qu'elle est *à contour simple;* si elle est limitée par plusieurs lignes distinctes, nous dirons qu'elle est *à contour complexe.* Par exemple, l'aire d'un cercle est à contour simple; l'aire comprise entre deux circonférences concentriques est à contour complexe.

On peut toujours, à l'aide de transversales ou de *coupures,* transformer un contour complexe en un contour simple.

Dans le cas précédent, concevons que l'on fasse une coupure allant de l'une des deux circonférences à l'autre (*fig.* 43); les deux bords de la coupure sont deux lignes infiniment voisines ab, $a'b'$; l'aire de la couronne est limitée par la ligne fermée continue $abcb'a'c'a$, et l'on a

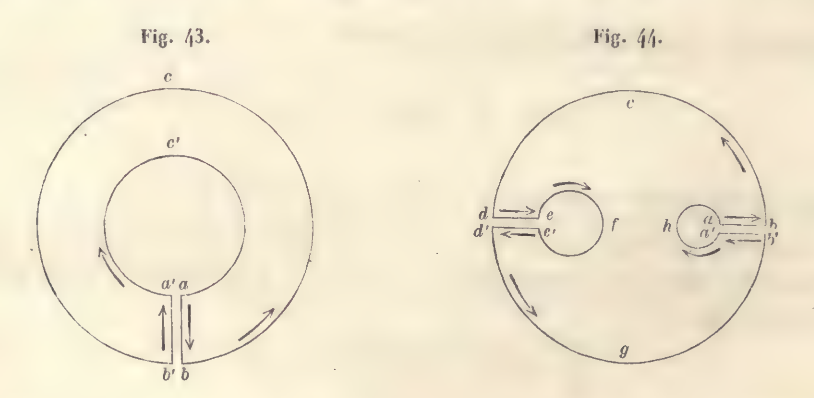


Fig. 43. Fig. 44.

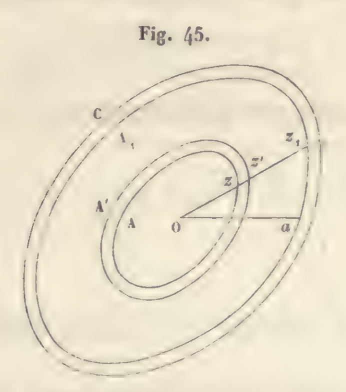
ainsi un contour simple. Considérons de même l'aire que l'on obtient en enlevant d'un cercle deux petits cercles intérieurs (*fig.* 44), aire limitée par trois courbes distinctes; à l'aide de deux coupures, telles

que *ab*, *a′b′* et *de*, *d′e′*, on forme un contour simple *abcdefe′d′gb′a′ha* enveloppant l'aire.

Les théorèmes des n°s 20, 21, 22 s'appliquent à une aire limitée par une ligne fermée continue, et l'on suppose que cette ligne est décrite dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel, qu'un observateur ait toujours à sa gauche l'aire enveloppée. Dans les figures précédentes, les flèches indiquent le sens du mouvement.

Désignons d'une manière générale par C le contour simple qui enveloppe l'aire dans laquelle la fonction $f(z)$ est holomorphe; quand la variable z se meut dans cette partie du plan, le point mobile est astreint à ne pas franchir le contour et, par conséquent, à ne traverser aucune des coupures, s'il y en a; toutes les lignes que nous tracerons par la suite seront assujetties à la même condition. Considérons d'abord une courbe fermée A_1, telle qu'aucun des rayons vecteurs qui joignent un point fixe O (correspondant à $z = z_0$) aux différents points de la courbe ne rencontre le contour (*fig.* 45). Pour simplifier, nous remplacerons z

Fig. 45.



par $z_0 + z$, afin que le point O soit l'origine de la nouvelle variable z, et nous représenterons encore par $f(z)$ la fonction proposée.

Nous désignerons spécialement par z_1 la valeur de la variable z, quand elle décrit la courbe A_1, et nous prendrons pour variable réelle auxiliaire t l'arc de la courbe A_1, compté à partir d'un point fixe a, cette variable croissant de zéro à la longueur l de la courbe. On a alors

$$z_1 = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) = \varphi(t),$$

et l'intégrale relative à la courbe fermée A_1 est (79)

$$A_1 = \int f(z_1)\,dz_1 = \int_0^l f(z_1)\varphi'(t)\,dt.$$

La formule

$$z = \alpha z_1 = \alpha\varphi(t),$$

dans laquelle α est un nombre réel et positif variant de zéro à l'unité, peut servir à représenter tous les points de l'aire décrite par le rayon vecteur Oz_1. Quand, t restant constant, α croît de o à 1, le point z décrit la droite Oz_1. Quand, au contraire, α restant constant, t croît de o à l, le point z décrit une courbe A homothétique à A_1 par rapport au centre d'homothétie O. L'intégrale relative à cette courbe A est

$$A = \int f(z)\,dz = \alpha \int_0^l f(z)\varphi'(t)\,dt.$$

Si l'on attribue à α une valeur voisine $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, le point mobile, que nous désignerons ici par z', et qui est défini par la formule

$$z' = \alpha'\varphi(t) = (\alpha + \Delta\alpha)\varphi(t),$$

décrit une courbe A′ voisine de A, et l'intégrale relative à cette courbe A′ est

$$A' = \int f(z')\,dz' = (\alpha + \Delta\alpha)\int_0^l f(z')\varphi'(t)\,dt.$$

On en déduit

$$A' - A = \int_0^l \{\alpha[f(z') - f(z)] + f(z')\Delta\alpha\}\varphi'(t)\,dt.$$

Les deux points z et z', qui appartiennent aux courbes A et A′ et qui correspondent à une même valeur de t, sont situés sur un même rayon Oz_1 et sont très-voisins l'un de l'autre; car on a $z' - z = \Delta\alpha\varphi(t)$. La fonction $f(z)$ n'ayant qu'une valeur en chaque point et variant d'une manière continue, la différence $f(z') - f(z)$ est très-petite et s'annule avec $\Delta\alpha$; on en conclut que la différence $A' - A$ est elle-même très-petite et s'annule avec $\Delta\alpha$. Ainsi l'intégrale relative à la courbe A est une fonction continue de α; nous la désignerons par $\psi(\alpha)$.

Cherchons le rapport de l'accroissement de cette fonction à celui de

la variable, savoir

$$\frac{A' - A}{\Delta\alpha} = \int_0^l \left[\alpha \frac{f(z') - f(z)}{\Delta\alpha} + f(z')\right] \varphi'(t)\,dt.$$

Considérons d'abord le rapport

$$\frac{f(z') - f(z)}{\Delta\alpha} = \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \times \frac{z' - z}{\Delta\alpha}.$$

La fonction $f(z)$, étant holomorphe, admet *une* dérivée $f'(z)$, c'est-à-dire que le rapport $\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$ tend vers une même limite $f'(z)$, quand le point z' se rapproche du point z d'une manière quelconque; on a donc

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z} = f'(z) + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\Delta\alpha$. De la relation $z' - z = \Delta\alpha\varphi(t)$, on déduit

$$\frac{z' - z}{\Delta\alpha} = \varphi(t).$$

On a ainsi

$$\frac{f(z') - f(z)}{\Delta\alpha} = [f'(z) + \varepsilon]\varphi(t),$$

$$\alpha \frac{f(z') - f(z)}{\Delta\alpha} = \alpha\varphi(t)[f'(z) + \varepsilon] = z[f'(z) + \varepsilon].$$

Comme on a, d'autre part,

$$f(z') = f(z) + \varepsilon',$$

ε' tendant aussi vers zéro avec $\Delta\alpha$, on obtient l'expression

$$\alpha \frac{f(z') - f(z)}{\Delta\alpha} + f(z') = [zf'(z) + f(z)] + (z\varepsilon + \varepsilon') = F'(z) + \varepsilon'',$$

en représentant par $F(z)$ la fonction holomorphe $zf(z)$, et posant $\varepsilon'' = z\varepsilon + \varepsilon'$, et l'on a

$$(5) \qquad \frac{A' - A}{\Delta\alpha} = \int_0^l [F'(z) + \varepsilon'']\varphi'(t)\,dt.$$

Quand le point z décrit la courbe fermée A, le point $u = F(z)$ décrit une courbe fermée correspondante; l'intégrale $\int du$, relative à cette dernière courbe, étant égale à la différence des valeurs de u aux deux

limites, est nulle; mais cette intégrale, d'après le théorème II, est égale à l'intégrale $\int F'(z)\,dz$ relative à la courbe A, c'est-à-dire à $\alpha\int_0^l F'(z)\varphi'(t)\,dt$; cette dernière intégrale est donc nulle et l'équation (5) se réduit à

$$(6)\qquad \frac{A'-A}{\Delta\alpha} = \int_0^l \varepsilon''\varphi'(t)\,dt.$$

Si maintenant on fait tendre $\Delta\alpha$ vers zéro, il est clair que le second membre tend aussi vers zéro. Ainsi la fonction $\psi(\alpha)$ de la variable réelle α admet une dérivée $\psi'(\alpha)$ et cette dérivée est nulle.

La dérivée $\psi'(\alpha)$ étant nulle, quand α varie de zéro à l'unité, on en conclut que la fonction $\psi(\alpha)$ est constante; mais, pour une valeur très-petite de α, cette fonction

$$\psi(\alpha) = \alpha\int_0^l f(z)\varphi'(t)\,dt$$

a une valeur très-petite, et elle devient nulle pour $\alpha = 0$; ainsi la fonction $\psi(\alpha)$ est nulle et, par conséquent, l'intégrale proposée, prise le long de la courbe A_1, qui correspond à $\alpha = 1$, est nulle.

Supposons maintenant qu'il soit impossible de trouver un point O tel qu'aucun des rayons vecteurs Oz_1 ne rencontre le contour de l'aire. Lorsque la courbe fermée A_1 ne se coupe pas elle-même, elle enveloppe une portion de l'aire proposée, et l'on peut, à l'aide de transversales, décomposer cette portion d'aire en plusieurs parties limitées par des courbes jouissant de la propriété énoncée. L'intégrale relative à chacune d'elles étant nulle, leur somme est nulle; mais, si toutes les courbes sont décrites dans le sens positif, chaque transversale, étant parcourue deux fois dans des sens contraires, donne dans la somme des intégrales des quantités égales et de signes contraires, et il reste l'intégrale relative à la courbe A_1.

Considérons actuellement une courbe fermée A_1 se coupant elle-même en n points, que nous appellerons des *nœuds*. Lorsque, partant d'un nœud a, on décrit la courbe A_1 dans le sens convenu, on revient à ce nœud avant d'avoir décrit la courbe entière, et l'on peut regarder cette courbe comme la réunion de deux courbes fermées offrant chacune moins de n nœuds, puisque le point a n'est plus un nœud sur ces

dernières. En continuant de la sorte, on décomposera la courbe proposée en une suite de courbes fermées dépourvues de nœuds; l'intégrale relative à chacune d'elles étant nulle, l'intégrale totale est nulle.

Remarque. — Lorsque, en un point quelconque du contour C et aux points intérieurs infiniment voisins, les valeurs de la fonction $f(z)$ diffèrent infiniment peu les unes des autres, on peut appliquer au contour lui-même le théorème précédent; car, dans ce cas, l'intégrale relative à la courbe C diffère infiniment peu de celle relative à une courbe intérieure A_1 infiniment voisine; cette dernière étant nulle, la première l'est aussi.

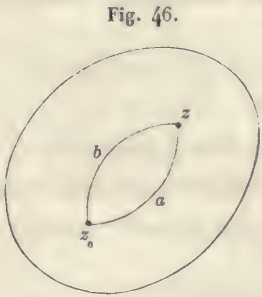
83. Corollaire I. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, les intégrales définies*

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

relatives aux différentes lignes qui vont d'un point z_0 à un autre z dans cette partie du plan, sont égales.

Soient z_0az, z_0bz deux chemins allant du point z_0 au point z (*fig.* 46); l'intégrale relative à la ligne fermée z_0azbz_0 est nulle; mais cette intégrale est la somme de celles qui sont fournies par les deux parties z_0az, zbz_0 de la ligne fermée; cette dernière étant égale et de signe contraire à celle que l'on obtient quand on suit le chemin z_0bz, on en conclut que les intégrales relatives aux deux chemins z_0az, z_0bz sont égales.

Fig. 46.



Corollaire II. — D'après cela, si on laisse fixe le point z_0 et si l'on fait mouvoir le point z dans la partie du plan considérée, l'intégrale définie sera une fonction monotrope de z dans cette étendue. Dési-

gnons-la par $\varphi(z)$. En donnant à la variable deux valeurs voisines z et z' et remplaçant le chemin $z_0 z'$ par le chemin $z_0 z + zz'$, on a

$$\varphi(z') - \varphi(z) = \int_z^{z'} f(\zeta)\, d\zeta;$$

cette dernière intégrale étant infiniment petite, on en conclut que la fonction $\varphi(z)$ est continue. Si l'on observe que $f(\zeta) = f(z) + \varepsilon$, ε étant une quantité infiniment petite, on a

$$\int_z^{z'} f(\zeta)\, d\zeta = f(z)(z'-z) + \int_z^{z'} \varepsilon\, d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\varphi(z') - \varphi(z)}{z'-z} = f(z) + \frac{1}{z'-z}\int_z^{z'} \varepsilon\, d\zeta;$$

en désignant par ε_1 le maximum du module de ε, par l la longueur de la droite zz' et effectuant l'intégration suivant cette droite, on voit que le module du dernier terme est moindre que ε_1; il en résulte que le premier membre tend vers une même limite $f(z)$, quand le point z' se rapproche indéfiniment du point z d'une manière quelconque, et par conséquent que la fonction $\varphi(z)$ admet *une dérivée*. On en conclut que la fonction $\varphi(z)$ est *holomorphe* dans la même partie du plan à contour simple que la fonction proposée $f(z)$.

84. Théorème V. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour complexe, l'intégrale définie*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz,$$

relative à une ligne allant d'un point fixe z_0 à un autre point fixe z_1 dans cette partie du plan, conserve une valeur constante, quand la ligne d'intégration se déforme d'une manière continue, sans rencontrer aucune partie du contour de l'aire.

On peut diviser la courbe d'intégration en arcs assez petits pour que, dans une déformation infiniment petite, l'aire décrite par chacun des arcs fasse partie d'une aire à contour simple comprise dans l'aire proposée. Soient ab l'un de ces arcs, $a'b'$ la nouvelle position qu'il occupe;

les points a et b ont décrit les lignes infiniment petites aa', bb'; en vertu du corollaire I (n° 83), l'intégrale relative à l'arc ab est égale à celle relative au chemin $aa' + a'b' + b'b$. De même l'intégrale relative à l'arc suivant bc est égale à celle relative au chemin $bb' + b'c' + c'c$, et ainsi de suite. L'origine du premier arc, ainsi que l'extrémité du dernier, étant fixes, et chaque transversale, telle que bb', étant parcourue deux fois dans des sens contraires, si l'on ajoute toutes ces égalités membre à membre, on reconnaît que les intégrales suivant les deux courbes voisines sont égales.

Corollaire I. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour complexe, l'intégrale définie*

$$\int f(z)\,dz,$$

relative à une courbe fermée A *située dans cette partie du plan, conserve une valeur constante, quand on déforme cette ligne d'une manière continue, sans rencontrer aucune partie du contour de l'aire.*

Soient A et A′ deux positions de la courbe mobile; un point a de cette courbe a décrit la ligne aa'; les deux lignes A et $aa'\mathrm{A}'a'a$, qui vont du point a au même point a, et qui peuvent se ramener l'une à l'autre sans rencontrer aucune partie du contour, donnant des intégrales égales, et la transversale aa' étant parcourue deux fois dans des sens contraires, les intégrales relatives aux deux courbes fermées A et A′, décrites dans des sens convenables, sont égales.

Corollaire II. — *Lorsque la fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan limitée par deux courbes fermées* C *et* C′ (*fig.* 47), *les intégrales $\int f(z)\,dz$ relatives à ces deux courbes ou à deux courbes infiniment voisines, décrites chacune dans le sens positif par rapport à l'aire qu'elle enveloppe, sont égales.*

Ce corollaire est compris dans le précédent; mais on le démontre directement de la manière suivante. Nous supposerons que sur les deux courbes C et C′ la fonction $f(z)$ satisfait à la condition énoncée dans la remarque du n° 82, sans quoi on les remplacerait par des courbes infiniment voisines et situées dans la portion du plan considérée. A l'aide d'une coupure ab, on peut concevoir cette partie du plan comme enve-

loppée par la ligne fermée $abcdbac'd'a$. D'après let héorème IV, l'intégrale relative à ce contour est nulle. La transversale ab, étant parcourue deux fois dans des sens contraires, donne dans l'intégrale des quantités égales et de signes contraires; on peut en faire abstraction; il reste la courbe C parcourue dans le sens positif et la courbe C′ parcourue dans le sens négatif par rapport à l'aire intérieure à cette courbe. Si chacune des deux courbes fermées est parcourue dans le sens positif par rapport à l'aire intérieure à cette courbe même, les deux intégrales sont égales.

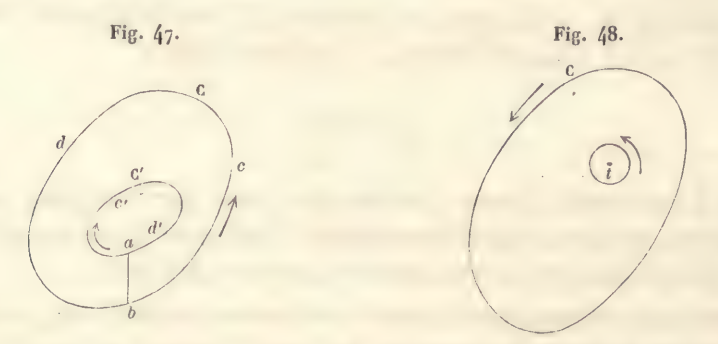


Fig. 47. Fig. 48.

85. Théorème VI. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, si l'on désigne par t un point quelconque situé dans cette partie du plan, on a*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

l'intégrale étant prise, dans le sens positif, sur le contour de l'aire ou sur une courbe intérieure infiniment voisine.

Du point t comme centre (*fig.* 48), avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons un cercle. La fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-t}$$

est holomorphe dans la partie du plan comprise entre la circonférence ρ et la courbe C; d'après le corollaire précédent, les intégrales

$$\int F(z)\,dz,$$

relatives à ces deux courbes, décrites chacune dans le sens positif par rapport à l'aire qu'elle enveloppe, sont égales. Pour évaluer l'intégrale relative à la circonférence, posons

$$z = t + \rho e^{\theta i},$$

d'où

$$dz = i\rho e^{\theta i}\, d\theta,$$

$$\int_{(\rho)} \mathrm{F}(z)\, dz = i \int_0^{2\pi} f(t + \rho e^{\theta i})\, d\theta.$$

La fonction $f(z)$ étant continue, on a

$$f(t + \rho e^{\theta i}) = f(t) + \varepsilon,$$

ε s'annulant avec ρ, et l'intégrale se réduit à

$$2\pi i f(t) + i \int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\theta.$$

Appelons ε_1 le maximum du module de ε sur la circonférence ρ; le module du second terme est moindre que la quantité infiniment petite $2\pi\varepsilon_1$; mais, d'après le même corollaire, l'intégrale relative à la circonférence ρ conserve une valeur constante, quand le rayon tend vers zéro; le second terme est donc rigoureusement nul, et l'on a

$$i \int_0^{2\pi} f(t + \rho e^{\theta i})\, d\theta = 2\pi i f(t).$$

On en déduit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathrm{C})} \frac{f(z)}{z - t}\, dz.$$

86. Théorème VII. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan, sa dérivée est aussi holomorphe dans la même étendue.*

Soit t un point situé dans cette partie du plan; considérons une portion de cette aire, qui soit limitée par un contour simple C et qui comprenne le point t; d'après le théorème précédent, on a

$$(7) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\mathrm{C})} f(z)(z - t)^{-1}\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C. Pour un second point $t+\Delta t$, voisin du premier et situé aussi à l'intérieur de la courbe C, on a de même

$$f(t+\Delta t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t-\Delta t)^{-1}\,dz.$$

On en déduit

$$f(t+\Delta t) - f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)[(z-t-\Delta t)^{-1} - (z-t)^{-1}]\,dz,$$

ou plus simplement

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\Delta(z-t)^{-1}\,dz,$$

et par suite

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\frac{\Delta(z-t)^{-1}}{\Delta t}\,dz.$$

La fonction $(z-t)^{-1}$ de la variable t ayant une dérivée $(z-t)^{-2}$, on peut écrire

$$\frac{\Delta(z-t)^{-1}}{\Delta t} = (z-t)^{-2} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec Δt. Il en résulte

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t)^{-2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,\varepsilon\,dz.$$

On verra, comme précédemment, que le second terme a pour limite zéro, quand Δt tend vers zéro. On a donc

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t)^{-2}\,dz. \tag{8}$$

Pour un point $t+\Delta t$, voisin du premier, et situé aussi à l'intérieur de la courbe C, on a

$$f'(t+\Delta t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t-\Delta t)^{-2}\,dz,$$

d'où

$$f'(t+\Delta t) - f'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\Delta(z-t)^{-2}\,dz.$$

La fonction $(z-t)^{-2}$ de t étant continue, on peut prendre Δt assez petit pour que le module de $\Delta(z-t)^{-2}$ soit moindre qu'une quantité donnée, quand z décrit la courbe C; la valeur de l'intégrale définie est donc infiniment petite, et par conséquent $f'(t)$ est une fonction continue. On a ensuite

$$\frac{\Delta f'(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\frac{\Delta(z-t)^{-2}}{\Delta t}\,dz.$$

La fonction $(z-t)^{-2}$ de t admettant une dérivée $2(z-t)^{-3}$, on posera

$$\frac{\Delta(z-t)^{-2}}{\Delta t} = 2(z-t)^{-3} + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec Δt. Il en résulte

$$\frac{\Delta f'(t)}{\Delta t} = \frac{1.2}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t)^{-3}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\varepsilon\,dz;$$

la première intégrale a une valeur finie et déterminée, la seconde tend vers zéro avec Δt. Ainsi le rapport $\frac{\Delta f'(t)}{\Delta t}$ tend vers une limite déterminée, quand Δt tend vers zéro d'une manière quelconque; d'où l'on conclut que la fonction $f'(t)$ a *une* dérivée, et, par conséquent, qu'elle est holomorphe dans la même étendue que la fonction proposée $f(t)$. Si l'on représente par $f''(t)$ sa dérivée, on a

$$(9) \qquad f''(t) = \frac{1.2}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)(z-t)^{-3}dz.$$

87. Corollaire. — La fonction $f'(t)$ étant holomorphe, sa dérivée $f''(t)$ est holomorphe dans la même étendue; elle admet donc une dérivée $f'''(t)$, qui est elle-même holomorphe, et ainsi de suite indéfiniment. Ainsi, *lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan, elle admet une infinité de dérivées successives, qui sont toutes holomorphes dans la même étendue.*

En continuant le raisonnement précédent, on obtient l'expression par une intégrale définie de l'une quelconque de ces dérivées

$$(10) \qquad f^{n}(t) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz.$$

Il est à remarquer que la connaissance des valeurs de la fonction proposée $f(z)$ sur la courbe C suffit pour déterminer les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives dans l'intérieur de cette courbe.

Supposons que l'on réduise la courbe C à un cercle décrit du point t comme centre avec un rayon r, les formules (7) et (10) deviennent

$$(11)\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t + re^{\theta i})\,d\theta,$$

$$(12)\qquad f^n(t) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(t + re^{\theta i})e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

88. *Remarque.* — La formule (11) est susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Si l'on pose $z = x + yi$, $f(z) = X + Yi$, les deux fonctions réelles X et Y des deux variables réelles et indépendantes x et y peuvent être regardées comme les ordonnées de deux surfaces (n° 9). Considérons les deux volumes compris entre le plan des xy, une surface cylindrique ayant pour base le cercle décrit du point t comme centre avec le rayon r, et limités respectivement par les deux surfaces X et Y; ces volumes ont pour expressions

$$U = \int_0^r \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} X\,d\theta, \quad V = \int_0^r \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} Y\,d\theta;$$

mais, d'après la formule (11), on a

$$X_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X\,d\theta, \quad Y_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y\,d\theta,$$

X_1 et Y_1 étant les valeurs de X et Y au point t; on en déduit

$$U = \pi r^2 X_1, \quad V = \pi r^2 Y_1.$$

Ainsi les deux volumes U et V sont équivalents à deux cylindres ayant pour hauteurs X_1 et Y_1.

CHAPITRE II.

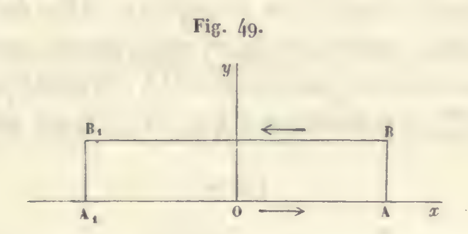
EXEMPLES D'INTÉGRALES DÉFINIES.

89. *Exemple I.* — La fonction e^{-z^2} étant holomorphe dans toute l'étendue du plan, l'intégrale

$$\int e^{-z^2}\,dz$$

relative à un contour fermé quelconque est nulle. Considérons le rectangle A_1ABB_1 (*fig.* 49) formé par l'axe des x, une parallèle B_1B à cet axe à la distance b, et deux parallèles AB, A_1B_1 à l'axe des y et à même

Fig. 49.



distance a. Suivant A_1A on a $z = x$, x variant de $-a$ à $+a$; suivant AB on a $z = a + yi$, y variant de o à b; suivant BB_1 on a $z = x + bi$, x variant de $+a$ à $-a$; et enfin suivant B_1A_1 on a $z = -a + yi$, y variant de b à o. L'intégrale relative au contour du rectangle étant nulle, on a l'équation

$$\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx + i\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy + \int_{+a}^{-a} e^{-(x+bi)^2}\,dx + i\int_b^0 e^{-(-a+yi)^2}\,dy = 0.$$

La seconde intégrale

$$\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy = e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2-2ayi}\,dy$$

tend vers zéro, quand a augmente indéfiniment; il en est de même de la quatrième; on sait d'ailleurs que la première a pour limite $\sqrt{\pi}$. On déduit de là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+bi)^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

ou

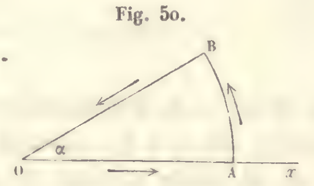
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2bxi+b^2}\,dx = e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx - i\sin 2bx)\,dx = \sqrt{\pi},$$

et par suite

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-b^2}.$$

90. *Exemple II.* — La fonction $e^{-z}z^{n-1}$, dans laquelle la lettre n désigne un nombre positif quelconque, acquiert un nombre fini ou infini de valeurs différentes, suivant que le nombre n est commensurable ou incommensurable (n° 14); mais elle est holomorphe dans le secteur AOB (*fig.* 50), défini par l'angle α et le rayon r. Afin de déterminer complétement la fonction dans ce secteur, nous prendrons celle des valeurs de z^n qui devient réelle et positive sur OA; il suffit pour cela de poser $z = \rho e^{\theta i}$, $z^n = \rho^n e^{n\theta i}$, θ variant de o à α, et ρ^n étant une quantité réelle et positive.

Fig. 50.



Suivant OA on a $z = x$, x variant de o à r; suivant l'arc de cercle AB on a $z = re^{\theta i}$, $dz = ire^{\theta i}\,d\theta$, θ variant de o à α; et enfin suivant BO on a $z = \rho e^{\alpha i}$, $dz = e^{\alpha i}\,d\rho$, ρ variant de r à o. L'intégrale relative au contour du secteur étant nulle, on obtient l'équation

$$\int_0^r e^{-x}x^{n-1}\,dx + i\int_0^\alpha r^n e^{-r\cos\theta+i(n\theta-r\sin\theta)}\,d\theta - \int_0^r \rho^{n-1}e^{-\rho\cos\alpha+i(n\alpha-\rho\sin\alpha)}\,d\rho = 0.$$

La seconde intégrale tend vers zéro, quand r augmente indéfiniment,

si l'angle α est moindre que $\frac{\pi}{2}$; la première a pour limite la transcendante désignée par $\Gamma(n)$. L'équation se réduit donc à

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha + i(n\alpha - \rho\sin\alpha)}\,d\rho = \Gamma(n),$$

et l'on a

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \cos(n\alpha - \rho\sin\alpha)\,d\rho = \Gamma(n),$$

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \sin(n\alpha - \rho\sin\alpha)\,d\rho = 0,$$

ou

$$\cos n\alpha \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \cos(\rho\sin\alpha)\,d\rho + \sin n\alpha \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \sin(\rho\sin\alpha)\,d\rho = \Gamma(n),$$

$$\sin n\alpha \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \cos(\rho\sin\alpha)\,d\rho - \cos n\alpha \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \sin(\rho\sin\alpha)\,d\rho = 0.$$

On en déduit

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \cos(\rho\sin\alpha)\,d\rho = \Gamma(n)\cos n\alpha,$$

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho\cos\alpha} \sin(\rho\sin\alpha)\,d\rho = \Gamma(n)\sin n\alpha.$$

Si l'on pose

$$\cos\alpha = \frac{a}{R}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{R}, \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \rho = Ru,$$

les deux formules précédentes deviennent

$$(2) \qquad \int_0^\infty u^{n-1} e^{-au} \cos bu\,du = \frac{\Gamma(n)}{R^n} \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right),$$

$$(3) \qquad \int_0^\infty u^{n-1} e^{-au} \sin bu\,du = \frac{\Gamma(n)}{R^n} \sin\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right).$$

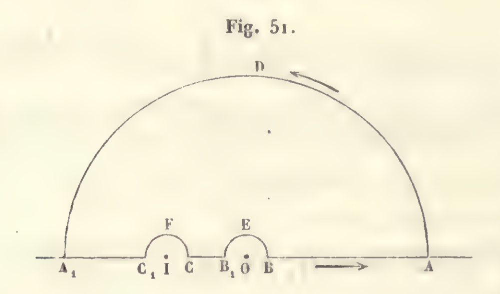
91. *Exemple III.* — La fonction $\frac{z^{n-1}}{1+z}$, dans laquelle la lettre n désigne un nombre positif moindre que l'unité, admet comme pôle le point I (*fig.* 51) qui correspond à $z = -1$, et comme point critique

l'origine. Du point O comme centre, avec un rayon très-grand R, décrivons un demi-cercle ADA_1 limité à l'axe des x et des points O et I comme centres, avec des rayons très-petits ε et ε', des demi-cercles BEB_1, CFC_1 limités aussi à l'axe des x. La fonction proposée étant holomorphe dans l'aire enveloppée par le contour fermé $ADA_1C_1FCB_1EBA$, l'intégrale

$$\int \frac{z^{n-1}}{1+z}\,dz$$

relative à ce contour est nulle. Nous prendrons, comme précédemment, celle des valeurs de z^n qui devient réelle et positive sur BA.

Fig. 51.



La partie de l'intégrale relative à la demi-circonférence ADA_1 tend vers zéro, quand R augmente indéfiniment. La partie relative à la demi-circonférence B_1EB tend aussi vers zéro, quand ε tend vers zéro. Pour évaluer l'intégrale relative à la demi-circonférence C_1FC, nous poserons $z = -1 + \varepsilon' e^{\theta' i}$, ce qui donne

$$i\int_\pi^0 z^{n-1}\,d\theta' = -i\int_0^\pi z^{n-1}\,d\theta';$$

quand ε' tend vers zéro, z^n devient $e^{n\pi i}$, et l'intégrale se réduit à $i\pi e^{n\pi i}$. La droite BA donne une intégrale ayant une limite déterminée

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx.$$

Suivant les droites A_1C_1, CB_1 on a $\theta = \pi$, $z^n = r^n e^{n\pi i}$, $z = -r$, ce

qui donne les deux intégrales

$$e^{n\pi i}\int_{R}^{1+\varepsilon'}\frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr+e^{n\pi i}\int_{1-\varepsilon'}^{\varepsilon}\frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr$$
$$=-e^{n\pi i}\left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'}\frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr+\int_{1+\varepsilon'}^{R}\frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr\right).$$

La somme des intégrales relatives aux diverses portions du contour fermé étant nulle, et les quatre premières parties tendant vers des limites déterminées quand ε et ε' tendent vers zéro et que R augmente indéfiniment, il est clair que la dernière partie, et par conséquent la somme des deux intégrales placées entre parenthèses, tend aussi vers une limite déterminée. Cette limite est ce que Cauchy appelle *la valeur principale de l'intégrale*

$$\int_0^{\infty}\frac{r^{n-1}}{1-r}\,dr;$$

nous la représenterons par k. Nous avons ainsi l'équation

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx+\pi i e^{n\pi i}-ke^{n\pi i}=0,$$

d'où

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx=(k-\pi i)(\cos n\pi+i\sin n\pi)$$
$$=(k\cos n\pi+\pi\sin n\pi)+i(k\sin n\pi-\pi\cos n\pi).$$

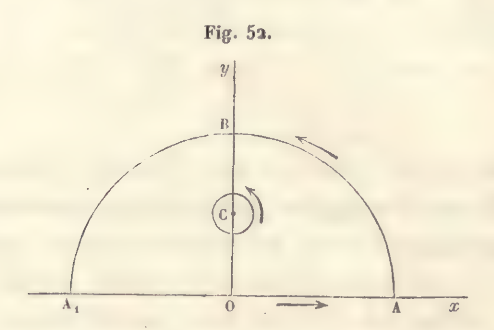
On trouve $k=\pi\cot n\pi$, en remarquant que le premier membre est réel, et l'on obtient la valeur de l'intégrale définie

$$(4)\qquad\int_0^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

92. *Exemple IV.* — La fonction $\frac{e^{azi}}{b^2+z^2}$ admet deux pôles $z=\pm bi$. Nous supposerons les quantités a et b réelles et positives. De l'ori-

gine O comme centre (*fig.* 52), avec un rayon très-grand R, décrivons un demi-cercle ABA_1, limité à l'axe des x; du pôle C, qui correspond à $z = bi$, comme centre, avec un rayon très-petit ρ, décrivons un cercle.

Fig. 52.



La fonction proposée étant holomorphe dans la partie du plan comprise entre la circonférence ρ et le contour A_1ABA_1 du demi-cercle, les intégrales

$$\int \frac{e^{azi}}{b^2+z^2}\,dz$$

relatives à ces deux lignes sont égales. Sur le cercle ρ on a $z = bi + \rho e^{\theta i}$, $dz = i\rho e^{\theta i}\,d\theta$, ce qui donne l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ai(bi+\rho e^{\theta i})}}{2b - i\rho e^{\theta i}}\,d\theta,$$

qui a pour limite $\frac{\pi}{b}e^{-ab}$ quand ρ tend vers zéro. L'intégrale

$$i\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{R}e^{\theta i}}{b^2+\mathrm{R}^2e^{2\theta i}}\,e^{-a\mathrm{R}\sin\theta + ia\mathrm{R}\cos\theta}\,d\theta,$$

relative à la demi-circonférence ABA_1, a pour limite zéro, quand R augmente indéfiniment. On en conclut que l'intégrale relative à la droite A_1A tend vers une limite déterminée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axi}}{b^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{b}\,e^{-ab}.$$

On déduit de là la valeur de l'intégrale définie

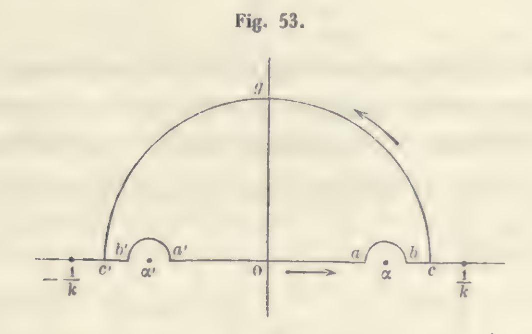
$$(5) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}\,e^{-ab}.$$

93. *Exemple V.* — La considération des contours permet aussi de ramener une intégrale définie à une autre plus simple. Soit l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle k désigne un nombre positif inférieur à l'unité, n un nombre entier positif, x une variable réelle.

Fig. 53.



Portons sur l'axe des x (*fig.* 53), de part et d'autre de l'origine, deux longueurs $O\alpha$, $O\alpha'$ égales à l'unité; décrivons deux demi-circonférences égales ab, $a'b'$, ayant les points α et α' pour centres et un rayon très-petit; puis une demi-circonférence cgc' ayant son centre au point O et un rayon compris entre l'unité et $\frac{1}{k}$. L'intégrale

$$\int \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

relative au contour $Oabcgc'b'a'O$, est évidemment nulle; car la fonction placée sous le signe d'intégration est holomorphe dans la partie du plan limitée par cette courbe. En a et a' le radical a des valeurs

égales; en b et b' des valeurs égales et de signes contraires; car, si l'on allait de a' à b' en suivant le demi-cercle symétrique de $a'b'$ par rapport à l'axe des x, on aurait en b' la même valeur qu'en b. On conclut de là que les intégrales relatives aux deux segments $c'b'$, bc se détruisent; d'ailleurs les intégrales relatives aux petits cercles sont infiniment petites. Donc les intégrales relatives à la droite $a'a$ et à la demi-circonférence cgc' ont une somme nulle.

Le rayon de la grande circonférence est un nombre arbitraire compris entre 1 et $\frac{1}{k}$. En prenant ce rayon égal à $\frac{1}{\sqrt{k}}$, on a, sur cette circonférence,

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{\theta i}, \quad dz = \frac{i}{\sqrt{k}} e^{\theta i} d\theta,$$
$$\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)} = \pm \frac{i}{\sqrt{k}} e^{\theta i} \sqrt{1 - 2k\cos 2\theta + k^2},$$

le signe étant le même tout le long de la circonférence. Or au point a le radical a une valeur positive très-petite; en b une valeur de la forme $-\varepsilon i$, ε désignant une quantité positive; la même chose a lieu du point b au point $\frac{1}{k}$, et en particulier au point c; c'est donc le signe $-$ qui convient, et l'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{1}{k^n} \int_0^{\pi} \frac{(\cos 2n\theta + i \sin 2n\theta) d\theta}{\sqrt{1 - 2k\cos 2\theta + k^2}};$$

d'où

$$(6) \qquad 2\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{1}{k^n} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2n\theta}{\sqrt{1 - 2k\cos 2\theta + k^2}} d\theta.$$

Si l'on remplace x par $\sin\varphi$ dans le premier nombre et 2θ par φ dans le second, cette égalité devient

$$(7) \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^n} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - 2k\cos\varphi + k^2}}.$$

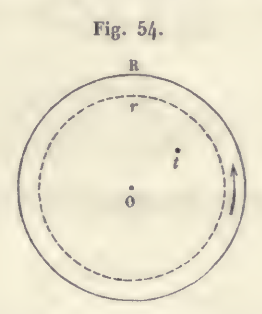
CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES DE LA VARIABLE.

94. Théorème I. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans un cercle décrit de l'origine comme centre, elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable, et convergente dans ce cercle.*

Nous avons vu (Liv. II, Chap. I) qu'une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes d'une variable, est convergente pour toutes les valeurs de la variable situées à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre, et divergente pour toutes les valeurs situées en dehors. Nous avons vu aussi que, dans le cercle de convergence, la série représente une fonction holomorphe. Pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de z, et convergente dans un cercle décrit de

Fig. 54.



l'origine comme centre avec un rayon R, il est donc nécessaire que la fonction soit holomorphe dans ce cercle. Nous allons démontrer que cette condition est suffisante.

Soit t (*fig.* 54) un point quelconque situé à l'intérieur du cercle R.

Du point O comme centre, avec un rayon r plus petit que R, mais plus grand que Ot, décrivons un cercle. D'après le théorème du n° 85, on a

$$(1) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z}\,\frac{dz}{1-\frac{t}{z}},$$

l'intégrale étant prise sur la circonférence r, dans le sens direct. Mais on a identiquement

$$\frac{1-\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n},$$

d'où

$$\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}},$$

$$\frac{\frac{f(z)}{z}}{1-\frac{t}{z}} = \frac{f(z)}{z}\left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \ldots + \frac{t^n}{z^n} + \frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}\right).$$

On en déduit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{t}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \frac{t^2}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z^3}\,dz + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)\,\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{z-t}\,dz.$$

Évaluons le dernier terme. Posons pour cela

$$z = re^{\theta i},$$

d'où

$$dz = ire^{\theta i}\,d\theta = iz\,d\theta;$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{zf(z)\,\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{z-t}\,d\theta.$$

Si l'on désigne par r' le module de t et par M le maximum du module de $f(z)$ sur la circonférence r, le module de ce terme est moindre que

$$\frac{r\mathrm{M}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1}}{r-r'};$$

r étant plus grand que r', cette quantité tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Si donc on considère la série à laquelle le second membre donne naissance, la somme des $n+1$ premiers termes a pour limite $f(t)$; on en conclut que la série est convergente, et que l'on a

$$(2)\quad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z}\,dz+\frac{t}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^2}\,dz+\frac{t^2}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^3}\,dz+\ldots.$$

Ces intégrales ont des valeurs finies et déterminées, puisque, sur la circonférence r, la fonction $\frac{f(z)}{z^n}$ est continue; elles sont d'ailleurs indépendantes du rayon r, pourvu que ce rayon soit plus petit que R (nº 84, Cor. II). Si l'on pose

$$(3)\qquad u_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

la série (2) devient

$$f(t)=u_0+u_1t+u_2t^2+u_3t^3+\ldots$$

et, en remplaçant t par z,

$$(4)\qquad f(z)=u_0+u_1z+u_2z^2+u_3z^3+\ldots.$$

On peut la représenter par

$$(5)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{z^n}{r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

Ce théorème très-important est dû à Cauchy (*Mémoire sur le Calcul des résidus et le Calcul des limites;* Turin, 1831 et 1832. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1846).

95. Corollaire. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit du point z_0 comme centre avec un rayon* R, *elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - z_0$, et convergente dans ce cercle.*

Posons

$$z = z_0 + z',$$

la fonction $f(z_0 + z')$ est développable suivant les puissances entières et croissantes de z', et l'on a

$$f(z_0 + z') = u_0 + u_1 z' + u_2 z'^2 + \ldots,$$

d'où

$$f(z) = u_0 + u_1(z - z_0) + u_2(z - z_0)^2 + \ldots. \tag{6}$$

Les coefficients sont donnés par la formule

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}\, d\theta, \tag{7}$$

et la série (6) peut être représentée par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z - z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}\, d\theta. \tag{8}$$

D'après la formule (12) du n° 87, on a

$$f^n(z_0) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i}\, d\theta.$$

On en déduit

$$u_n = \frac{f^n(z_0)}{1.2.3\ldots n},$$

et la série (8) se met sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f^n(z_0)}{1.2.3\ldots n} (z - z_0)^n, \tag{9}$$

donnée par Taylor pour le cas où la variable est réelle.

En faisant $z_0 = 0$, on a la série de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{u=\infty} \frac{f^n(0)\, z^n}{1.2\ldots n}. \tag{10}$$

Considérons, par exemple, les fonctions $\sqrt[m]{1+z}$, $\log(1+z)$, $\operatorname{arc\,tang} z$, dont nous préciserons la signification, en supposant que, la variable z partant du point $z = 0$, la fonction a la valeur initiale zéro. Les deux premières admettent le point critique $z = -1$; la troisième les deux points critiques $z = \pm i$. Ces fonctions sont holomorphes dans un cercle décrit du point $z = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité; chacune d'elles se développe donc en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de z, et convergente dans ce cercle. On calculera les coefficients de la série d'après la formule de Maclaurin.

Développement d'une fonction algébrique.

96. On peut développer de la même manière la fonction implicite définie par une équation algébrique $f(z, u) = 0$. Si la valeur u_0 de la fonction pour $z = z_0$ est racine simple de l'équation, elle est holomorphe aux environs du point z_0, et se développe, par conséquent, en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de $z - z_0$; le cercle de convergence, dont le point z_0 est le centre, s'étend jusqu'au pôle ou au point critique le plus voisin, où la racine considérée devient infinie ou se permute avec une autre.

Lorsque u_0 est une racine multiple d'ordre n dans le voisinage de z_0, l'équation admet n racines voisines de u_0. Posons

$$z = z_0 + z', \quad u = u_0 + u'. \tag{11}$$

Si l'équation renferme un terme du premier degré en z' indépendant de u', ces n racines forment un système circulaire que l'on obtient en posant $z'' = z'^{\frac{1}{n}}$, $u' = v z''$ (n° 33); toutes les valeurs de v pour $z'' = 0$ sont racines simples; il suffit de prendre l'une d'elles. Cette valeur

20

de v, étant fonction holomorphe de z'', est développable en une série convergente suivant les puissances entières et croissantes de z''; on a donc

$$v = v_0 + v_1 z'' + v_2 z''^2 + \ldots,$$

$$u = u_0 + v_0 z'' + v_1 z''^2 + v_2 z''^3 + \ldots,$$

$$(12) \qquad u = u_0 + v_0 z'^{\frac{1}{n}} + v_1 z'^{\frac{2}{n}} + v_2 z'^{\frac{3}{n}} + \ldots.$$

Cette dernière série représente les n racines formant le système circulaire; elle est convergente jusqu'au pôle ou point critique le plus voisin, où l'une des racines du système devient infinie ou se change en une autre.

En général le groupe des n racines voisines de u_0 se décompose en plusieurs sous-groupes, dont chacun forme un ou plusieurs systèmes circulaires. Nous avons vu (n° 36) que, dans tous les cas, les p racines d'un système circulaire sont représentées par la formule $u' = v z'^{\frac{q}{p}}$, v étant fonction holomorphe de $z'' = z'^{\frac{1}{p}}$ ne s'annulant pas avec z'', et la fraction $\frac{q}{p}$ n'étant pas nécessairement irréductible. Cette fonction v pouvant être développée en une série convergente suivant les puissances entières, positives et croissantes de z'', les p racines du système circulaire sont représentées par la même série

$$(13) \qquad u = u_0 + z'^{\frac{q}{p}} \left(v_0 + v_1 z'^{\frac{1}{p}} + v_2 z'^{\frac{2}{p}} + \ldots \right).$$

Le même mode de développement s'applique aux racines infinies. Quand, pour $z = z_0$, il y a n racines infinies, ces n racines se décomposent encore en sous-groupes, dont chacun forme un ou plusieurs systèmes circulaires. Les p racines d'un système circulaire sont représentées par la formule $u = v z'^{-\frac{q}{p}}$, v étant fonction holomorphe de $z'' = z'^{\frac{1}{p}}$ (n° 37). Cette fonction v pouvant être développée suivant les puissances entières, positives et croissantes de z'', les p racines du système circulaire sont représentées par la série

$$(14) \qquad u = z'^{-\frac{q}{p}} \left(v_0 + v_1 z'^{\frac{1}{p}} + v_2 z'^{\frac{2}{p}} + \ldots \right).$$

Nous dirons que chacune de ces racines infinies est du degré $\frac{q}{p}$; il y a au commencement de la série un ou plusieurs termes à exposants négatifs. Lorsque $p = 1$, tous les exposants sont entiers, et le point z_0 est pôle par rapport à la raison infinie considérée.

Formule de Lagrange.

97. Soit l'équation

$$u = a + zf(u), \tag{15}$$

dans laquelle $f(u)$ désigne un polynôme entier en u du degré m,

$$f(u) = A_0 + A_1 u + \ldots + A_m u^m. \tag{16}$$

Pour une valeur très-petite de z, l'équation admet une racine simple voisine de a et $m - 1$ racines très-grandes ayant pour valeurs approchées $u = A_m^{-\frac{1}{m-1}} z^{-\frac{1}{m-1}}$; le point $z = 0$ est donc un point critique autour duquel se permutent ces $m - 1$ racines infinies. Mais il y a d'autres points critiques; on les obtient à l'aide des deux équations simultanées (15) et

$$1 - zf'(u) = 0, \tag{17}$$

d'où l'on déduit l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré

$$(u - a)f'(u) - f(u) = 0; \tag{18}$$

puisqu'à chaque valeur de u correspond une seule valeur de z, donnée par l'équation (17), on obtient m nouveaux points critiques. La formule de Lagrange

$$u = a + \frac{z}{1} f(a) + \frac{z^2}{1.2} D_a f(a)^2 + \frac{z^3}{1.2.3} D_a^2 f(a)^3 + \ldots \tag{19}$$

donne les coefficients du développement de la racine simple dont la valeur initiale est a pour $z = 0$; la série est convergente dans un cercle décrit de l'origine comme centre et qui s'étend jusqu'au point critique

le plus voisin où cette racine se permute avec une autre. Mais il peut arriver que le cercle de convergence contienne un ou plusieurs points critiques relatifs à d'autres racines.

Comme premier exemple, considérons l'équation du second degré

$$u = a + z\frac{u^2 - 1}{2}, \tag{20}$$

dont l'une des racines

$$u = \frac{1 - \sqrt{1 - 2az + z^2}}{z} \tag{21}$$

se réduit à a pour $z = 0$; l'autre racine devient infinie en ce point qui est pôle par rapport à cette seconde racine. Les deux racines deviennent égales et se permutent autour des deux points critiques

$$z = a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Bornons-nous au cas où la quantité a est réelle et positive. Si le nombre a est plus petit que 1, les deux points critiques $z = a \pm i\sqrt{1 - a^2}$ ayant un module égal à 1, le rayon du cercle de convergence est égal à 1 et est indépendant de a. Si le nombre a est plus grand que 1, les deux points critiques étant inégalement distants de l'origine, le plus voisin donne le rayon du cercle de convergence

$$R = a - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}};$$

ce rayon est d'autant plus petit que a est plus grand. La formule de Lagrange donne le développement de la racine (21)

$$u = a + \frac{z}{1}\frac{a^2 - 1}{2} + \frac{z^2}{1.2} D_a\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 + \frac{z^3}{1.2.3} D_a^2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^3 + \ldots, \tag{22}$$

dans le cercle que nous venons de déterminer.

On en déduit un autre développement très-important. En différentiant la formule (21) par rapport à a, on trouve

$$\frac{du}{da} = (1 - 2az + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en différentiant de même la série (22) et égalant les deux valeurs de $\frac{du}{da}$, on obtient la série

$$(23)\quad (1-2az+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{1}\,D_a\left(\frac{a^2-1}{2}\right) + \frac{z^2}{1.2}\,D_a^2\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + \ldots$$

convergente dans le même cercle que la première. Le polynôme entier $\frac{1}{1.2\ldots n}D_x^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$ du degré n est la fonction X_n de Legendre.

Comme second exemple, considérons l'équation du troisième degré

$$(24)\qquad u = z(A + Bu^2 + Cu^3),$$

dans laquelle nous supposons les coefficients A, B, C réels et positifs. L'équation (18) est ici

$$\frac{1}{u^3} - \frac{B}{A}\frac{1}{u} - \frac{2C}{A} = 0;$$

elle a ses trois racines réelles si la condition $B^3 > 27AC^2$ est remplie, et dans ce cas les trois valeurs correspondantes de z sont aussi réelles. L'élimination de u entre ces deux équations conduit à l'équation

$$\varphi(z) = A(4B^3 + 27AC^2)z^3 + 18ABCz^2 - B^2z - 4C = 0,$$

qui a une racine positive z_1 et deux racines négatives z_2 et z_3. On peut faire en sorte que l'une des racines négatives z_2 soit plus grande que $-z_1$, l'autre plus petite; il faut pour cela que $\varphi(-z_1)$ soit > 0. Si l'on tient compte de ce que $\varphi(z_1) = 0$, cette condition se simplifie et devient $z_1 > \sqrt{\frac{2}{9AB}}$. Il suffit que cette dernière quantité rende négatif le polynôme $\varphi(z)$, ce qui conduit à la condition $B^3 > 54AC^2$, qui comprend la condition $B^3 > 27AC^2$ écrite précédemment.

Dans le voisinage du point $z = 0$, les trois racines de l'équation proposée (24) ont pour valeurs approchées

$$u_0 = Az,\quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{C}}\,z^{-\frac{1}{2}},\quad u_2 = -\frac{1}{\sqrt{C}}\,z^{-\frac{1}{2}}.$$

Les deux dernières se permutent autour du point $z = 0$. Quand z est

réel, et que l'équation $\varphi(z) = 0$ a ses trois racines réelles, l'équation (24) a ses trois racines réelles, lorsque la condition

$$z\varphi(z) = z(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) < 0$$

est remplie. De $z = 0$ à $z = z_1$, les trois racines sont réelles, deux positives, une négative; ce sont les deux racines positives u_0 et u_1 qui se permutent autour du point critique z_1. De $z = 0$ à $z = z_2$, une seule racine u_0 est réelle; ce sont les deux racines imaginaires u_1 et u_2 qui se permutent autour du point critique z_2. Dans l'intervalle $z_2 z_3$, les trois racines sont réelles et négatives. Enfin, pour toutes les valeurs de z supérieures à z_1 ou inférieures à z_3, une seule racine est réelle.

On se rend bien compte de la transformation des racines en formant des lacets qui, partant d'un point z_0 voisin de O et situé sur l'axe Ox, enveloppent les quatre points critiques. D'après ce que nous avons dit, le lacet (z_1) permute les deux racines u_0 et u_1, chacun des lacets (O) et (z_2) les deux racines u_1 et u_2; quant au lacet (z_3), il permute la racine u_0 avec u_1 ou u_2; car, le point O′ étant un point ordinaire sur la sphère, un circuit qui enveloppe tous les points critiques, ramène la valeur initiale u_0. On conclut de là que la racine dont la valeur initiale est $u = 0$ pour $z = 0$ est holomorphe dans le cercle de rayon z_1 ayant pour centre l'origine, et, par conséquent, qu'elle est développable en une série convergente dans ce cercle, qui comprend deux points critiques relatifs aux deux autres racines.

98. Théorème II. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans la partie du plan comprise entre deux cercles ayant pour centre l'origine, elle est développable en une double série ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la variable, et convergente dans cette partie du plan.*

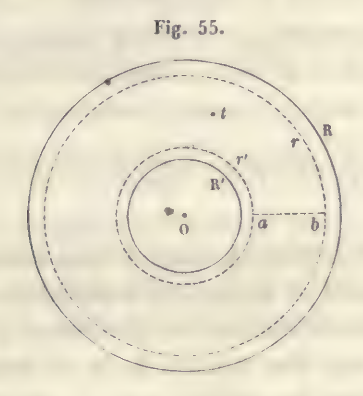
Nous supposons la fonction $f(z)$ homolorphe dans la partie du plan comprise entre les deux circonférences décrites de l'origine comme centre avec les rayons R et R′ (*fig.* 55), R étant plus grand que R′. Soit t un point quelconque situé dans cette partie du plan. Du point O, comme centre, décrivons deux cercles, l'un avec un rayon r plus petit que R, mais plus grand que Ot; l'autre avec un rayon r' plus grand que R′, mais plus petit que Ot.

Menons une transversale ab; le contour de la partie du plan comprise entre les deux circonférences r et r' est formé de ces deux circonférences et de la transversale ab parcourue deux fois dans des sens contraires. La fonction $f(z)$ étant holomorphe dans cette partie du plan, on a, d'après le théorème du n° ~~86~~, 85

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

l'intégrale se rapportant au contour entier décrit dans le sens direct. Mais, dans ce mouvement, le point z décrit la circonférence r dans le

Fig. 55.



sens positif, la circonférence r' dans le sens négatif, et la transversale ab deux fois dans des sens contraires, ce qui donne dans l'intégrale des résultats égaux et des signes contraires. On a donc, en supposant les deux circonférences parcourues dans le sens positif,

$$(25) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{(r')} \frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Sur la circonférence r le module de z étant plus grand que celui de t, nous écrirons

$$\frac{f(z)}{z-t} = \frac{\frac{f(z)}{z}}{1-\frac{t}{z}} = \frac{f(z)}{z}\left[1+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{z^2}\cdots+\frac{t^n}{z^n}+\frac{\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{1-\frac{t}{z}}\right].$$

Sur la circonférence r' le module de z étant au contraire plus petit que celui de t, nous écrirons

$$\frac{f(z)}{z-t} = -\frac{\frac{f(z)}{t}}{1-\frac{z}{t}} = -\frac{f(z)}{t}\left[1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}\cdots+\frac{z^{n-1}}{t^{n-1}}+\frac{\frac{z^n}{t^n}}{1-\frac{z}{t}}\right].$$

La formule (25) devient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z}\,dz$$

$$+\frac{t}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^2}\,dz+\frac{t^2}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^3}\,dz\cdots+\frac{t^n}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)\frac{t^{n+1}}{z^{n+1}}}{z-t}\,dz$$

$$+\frac{t^{-1}}{2\pi i}\int_{(r')}f(z)\,dz+\frac{t^{-2}}{2\pi i}\int_{(r')}zf(z)\,dz\cdots+\frac{t^{-n}}{2\pi i}\int_{(r')}z^{n-1}f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{(r')}\frac{f(z)\frac{z^n}{t^n}}{t-z}\,dz.$$

On verra, comme précédemment, que les deux termes complémentaires tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment. On obtient ainsi une double série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de t. Les intégrales ont des valeurs fixes et déterminées; elles sont d'ailleurs indépendantes des rayons r et r', pourvu que ces rayons soient compris entre R′ et R. Si l'on pose

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

$$u_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r')}z^{n-1}f(z)\,dz = \frac{r'^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r'e^{\theta i})\,e^{n\theta i}\,d\theta,$$

et si l'on remplace t par z, la double série devient

$$f(z) = \ldots + u_{-2}z^{-2} + u_1 z^{-1} + u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots;$$

on peut la représenter par

$$(26) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{z^n}{r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta.$$

Cette extension du théorème de Cauchy a été donnée par Laurent (*Comptes rendus*, 1843).

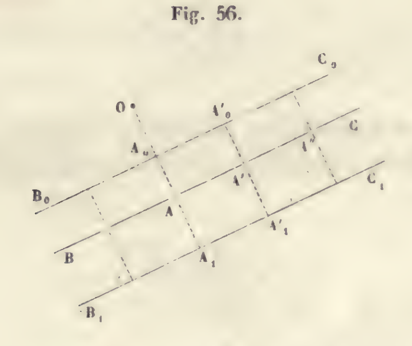
Lorsque la fonction est holomorphe dans toute la partie du plan extérieure au cercle R′, et que sur la sphère le point O′ est un point ordinaire, la série est convergente dans cette étendue, et elle ne renferme aucune puissance positive; car, dans l'évaluation des coefficients des puissances positives, on peut supposer le rayon r infini.

Série de Fourier.

99. Théorème III. — *Lorsque, dans la partie du plan comprise entre deux droites parallèles, une fonction est holomorphe et admet une période* ω *dont l'argument est égal à celui des droites parallèles, elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de* $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, *et convergente dans cette bande.*

En posant $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} = t$ et faisant $t = re^{\theta i}$, on a $z = -\frac{i\omega \mathrm{L} r}{2\pi} + \frac{\omega\theta}{2\pi}\cdot$ Quand θ varie de 0 à 2π, c'est-à-dire quand la variable t décrit une circonférence de cercle ayant pour centre l'origine, la variable z décrit la

Fig. 56.



droite AA′ (*fig.* 56), dont les extrémités A et A′ correspondent aux valeurs $z = -\frac{i\omega \mathrm{L} r}{2\pi}$, $z = -\frac{i\omega \mathrm{L} r}{2\pi} + \omega$. Si θ varie ensuite de 2π à 4π, c'est-à-dire si la variable t décrit la même circonférence une seconde fois, la variable z décrit une seconde droite A′A″ égale à la précédente et pla-

cée sur son prolongement; et ainsi de suite; ces portions de droite, s'ajoutant les unes aux autres, forment une droite infinie BC. Supposons maintenant que le rayon r varie de r_0 à r_1, le point A décrira sur la perpendiculaire menée de l'origine à la droite BC une longueur A_0A_1, dont les extrémités correspondent aux valeurs $z = -\frac{i\omega L r_0}{2\pi}$, $z = -\frac{i\omega L r_1}{2\pi}$ et la droite BC, se mouvant parallèlement à elle-même, ira de la position B_0C_0 à la position B_1C_1. Ainsi à la partie du plan t comprise entre les deux circonférences concentriques r_0, r_1 correspond la partie du plan z comprise entre les deux parallèles B_0C_0, B_1C_1.

Soit $u = f(z)$ une fonction de z, holomorphe dans la bande $B_0C_0B_1C_1$, et admettant la période ω, c'est-à-dire telle que $f(z+\omega) = f(z)$. Si nous concevons la bande divisée en rectangles égaux au rectangle $A_0A'_0A'_1A_1$, la fonction reprendra la même valeur aux points homologues de ces différents rectangles. A une valeur de t correspondent une infinité de valeurs de z de la forme $z + m\omega$, m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et par conséquent une seule valeur de u; u peut donc être regardé comme une fonction holomorphe de t dans la couronne comprise entre les circonférences r_0 et r_1. En vertu du théorème précédent, cette fonction est développable en une série

$$(1) \qquad u = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n t^n,$$

ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives de t, et convergente dans la couronne $r_0 r_1$. En remplaçant t par sa valeur, on obtient la série

$$(2) \qquad u = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n e^{\frac{2n\pi z i}{\omega}},$$

convergente dans la bande $B_0C_0B_1C_1$.

Un coefficient quelconque de la série (1) est donnée par l'intégrale définie

$$(3) \qquad u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} u t^{-n-1}\, dt,$$

relative à une circonférence de cercle intermédiaire entre les circonférences limites r_0 et r_1; par le changement de variable, cette intégrale définie devient

$$(4) \qquad u_n = \frac{1}{\omega} \int_{z_0}^{z_0+\omega} u e^{-\frac{2n\pi z i}{\omega}} dz,$$

la variable z décrivant une ligne allant d'un point z_0 à un point $z_0 + \omega$, et comprise entre les deux parallèles limites, par exemple la ligne AA'.

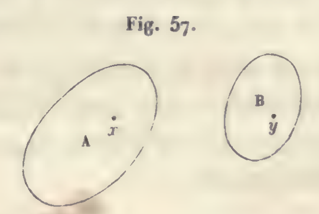
Supposons que la fonction proposée soit holomorphe par rapport à z dans toute l'étendue du plan; si nous faisons tendre le rayon r_0 vers zéro et augmenter r_1 indéfiniment, les deux parallèles B_0C_0, B_1C_1 s'éloigneront indéfiniment de l'origine de part et d'autre; la série (2) sera donc convergente pour toutes les valeurs de z.

Fonctions de plusieurs variables.

100. Théorème IV. — *Une fonction de plusieurs variables indépendantes, holomorphe par rapport à chacune d'elles dans une certaine étendue, admet une infinité de dérivées partielles, qui sont elles-mêmes holomorphes dans les mêmes étendues.*

Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes x et y, holomorphe tant que les points x et y (*fig.* 57) sont situés respectivement dans des parties déterminées A et B du plan. Si l'on attribue à y une valeur constante située dans l'aire B, $f(x, y)$ est fonction holomorphe de la variable x dans l'aire A. D'après le théorème du n° 86,

Fig. 57.



cette fonction admet une infinité de dérivées partielles relatives à la variable x, et ces dérivées sont fonctions holomorphes de x dans la même étendue. Nous allons démontrer qu'elles sont aussi fonctions holomorphes de la variable y dans l'aire B. On a, en effet, d'après la

formule (12) du n° 87,

$$\varphi(x, y) = D_x^n f(x, y) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i}, y)\, e^{-n\theta i}\, d\theta, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y + \Delta y) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i}, y + \Delta y)\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

$$\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} [f(x + re^{\theta i}, y + \Delta y) - f(x + re^{\theta i}, y]\, e^{-n\theta i}\, d\theta.$$

On voit d'abord que $\varphi(x, y)$ varie d'une manière continue avec y; on a ensuite

$$\frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + re^{\theta i}, y + \Delta y) - f(x + re^{\theta i}, y)}{\Delta y}\, e^{-n\theta i}\, d\theta$$
$$= \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} [D_y f(x + re^{\theta i}, y) + \varepsilon]\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

la quantité ε tendant vers zéro avec Δy. Ainsi la fonction $\varphi(x, y)$ admet une dérivée partielle relative à y,

$$D_y \varphi(x, y) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} D_y f(x + re^{\theta i}, y)\, e^{-n\theta i}\, d\theta, \tag{2}$$

dérivée que l'on obtient en différentiant sous le signe somme.

La fonction $\varphi(x, y)$, étant fonction holomorphe de y dans l'aire B, admet une infinité de dérivées partielles $D_y^{n'} \varphi(x, y)$ relatives à y, qui sont holomorphes en y et qui, en vertu du raisonnement précédent, le sont aussi en x. On obtient ainsi la dérivée partielle $D_{xy}^{n+n'} f(x, y)$, qui est une fonction holomorphe de x et y dans les aires A et B.

Voici comment on peut avoir l'expression de cette dérivée. D'après la formule rappelée précédemment, on a

$$D_y^{n'} \varphi(x, y) = \frac{1.2\ldots n'}{2\pi r'^{n'}} \int_0^{2\pi} \varphi(x, y + r' e^{\theta' i})\, e^{-n'\theta' i}\, d\theta',$$

$$\varphi(x, y + r' e^{\theta' i}) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i}, y + r' e^{\theta' i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta;$$

d'où

$$(3)\quad D_{xy}^{n+n'} f(x,y) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{4\pi^2 r^n r'^{n'}} \int_0^{2\pi} e^{-n'\theta' i}\, d\theta' \int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}) e^{-n\theta i}\, d\theta.$$

On peut suivre une autre marche. En différentiant sous le signe somme, d'après la formule (2), on a

$$D_y^{n'} \varphi(x,y) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} D_y^{n'} f(x+re^{\theta i}, y) e^{-n\theta i}\, d\theta;$$

mais

$$D_y^{n'} f(x+re^{\theta i}, y) = \frac{1.2\ldots n'}{2\pi r'^{n'}} \int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}) e^{-n'\theta' i}\, d\theta';$$

donc

$$(4)\quad D_{xy}^{n+n'} f(x,y) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{4\pi^2 r^n r'^{n'}} \int_0^{2\pi} e^{-n\theta i}\, d\theta \int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}) e^{-n'\theta' i}\, d\theta'.$$

Ces deux expressions (3) et (4) se mettent sous la forme

$$(5)\quad D_{xy}^{n+n'} f(x,y) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{4\pi^2 r^n r'^{n'}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}) e^{-n\theta i - n'\theta' i}\, d\theta\, d\theta'.$$

On peut changer l'ordre des différentiations. En appliquant la formule (3), on a, en effet,

$$D_{yx}^{n'+n} f(x,y) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{4\pi^2 r^n r'^{n'}} \int_0^{2\pi} e^{-n\theta i}\, d\theta \int_0^{2\pi} f(x+re^{\theta i}, y+r'e^{\theta' i}) e^{-n'\theta' i}\, d\theta';$$

c'est la formule (4); ainsi

$$(6)\qquad D_{yx}^{n'+n} f(x,y) = D_{xy}^{n+n'} f(x,y).$$

101. Théorème V. — *Si u et v sont des fonctions holomorphes de z dans une aire A, $f(u,v)$ une fonction holomorphe des deux variables u et v dans les aires B et C décrites par les points u et v quand le point z décrit l'aire A, cette fonction sera fonction holomorphe de z dans l'aire A.*

Il est évident d'abord que $f(u, v)$ est une fonction continue et monotrope de z dans l'aire A; il reste à faire voir qu'elle admet une dérivée. La démonstration est la même que celle que l'on donne habituellement, quand la variable est réelle; on a

$$(7) \qquad D_z f(u, v) = D_u f(u, v) D_z u + D_v f(u, v) D_z v.$$

Remarque. — Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe des deux variables x et y dans les aires A et B; posons

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt,$$

x_0 étant un point de l'aire A, y_0 un point de l'aire B, h et k deux constantes; d'après le théorème précédent, on peut regarder $f(x, y)$ comme une fonction de la variable t, dans une aire C telle que les aires correspondantes décrites respectivement par les points x et y soient comprises dans les aires A et B, et l'on a

$$D_t f(x, y) = h D_x f + k D_y f.$$

En appliquant le même théorème à cette nouvelle fonction, on a successivement

$$D_t^2 f(x, y) = h^2 D_{x^2}^2 f + 2hk D_{xy}^2 f + k^2 D_{y^2}^2 f,$$
$$D_t^3 f(x, y) = h^3 D_{x^3}^3 f + 3h^2k D_{x^2y}^3 f + 3hk^2 D_{xy^2}^3 f + k^3 D_{y^3}^3 f,$$
. . . .
$$D_t^n f(x, y) = h^n D_{x^n}^n f + \frac{n}{1} h^{n-1}k D_{x^{n-1}y}^n f + \frac{n(n-1)}{1.2} h^{n-2}k^2 D_{x^{n-2}y^2}^n f + \ldots + k^n D_{y^n}^n f.$$

On peut représenter cette dérivée d'ordre n par la formule symbolique

$$(8) \qquad D_t^n f(x, y) = (h D_x + k D_y)^n f(x, y).$$

102. Théorème VI. — *Lorsqu'une fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans des cercles décrits des points x_0 et y_0 comme centres, avec des rayons R et R', elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$ et convergente dans les mêmes cercles.*

Soient $x_0 + h$ et $y_0 + k$ des points fixes situés dans les cercles R et R'; posons

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt,$$

et assujettissons la nouvelle variable t à rester dans le cercle décrit du point $t = 0$ comme centre avec un rayon égal à l'unité; les différences $x - x_0 = ht$, $y - y_0 = kt$ ayant des modules respectivement inférieurs ou égaux à ceux de h et de k et, par conséquent, inférieurs à R et R', les points x et y resteront situés dans les cercles R et R'. La fonction $f(x, y)$ sera donc une fonction holomorphe de t dans cette étendue; nous la représenterons par $F(t)$,

$$F(t) = f(x, y) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

D'après le théorème I, cette fonction est développable en une série ordonnée suivant les puissances positives, entières et croissantes de t, convergente dans le cercle de rayon 1, et l'on a, en appliquant la formule de Maclaurin (n° 95),

$$F(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{F^n(0)\, t^n}{1.2\ldots n}.$$

Mais on a symboliquement

$$F^n(t) = (h D_x + k D_y)^n f(x, y),$$
$$F^n(0) = (h D_{x_0} + k D_{y_0})^n f(x_0, y_0);$$

on en déduit

$$F(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{t^n (h D_{x_0} + k D_{y_0})^n f(x_0, y_0)}{1.2\ldots n}.$$

Si maintenant on fait $t = 1$, d'où

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + k,$$

la formule précédente devient

$$(9) \qquad f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(h D_{x_0} + k D_{y_0})^n f(x_0, y_0)}{1.2\ldots n}.$$

La fonction $f(x, y)$ est développée suivant les puissances entières, positives et croissantes des différences $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

103. *Remarques.* — Les fonctions de plusieurs variables indépendantes présentent des particularités que nous n'avons pas rencontrées dans l'étude des fonctions à une seule variable. Considérons d'abord une fonction de deux variables

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

qui soit le quotient de deux fonctions φ et ψ holomorphes dans les aires A et B. Supposons qu'aux points $x = x_0$, $y = y_0$ situés dans ces aires les fonctions φ et ψ deviennent nulles à la fois; la fonction $f(x, y)$ prendra la forme $\frac{0}{0}$; nous allons voir qu'en ces points, c'est-à-dire pour ces valeurs particulières des variables, la fonction $f(x, y)$ est indéterminée. Si l'on pose $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, x' et y' étant de nouvelles variables comprises dans des cercles ayant pour centres les points x_0 et y_0, les fonctions holomorphes φ et ψ sont développables en des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières, positives et croissantes de x' et de y', et l'on a

$$f(x, y) = \frac{ax' + by' + cx'^2 + \ldots}{a'x' + b'y' + c'x'^2 + \ldots}.$$

En désignant par u' le rapport $\frac{y'}{x'}$, cette expression devient

$$f(x, y) = \frac{a + bu + cx' + \ldots}{a' + b'u + c'x' + \ldots},$$

et se réduit à

$$\frac{a + bu}{a' + b'u}$$

pour $x' = 0$. Le rapport u étant arbitraire, on en conclut que, pour $x = x_0$, $y = y_0$, la fonction proposée $f(x, y)$ admet une infinité de valeurs différentes, dépendant des directions suivant lesquelles les points mobiles x et y tendent vers les points fixes x_0 et y_0. Il est clair que les

systèmes de valeurs de x et y pour lesquels la fonction $f(x, y)$ est indéterminée sont en nombre fini.

Considérons maintenant une fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

de n variables, qui soit le quotient de deux fonctions holomorphes φ et ψ. La même indétermination se présentera pour tous les systèmes de valeurs des variables qui annulent à la fois les fonctions φ et ψ. Il y a un nombre infini de ces systèmes; car il reste $n - 2$ variables arbitraires.

CHAPITRE IV.

PÉRIODES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

104. Soit $f(z, u) = 0$ une équation algébrique et entière, irréductible, et du degré m par rapport à u. La variable z part d'un point fixe z_0, qui est un point ordinaire, la fonction ayant une valeur déterminée u_0; nous nous proposons d'étudier les diverses valeurs de l'intégrale définie

$$V = \int_{z_0}^{z} u\,dz,$$

quand la variable z va du point initial z_0 à un point quelconque z du plan par différents chemins.

Soient $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ les m racines de l'équation au point initial z_0. Marquons dans le plan les points singuliers, c'est-à-dire les pôles et les points critiques de la fonction algébrique u de z; joignons-les au point z_0 par des lacets, et, s'il y a des lacets complexes unissant plus de deux racines, décomposons-les en lacets binaires, unissant chacun deux racines, comme nous l'avons dit au n° 38. Nous avons expliqué comment on s'y prend pour former un système de $m - 1$ lacets binaires fondamentaux, permettant de passer de la racine u_0 à toutes les autres. Un système fondamental est formé d'un premier lacet unissant la racine u_0 à une autre u_1, d'un second lacet unissant l'une des deux racines u_0 ou u_1 à une autre u_2, d'un troisième lacet unissant l'une des racines u_0, u_1, u_2 à une autre $u_3, \ldots$, enfin d'un dernier lacet unissant l'une des racines $u_0, u_1, \ldots, u_{m-2}$ à la dernière u_{m-1}. Nous avons démontré que, abstraction faite des lacets parcourus chacun deux fois successivement dans des sens contraires, et dont la suppression ne change pas la valeur de l'intégrale, il n'existe qu'un chemin formé de lacets

fondamentaux conduisant d'une racine u_α à une autre racine u_β, celui qui contient le moindre nombre de lacets; nous l'avons désigné par $(V)_\alpha^\beta$.

Toute ligne fermée qui, partant du point initial z_0, revient à ce point, se ramène à une suite de lacets parcourus dans un sens et un ordre déterminés. Nous appellerons *cycle* une ligne fermée telle que, si on la parcourt avec la racine u_α prise comme valeur initiale, on reproduit à la fin la même racine u_α; en remplaçant cette ligne par une suite de lacets, on passera par une série de racines, telles que u_α, u_β, u_γ, u_δ, u_α, et le cycle sera représenté par

$$(a)_\alpha^\beta + (b)_\beta^\gamma + (c)_\gamma^\delta + (d)_\delta^\alpha.$$

Si l'on parcourt cette suite de lacets en commençant par l'un quelconque d'entre eux, et adoptant comme valeur initiale la racine correspondant à l'origine du lacet, on reproduit à la fin cette même racine; ainsi nous pourrons écrire le cycle précédent sous l'une des formes

$$(b)_\beta^\gamma + (c)_\gamma^\delta + (d)_\delta^\alpha + (a)_\alpha^\beta,$$
$$(c)_\gamma^\delta + (d)_\delta^\alpha + (a)_\alpha^\beta + (b)_\beta^\gamma,$$
$$(d)_\delta^\alpha + (a)_\alpha^\beta + (b)_\beta^\gamma + (c)_\gamma^\delta.$$

105. Il n'existe pas de cycle effectif composé uniquement de lacets fondamentaux; car un pareil cycle, conduisant d'une racine u_α à la même racine u_α, se ramène à un chemin nul $(V)_\alpha^\alpha$, par la suppression des lacets parcourus chacun deux fois successivement dans des sens contraires. Un cycle effectif contiendra donc un ou plusieurs lacets autres que les $m-1$ lacets choisis comme lacets fondamentaux. Nous appellerons *cycle simple* un cycle qui ne contient qu'un seul lacet autre que les lacets fondamentaux. Nous allons faire voir que tout cycle renfermant plusieurs lacets autres que les lacets fondamentaux peut être regardé comme la réunion de plusieurs cycles simples. Par exemple, un cycle renfermant les deux lacets non fondamentaux $(a)_\alpha^\beta$, $(b)_\gamma^\delta$ peut être représenté par

$$(a)_\alpha^\beta + (V)_\beta^\gamma + (b)_\gamma^\delta + (V)_\delta^\alpha,$$

$(V)_\beta^\gamma$ et $(V)_\delta^\alpha$ étant les chemins formés de lacets fondamentaux qui conduisent de la racine u_β à la racine u_γ, ou de u_δ à u_α; si l'on remplace

le chemin $(V)_\beta^\gamma$ par le chemin $(V)_\beta^\alpha + (V)_\alpha^\gamma$, qui ne diffère du premier que par des lacets égaux et de sens contraires, le cycle devient

$$(a)_\alpha^\beta + (V)_\beta^\alpha + (V)_\alpha^\gamma + (b)_\gamma^\delta + (V)_\delta^\alpha;$$

il se compose alors des deux cycles simples

$$(a)_\alpha^\beta + (V)_\beta^\alpha, \quad (V)_\alpha^\gamma + (b)_\gamma^\delta + (V)_\delta^\alpha,$$

parcourus successivement avec la racine initiale u_α.

On peut ramener les cycles relatifs aux différentes racines à ceux qui se rapportent à une racine particulière u_0; en effet, par l'introduction de deux chemins égaux et contraires, un cycle $(C)_\alpha^\alpha$ relatif à la racine u_α devient

$$(C)_\alpha^\alpha + (V)_\alpha^0 + (V)_0^\alpha,$$

ou

$$(V)_0^\alpha + (C)_\alpha^\alpha + (V)_\alpha^0,$$

et se rapporte alors à la racine u_0.

106. En général, une ligne fermée, partant du point z_0 et revenant à ce point, conduit à une racine u_α différente de la racine initiale u_0. Ce chemin $(C)_0^\alpha$ peut être remplacé par le chemin

$$(C)_0^\alpha + (V)_\alpha^0 + (V)_0^\alpha,$$

composé du cycle $(C)_0^\alpha + (V)_\alpha^0$ ramenant la racine initiale u_0, suivi du chemin $(V)_0^\alpha$ qui, par des lacets fondamentaux, conduit de la racine u_0 à la racine u_α. On en conclut que toutes les lignes fermées qui, partant du point z_0, reviennent à ce point, la fonction ayant la valeur initiale u_0, se ramènent à des suites de cycles simples, suivies de l'un des chemins

$$(V)_0^0, \quad (V)_0^1, \quad (V)_0^2, \ldots, \quad (V)_0^{m-1},$$

formés uniquement de lacets fondamentaux.

Tous les chemins qui vont du point z_0 à un point quelconque z du plan se ramènent à un chemin déterminé, par exemple à la droite $z_0 z$, allant du point z_0 au point z, ou à une ligne fermée $(C)_0^\alpha$, suivie de ce chemin déterminé.

Il est facile, d'après cela, de trouver les diverses valeurs de la fonction V au point z. Appelons $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ les intégrales définies relatives aux différents cycles simples, V_0^α l'intégrale relative à la ligne fermée $(V)_0^\alpha$, V_α l'intégrale définie relative à la droite $z_0 z$ quand on parcourt cette droite avec la valeur initiale u_α de la fonction u. Une ligne fermée quelconque $(C)_0^\alpha$ se ramenant à une somme de cycles simples suivie du chemin $(V)_0^\alpha$, l'intégrale définie relative à cette ligne est

$$n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3 \ldots + V_0^\alpha,$$

$n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant des nombres entiers; on décrit ensuite la droite $z_0 z$ avec la racine u_α, ce qui donne un nouvel accroissement V_α de l'intégrale définie, de sorte que la fonction V acquiert au point z la valeur

$$V = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + \ldots + V_0^\alpha + V_\alpha.$$

On en conclut que, pour chaque valeur de z, la fonction V admet les m valeurs

$$V_0, \quad V_0^1 + V_1, \quad V_0^2 + V_2, \ldots, \quad V_0^{m-1} + V_{m-1},$$

augmentées de multiples quelconques de certaines périodes ω_1, $\omega_2, \omega_3, \ldots$.

En intégrant par parties, on a

$$V = \int_{z_0}^{z} u\, dz = uz - u_0 z_0 - \int_{u_0}^{u} z\, du;$$

z étant une fonction de u définie par l'équation proposée, on peut regarder V comme une fonction de u; si n est le degré de l'équation par rapport à z, on en conclut qu'à chaque valeur de u correspondent n valeurs de V, augmentées de multiples des périodes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$.

107. Examinons maintenant les différentes sortes de points singuliers. Considérons d'abord un système circulaire de p racines finies se permutant autour d'un point critique a; si l'on pose $z = a + z'$, ces racines sont représentées par une même série convergente (n° 96)

$$u = b + b' z'^{\frac{q}{p}} + b'' z'^{\frac{q+1}{p}} + \ldots. \tag{1}$$

Si, lorsque la variable z se rapproche du point a, la fonction algébrique u a l'une des valeurs faisant partie du système des p racines, l'intégrale tend vers une valeur finie A, et l'on a

$$(2) \qquad V = A + bz' + \frac{p}{p+q} b' z'^{\frac{p+q}{p}} + \frac{p}{p+q+1} b'' z'^{\frac{p+q+1}{p}} + \ldots.$$

La branche correspondante de la fonction V, dans le voisinage du point a, acquiert donc p valeurs différentes, qui se permutent circulairement, et, par conséquent, le point a est un point critique algébrique par rapport à cette branche de la fonction V.

Au système circulaire des p racines correspondent p lacets binaires positifs

$$(a)_{\alpha_0}^{\alpha_1}, (a)_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \ldots, (a)_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}}, (a)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0};$$

la partie de l'intégrale définie relative au petit cercle étant infiniment petite pour chaque lacet, l'intégrale relative à un lacet $(a)_\alpha^\beta$ est la somme des intégrales relatives à la ligne $z_0 a$, décrite une première fois avec la racine u_α, et une seconde fois, en sens contraire, avec la racine u_β. La somme des intégrales relatives aux p lacets binaires positifs est identiquement nulle; car chaque élément de la ligne $z_0 a$ est parcouru deux fois, dans des sens contraires, avec la même racine. On peut remarquer, d'ailleurs, que la somme des parties infiniment petites relatives au petit cercle est aussi identiquement nulle; car, lorsque la variable z' décrit p fois successivement ce petit cercle, l'intégrale V donnée par la formule précédente reprend la même valeur. Si donc on représente par a_α^β l'intégrale définie relative au lacet $(a)_\alpha^\beta$, on a

$$a_{\alpha_0}^{\alpha_1} + a_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}} + a_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0} = 0;$$

on en déduit

$$a_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0} = - a_{\alpha_0}^{\alpha_1} - a_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \ldots - a_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}}.$$

Nous dirons que deux chemins conduisant d'une racine u_α à une racine u_β sont *équivalents*, relativement à la racine u_α, lorsque les intégrales définies suivant ces deux lignes, parcourues avec la racine initiale u_α, sont égales. Il résulte de ce qui précède que le $p^{ième}$ lacet positif $(a)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0}$ du système circulaire est équivalent, relativement à la ra-

cine $u_{\alpha_{p-1}}$, au chemin formé par les $p-1$ premiers parcourus en sens négatif. On peut donc réduire les p lacets de chaque système circulaire à $p-1$ d'entre eux.

Dans le cas particulier où le système circulaire ne se compose que de deux racines u_α et u_β, quand on décrit le lacet (a) avec la racine initiale u_α dans un sens ou dans l'autre, on arrive toujours à la racine u_β; lorsque l'intégrale suivant le petit cercle est, comme nous le supposons, infiniment petite, l'intégrale définie relative au lacet a la même valeur, quel que soit le sens dans lequel on décrit le lacet. Ainsi, avec la racine initiale u_α, on peut décrire le lacet indifféremment dans un sens ou dans l'autre. La même chose a lieu quand on décrit le lacet avec la racine initiale u_β. En outre, les intégrales que l'on obtient dans ces deux cas sont égales et de signes contraires.

Un système circulaire de p racines infinies d'un degré inférieur à l'unité jouit des mêmes propriétés. Il suffit de supposer que, dans la formule (1), le nombre entier q est négatif et plus petit que p en valeur absolue; l'intégrale tend vers une valeur finie A, quand z' tend vers zéro; la branche de la fonction V, représentée par la formule (2), acquiert, dans le voisinage du point a, p valeurs finies qui se permutent circulairement, et le point a est un point critique algébrique par rapport à cette branche de la fonction. Les intégrales définies relatives au petit cercle étant infiniment petites, tout ce que nous avons dit des lacets subsiste sans modification.

108. Considérons actuellement un pôle a de la fonction u; la racine, qui devient infinie en ce point, est représentée par la série (n° 96)

$$(3)\qquad u = Az'^{-q} + Bz'^{1-q} + \ldots + Hz'^{-1} + L + Mz' + \ldots.$$

La branche correspondante de la fonction V devient infinie en ce point, et elle est représentée dans le voisinage par la série

$$(4)\qquad V = \frac{A}{1-q} z'^{1-q} + \frac{B}{2-q} z'^{2-q} + \ldots + H\log z' + K + Lz' + \ldots.$$

Quand la variable z tourne autour du point a, la branche de la fonction V acquiert un nombre infini de valeurs formant une progression

arithmétique dont la raison est $2\pi H i$. Le point a, par rapport à cette branche de la fonction V, est un point singulier logarithmique (nº 60), à moins que le coefficient H ne soit nul, et dans ce cas le point a serait un pôle de la fonction V. Supposons qu'on décrive le lacet (a) joignant le point initial z_0 au pôle a avec la racine u_α, qui devient infinie au point a, on revient au même point z_0 avec la même racine u_α; la droite $z_0 z_1$, qui joint le point z_0 à un point z_1 du petit cercle, étant décrite dans des sens contraires avec la même racine, l'intégrale définie relative au lacet se réduit à la partie relative au petit cercle, c'est-à-dire, d'après la formule (4), à $2\pi H i$. Le lacet $(a)_\alpha^\alpha$ relatif au pôle a ne fait pas partie des lacets fondamentaux; il forme à lui seul un cycle simple, que nous appellerons *cycle polaire*, et donne la période $2\pi H i$.

109. Considérons enfin un système circulaire de p racines infinies, d'un degré égal ou supérieur à l'unité, se permutant autour d'un point critique a. Si l'on pose $z = a + z'$, ces p racines sont représentées par la série convergente

$$(5)\qquad u = A z'^{-\frac{q}{p}} + B z'^{\frac{1-q}{p}} + C z'^{\frac{2-q}{p}} + \ldots + H z'^{-1} + L + M z'^{\frac{1}{p}} + \ldots,$$

dans laquelle le nombre entier q est égal ou supérieur à p. Si, lorsque z se rapproche du point a, la fonction algébrique u a l'une des valeurs faisant partie du système des p racines, l'intégrale devient infinie, et l'on a

$$(6)\quad V = -\frac{p}{q-p} A z'^{\frac{-q+p}{p}} + \ldots + H \log z' + K + L z' + \frac{p}{p+1} M z'^{\frac{p+1}{p}} + \ldots.$$

Quand la variable tourne autour du point a, la branche correspondante de la fonction V acquiert d'abord p valeurs différentes; après p tours, la première valeur se reproduit augmentée de $2p\pi H i$, puis la seconde valeur augmentée de la même quantité, et ainsi de suite. La branche de la fonction V acquiert donc p séries de valeurs formant des progressions arithmétiques dont la raison est $2p\pi H i$. Le point a, par rapport à cette branche de la fonction V, est un point singulier logarithmique, à moins que la constante H ne soit nulle, et dans ce cas ce serait un point critique algébrique.

Le lacet qui unit le point initial z_0 au point a est la réunion de p

lacets binaires positifs; sur chacun d'eux, la partie de l'intégrale définie qui se rapporte au petit cercle n'est plus infiniment petite; si l'on fait la somme des intégrales définies relatives aux p lacets binaires positifs, chaque élément de la droite $z_0 z_1$, qui joint le point z_0 à un point z_1 du petit cercle, étant parcouru dans des sens contraires avec la même racine, la somme des intégrales se réduit à la partie relative au petit cercle décrit p fois successivement, c'est-à-dire, d'après la formule (6), à $2p\pi \mathrm{H}i$. On a ainsi

$$a_{\alpha_0}^{\alpha_1} + a_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0} = 2p\pi \mathrm{H}i.$$

Les p lacets binaires forment un cycle que nous appellerons encore cycle polaire, et qui donne la période $2p\pi\mathrm{H}i$.

110. Pour étudier la fonction V, quand la variable z devient très-grande, on pose $z = \frac{1}{z'}$, $u = vz'^2$, et la fonction V prend la forme

$$\mathrm{V} = -\int_{z'_0}^{z'_1} v\,dz';$$

l'équation algébrique $f(z,u) = 0$ se change en une équation algébrique $\mathrm{F}(z', v) = 0$ entre z' et v. Toutes les circonstances que nous venons de rencontrer peuvent se présenter ici pour $z' = 0$. Nous allons du point z_0 au point O′, sur la sphère, par un arc de grand cercle; si pour $z' = 0$ les m racines de l'équation $\mathrm{F}(z', v) = 0$ sont simples et finies, chacune des branches de la fonction V est une fonction holomorphe de z', dans le voisinage du point $z' = 0$. Si, dans le voisinage du point O′, l'équation a un système circulaire de p racines finies ou de p racines infinies d'un degré inférieur à l'unité, l'intégrale reste finie, et la branche correspondante de la fonction V acquiert p valeurs différentes se permutant circulairement quand la variable tourne autour du point O′, qui, par rapport à cette branche, est un point critique algébrique. Si le point O′ est pôle par rapport à une racine, la valeur correspondante de l'intégrale devient infinie en ce point et la branche de la fonction V acquiert une infinité de valeurs en progression arithmétique; le point O′ est, relativement à cette branche,

un point singulier logarithmique, à moins que le coefficient H ne soit nul, et dans ce cas ce serait un pôle. Enfin, si l'équation $F(z', v) = 0$ a un système circulaire de p racines infinies d'un degré égal ou supérieur à un, les valeurs correspondantes de l'intégrale deviennent infinies; quand la variable tourne autour du point O', la branche de la fonction V acquiert p valeurs augmentées chacune d'un multiple quelconque de la période $2p\pi Hi$; le point O' est, par rapport à cette branche de la fonction V, un point singulier logarithmique, à moins que le coefficient H ne soit nul, et dans ce cas ce serait un point critique algébrique.

Nous savons (nº 39) qu'au lacet qui sur la sphère unit le point z_0 au point O' correspond dans le plan un circuit formé d'une droite $z_0 l$ et d'une circonférence d'un très-grand rayon, ayant pour centre le point O. L'intégrale définie, relative à l'un des lacets binaires $(O')_\alpha^\beta$ décrit avec la racine initiale u_α, et dans le sens négatif pour un observateur placé en O', est égale à l'intégrale relative au circuit décrit avec la même racine dans le sens positif; le circuit se ramenant à la suite des lacets (a_1), (a_2), (a_3),..., qui correspondent aux valeurs finies de z, on en conclut que chaque lacet binaire $(O')_\alpha^\beta$ est équivalent au chemin formé par certains lacets binaires tracés dans le plan. La considération du lacet (O') n'introduit donc aucune valeur nouvelle de l'intégrale définie, ni aucune nouvelle période.

Cas où l'intégrale reste finie sur toute la sphère.

111. Il résulte de ce que nous avons dit précédemment que, si l'équation proposée $f(z, u) = 0$ pour aucune valeur finie de z, et l'équation transformée $F(z', v) = 0$ pour $z' = 0$, n'admettent des racines infinies d'un degré égal ou supérieur à l'unité, les différentes branches de la fonction V conservent des valeurs finies sur toute la sphère, et, par conséquent, que la fonction V ne peut devenir infinie que par l'addition d'un nombre infini de périodes. Cette condition d'ailleurs est nécessaire. Dans ce cas, il n'y a pas de cycle polaire; toutes les périodes proviennent des cycles simples que l'on peut former avec les lacets binaires relatifs aux points critiques.

Les p lacets binaires relatifs à un même système circulaire de racines se réduisant à $p-1$ d'entre eux, le nombre des lacets binaires dans le plan est $N = \Sigma(p-1)$. Nous en avons pris $m-1$ pour former un système de lacets fondamentaux; il en reste $N-(m-1)$ autres; chacun de ceux-ci avec des lacets fondamentaux formant un cycle simple, le nombre des périodes est $N-(m-1)$; mais on peut en général les réduire à un moindre nombre de périodes distinctes. Voici comment on se rend compte de la possibilité de cette réduction.

Nous remarquons d'abord que, par une transformation facile, on peut faire en sorte que les points diamétralement opposés O et O′ sur la sphère soient des points ordinaires. Soient, en effet, z_1 et z_2 deux valeurs de z pour lesquelles l'équation $f(z, u) = 0$ n'admette que des racines simples et finies; si l'on pose $z = \frac{z_2 z' + a z_1}{z' + a}$, a étant une constante prise à volonté, les valeurs $z' = 0$, $z' = \infty$ correspondent respectivement aux valeurs $z = z_1$, $z = z_2$; si l'on pose en outre $u = \frac{u'(z'+a)^2}{a(z_2 - z_1)}$, l'intégrale devient

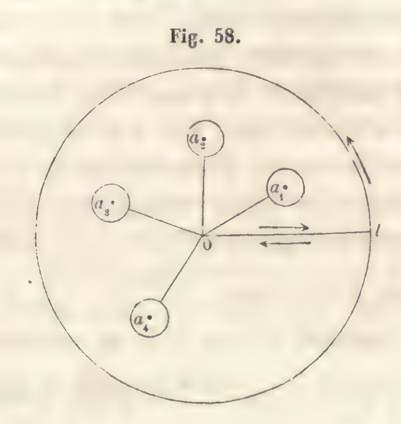
$$V = \int_{z_0}^{z} u\,dz = \int_{z'_0}^{z'} u'\,dz',$$

et l'équation proposée $f(z, u) = 0$ du degré m en u se change en une équation $F(z', u') = 0$ du même degré en u'. Sur la sphère qui sert à figurer la nouvelle variable z', les points O et O′, c'est-à-dire $z' = 0$ et $z' = \infty$, sont des points ordinaires.

Supposons donc que les points O et O′ sur la sphère soient des points ordinaires; dans l'intégrale V faisons partir la variable de l'origine O, la fonction u ayant une valeur initiale déterminée u_0; joignons le point O aux différents points critiques $a_1, a_2, \ldots$ du plan par des lacets (*fig.* 58); le nombre N′ des lacets binaires est maintenant plus grand que N, puisqu'on a ramené dans le plan le point O′ qui était primitivement un point critique. Le point O′ sur la sphère étant actuellement un point ordinaire, le lacet (O′), parcouru avec une racine initiale quelconque u_α, ramène cette racine et donne une intégrale définie nulle; le circuit correspondant dans le plan jouit de la même propriété. Si donc on imagine le circuit parcouru dans le sens positif successivement avec chacune des racines, ce qui fait m circuits diffé-

rents, et si l'on écrit que la somme des intégrales relatives aux lacets binaires qui entrent effectivement dans chaque circuit est nulle, on obtiendra m relations linéaires entre ces intégrales. Chacune d'elles donne une relation entre les périodes; car, puisqu'un circuit peut être ramené à une suite de cycles simples par l'introduction de chemins formés

Fig. 58.



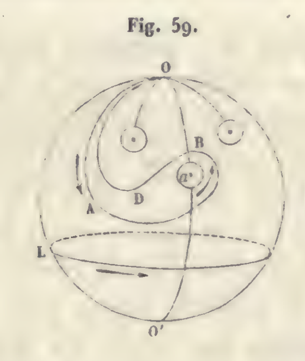
de lacets fondamentaux et parcourus chacun deux fois dans des sens contraires (n° 105), il suffit de remplacer dans l'équation les termes qui se rapportent aux lacets non fondamentaux par les périodes correspondantes.

Mais les m relations ainsi obtenues ne forment que $m - 1$ relations distinctes. Remarquons en effet qu'un lacet binaire positif $(a)_g^h$ entre dans un circuit et dans un seul; car si, partant de l'entrée de ce lacet avec la racine u_g, on remonte les lacets précédents, on arrive à l'entrée du circuit avec une racine déterminée u_α; le lacet positif $(a)_g^h$ entre donc dans le circuit $(C)_\alpha^\alpha$. Le dernier lacet binaire positif du système circulaire auquel appartient le lacet $(a)_g^h$ entre aussi dans un circuit $(C)_\beta^\beta$; comme on a remplacé ce lacet par l'ensemble des $p - 1$ premiers parcourus en sens négatif, il s'ensuit que le lacet binaire négatif $(-a)_h^g$ entre dans le circuit $(C)_\beta^\beta$. Ainsi, après la substitution, chaque lacet binaire entre dans deux circuits; dans l'un il est décrit dans le sens positif, dans l'autre en sens contraire; la période correspondante entre, par conséquent, avec des signes contraires dans les équations relatives à ces deux circuits. Si donc on ajoute les premiers membres des équations fournies par les m circuits, la somme totale, étant formée de termes

égaux deux à deux et de signes contraires, est identiquement nulle, et les m équations se réduisent à $m-1$. On aura ainsi $m-1$ relations linéaires entre les $N'-(m-1)$ périodes; nous allons faire voir que l'on peut, à l'aide de ces relations, exprimer $m-1$ périodes en fonction des autres, de sorte que le nombre des périodes distinctes est $N'-2(m-1)$.

112. Sur la sphère, les lacets considérés jusqu'à présent, et que nous appellerons *lacets de première espèce*, sont formés d'arcs de grand cercle allant du point O aux différents points critiques et de petits cercles décrits autour de ces points. Nous avons désigné par $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ les valeurs des m racines de l'équation au point O; désignons par u'_0, $u'_1, \ldots, u'_{m-1}$ les valeurs de ces racines au point O' quand la variable z va de O à O', en suivant le demi-méridien OLO' qui se projette sur le rayon Ol du circuit (*fig.* 59). Nous pourrons effectuer la permutation

Fig. 59.



des racines au moyen de lacets partant du point O' et formés, comme les précédents, d'arcs de grand cercle allant du point O' aux différents points critiques et de petits cercles décrits autour de ces points; mais rien n'empêche de regarder ces nouveaux lacets comme partant aussi de l'origine O; il suffit de faire précéder chacun d'eux du demi-méridien OLO', et de le faire suivre du même demi-méridien O'LO en sens inverse. Par exemple, si un lacet partant du point O' permute les deux racines u'_α et u'_β, il est évident que le même lacet, complété comme nous l'avons dit, permutera les deux racines u_α et u_β. Nous donnerons à ces nouveaux lacets ainsi complétés le nom de *lacets de seconde espèce*, et nous les distinguerons de ceux de première espèce, en accentuant la

lettre qui indique le point critique. Remarquons que, quand deux lacets relatifs au même point critique et d'espèces différentes sont décrits dans le sens positif, le petit cercle est parcouru dans le même sens; car, dans les deux cas, l'aire du cercle doit être à gauche de l'observateur.

Soient

$$(a)_{g_0}^{g_1}, (a)_{g_1}^{g_2}, \ldots, (a)_{g_{p-1}}^{g_0}$$

les p lacets binaires de première espèce qui se rapportent à un système de p racines se permutant circulairement autour du point critique a. Si l'on remonte la suite des lacets de première espèce à partir de l'entrée du lacet (a), successivement avec chacune des racines $u_{g_0}, u_{g_1}, \ldots, u_{g_{p-1}}$, on arrivera à l'origine du circuit avec p racines différentes $u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{p-1}}$; il en résulte que les p lacets binaires entrent respectivement dans les p circuits

$$(\mathrm{C})_{\alpha_0}^{\alpha_0}, (\mathrm{C})_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \ldots, (\mathrm{C})_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}.$$

Le lacet de seconde espèce (a'), parcouru dans le sens positif, peut être remplacé par la ligne OABDO, ou par la ligne OABO suivie de la ligne OBDO. Si on le décrit avec la valeur initiale u_{α_0}, la ligne OABO, se ramenant à la première partie du circuit $(\mathrm{C})_{\alpha_0}^{\alpha_0}$, depuis l'origine du circuit jusqu'à la fin du lacet $(a)_{g_0}^{g_1}$, conduit à la racine u_{g_1}; la seconde ligne OBDO se ramenant à la première partie du circuit $(\mathrm{C})_{\alpha_1}^{\alpha_1}$, depuis l'entrée du lacet $(a)_{g_1}^{g_2}$ jusqu'à l'origine du circuit en remontant, conduit à la racine u_{α_1}; le lacet de seconde espèce unit donc les deux racines u_{α_0} et u_{α_1}; on le représentera par $(a')_{\alpha_0}^{\alpha_1}$. En décrivant ce même lacet avec la valeur initiale u_{α_1}, on arrivera à la racine u_{α_2}, et ainsi de suite. On obtiendra de la sorte les p lacets binaires de seconde espèce.

$$(a')_{\alpha_0}^{\alpha_1}, (a')_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \ldots, (a')_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0},$$

permutant circulairement les p racines $u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{p-1}}$. A chaque système circulaire de p lacets binaires de première espèce correspond ainsi un système de p lacets binaires de seconde espèce.

Il résulte aussi de ce qui précède que les lacets de seconde espèce qui changent une racine déterminée u_α en une autre sont ceux qui correspondent aux lacets binaires de première espèce entrant effectivement dans le circuit $(\mathrm{C})_\alpha^\alpha$.

Les m circuits nous ont donné m relations entre les périodes, et nous avons vu que la somme des premiers membres est identiquement nulle. On ne peut avoir une somme identiquement nulle en ne prenant qu'une partie des équations. Supposons, en effet, que la somme des résultats fournis par les n circuits $(C)_0^0$, $(C)_1^1, \ldots, (C)_{n-1}^{n-1}$, n étant plus petit que m, soit identiquement nulle. Si un lacet binaire de première espèce $(a)_{g_0}^{g_1}$ entre dans l'un de ces circuits, chacun des autres lacets binaires appartenant au même système circulaire entrera aussi dans l'un d'eux; ceci est nécessaire pour que la somme soit identiquement nulle. Soit u_α l'une quelconque des racines de la suite $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; les lacets de seconde espèce qui changent cette racine en une autre correspondent aux lacets de première espèce qui entrent dans le circuit $(C)_\alpha^\alpha$; si $(a)_{g_0}^{g_1}$ est l'un d'eux, le lacet binaire suivant $(a)_{g_1}^{g_2}$ du même système circulaire entre dans un autre des n circuits, par exemple dans $(C)_\beta^\beta$; le lacet de seconde espèce changera la racine u_α en une autre u_β de la même suite. Ainsi, en partant du point O′ avec la même valeur initiale u'_0, quel que soit le chemin suivi par la variable, la fonction ne pourrait acquérir que n valeurs différentes $u'_0, u'_1, \ldots, u'_{n-1}$, ce qui est impossible, puisque l'équation proposée du degré m est supposée irréductible.

Cela posé, considérons les m relations entre les périodes, et négligeons la dernière qui est une combinaison des précédentes; nous aurons un système de $m-1$ équations linéaires et homogènes entre les périodes, ayant tous leurs coefficients égaux à $+1$ ou à -1, et telles qu'une période n'entre que dans une équation ou dans deux avec des signes contraires. Soit ω_1 un terme de la première équation, on en tirera la valeur de la période ω_1 exprimée par une somme algébrique d'autres périodes; si elle n'entre pas dans les $m-2$ autres équations, celles-ci formeront un système de $m-2$ équations ne contenant pas ω_1 et jouissant des mêmes propriétés que les précédentes; si elle entre dans une autre équation, on remplacera celle-ci par l'équation que l'on obtient en l'ajoutant à la première, membre à membre, et l'on aura encore un système de $m-2$ équations ne contenant plus ω_1 et jouissant des mêmes propriétés. Soit ω_2 un terme de la première équation du second système; on en tirera la valeur de ω_2 exprimée par une somme algébrique des périodes suivantes : si ω_2 entre dans une autre équation, on remplacera celle-ci par l'équation que l'on obtient en l'ajoutant à la

première membre à membre, et l'on obtiendra un système de $m-3$ équations ne contenant plus ω_1 et ω_2 et jouissant des mêmes propriétés. En continuant de la sorte, comme on n'arrivera pas à une identité, on sera conduit à une équation entre les périodes $\omega_{m-1}, \omega_m, \ldots$, qui donnera la période ω_{m-1} par une somme algébrique des périodes suivantes $\omega_m, \omega_{m+1}, \ldots$. En remontant de proche en proche, on obtiendra les $m-1$ périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}$ exprimées par des sommes de multiples des autres périodes.

113. Appliquons les considérations précédentes à l'intégrale définie

$$V = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{G(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}} = \int_0^z u\,dz,$$

u étant défini par l'équation du second degré

$$u^2 = \frac{1}{G(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}.$$

Marquons dans le plan les n points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans l'ordre où ils se présentent quand le rayon vecteur tourne dans le sens positif, et formons les lacets qui joignent l'origine à ces points critiques. Pour $z=0$, la fonction u a deux valeurs, u_0 et $u_1 = -u_0$; chaque lacet unit ces deux racines. Les deux valeurs de u deviennent infinies en chacun des points critiques; mais, comme elles sont du degré $\frac{1}{2}$ inférieur à l'unité, l'intégrale conserve une valeur finie et acquiert deux valeurs différentes quand la variable z tourne autour de l'un de ces points. L'intégrale définie relative à l'un des lacets (a) se réduit à la partie relative à la droite Oa parcourue deux fois dans des sens contraires avec des valeurs de u égales et de signes contraires, et par conséquent à deux fois l'intégrale suivant la droite Oa. Si donc on appelle $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les intégrales définies relatives aux droites $Oa_1, Oa_2, \ldots, Oa_n$, décrites avec la valeur initiale u_0, les intégrales relatives aux lacets seront $2A_1$, $2A_2, \ldots, 2A_n$. Le premier lacet servira de lacet fondamental, les autres avec le premier formeront $n-1$ cycles simples, et produiront, par conséquent, $n-1$ périodes

$$\omega_1 = 2A_1 - 2A_2, \quad \omega_2 = 2A_1 - 2A_3, \ldots, \quad \omega_{n-1} = 2A_1 - 2A_n.$$

Soit V_0 l'intégrale définie relative à la droite qui va de l'origine à un point quelconque z du plan, quand on prend la valeur initiale u_0; un chemin formé du lacet fondamental (a_1) suivi de la droite Oz donnera $2A_1 - V_0$; car, après le lacet, la fonction u, ayant changé de signe, a en chaque point de la droite Oz une valeur égale et de signe contraire à celle qu'elle avait précédemment. On en conclut qu'à chaque valeur de z correspondent deux séries de valeurs de V, savoir V_0 et $2A_1 - V_0$, augmentées de multiples quelconques des périodes. Pour $z = a_1$, on a

$$V_0 = A_1, \quad 2A_1 - V_0 = A_1,$$

et les deux séries de valeurs de V sont égales entre elles; pour $z = a_2$, on a

$$V_0 = A_2, \quad 2A_1 - V_0 = 2A_1 - A_2 = A_2 + \omega_1,$$

et les deux séries de valeurs de V sont encore égales entre elles, etc.

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, $u = v z'^2$, on a

$$V = \int_{z_0}^{z} u\,dz = -\int_{z'_0}^{z'} v\,dz',$$

$$v^2 = \frac{z'^{n-4}}{G(1 - a_1 z')(1 - a_2 z')\ldots(1 - a_n z')}.$$

Lorsque $n = 2$, l'intégrale V n'admet qu'une période $\omega_1 = 2A_1 - 2A_2$. Le point O' sur la sphère, étant pôle de la fonction v, est un point critique logarithmique de la fonction V qui devient infinie en ce point; il en résulte la période polaire $\frac{2\pi i}{\sqrt{G}}$. Le lacet (O') pouvant être remplacé par les deux lacets successifs (a_1) et (a_2), on a

$$\omega_1 = 2A_1 - 2A_2 = -\frac{2\pi i}{\sqrt{G}}.$$

Quand n est plus grand que 2, la fonction V conserve une valeur finie sur toute la sphère. Lorsque n est impair, le point O' est un point critique par rapport à la fonction v, et les $n - 1$ périodes sont distinctes. Mais, lorsque n est pair, le point O' étant un point ordinaire, et l'in-

tégrale définie relative au lacet (O′), ou au circuit correspondant, étant nulle, on a

$$2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - \ldots - 2A_n = 0;$$

d'où résulte la relation linéaire

$$\omega_1 - \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = 0$$

entre les périodes, qui se réduisent à $n-2$ périodes distinctes. Ainsi, pour $n = 2n' - 1$ et $n = 2n'$, le nombre des périodes est le même et égal à $2n' - 2$. C'est ce qu'indique d'ailleurs la loi générale énoncée au n° **111**; dans les deux cas, il y a sur la sphère $2n'$ points critiques unissant chacun les deux racines de l'équation; on a donc $N' = 2n'$, et le nombre des périodes distinctes est $N' - 2 = 2n' - 2$.

C'est Cauchy qui a indiqué le premier d'une manière précise l'origine des périodes des intégrales définies (*Comptes rendus,* 1846). Nous nous sommes servis dans ce Chapitre du Mémoire de M. Puiseux sur les fonctions algébriques, que nous avons déjà cité (n° **34**), et du livre de MM. Clebsch et Gordan sur les fonctions abéliennes (1866).

LIVRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

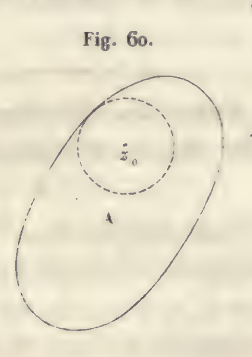
THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES FONCTIONS.

Fonctions monotropes.

114. Théorème I. — *Une fonction, holomorphe dans une certaine partie du plan, ne peut avoir toutes ses dérivées nulles en un point, à moins d'être constante dans cette étendue.*

Nous avons démontré (n° 87) que, lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie A du plan, elle admet une infinité de dérivées

Fig. 60.



successives, qui sont toutes holomorphes dans la même étendue. Supposons que la fonction ait toutes ses dérivées nulles au point z_0 situé dans cette partie du plan. Du point z_0 comme centre décrivons un cercle

compris dans la partie A du plan (*fig.* 60); la fonction $f(z)$ est développable, d'après la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $z - z_0$, et convergente dans ce cercle (nº 95). Si toutes les dérivées sont nulles au point z_0, la série se réduit à $f(z) = f(z_0)$; il en résulte que la fonction est constante dans le cercle, et par conséquent qu'en un point quelconque du cercle toutes ses dérivées sont nulles. D'un point z_1 pris à volonté dans le premier cercle, comme centre, décrivons un second cercle situé aussi dans la partie A du plan; on verra de même que la fonction $f(z)$ est constante dans ce second cercle. En continuant ainsi de proche en proche, on démontrera que la fonction est constante dans toute l'étendue de l'aire A.

Corollaire. — *Lorsqu'une fonction, holomorphe dans une certaine partie du plan, conserve une valeur constante sur une ligne, si petite qu'elle soit, elle est constante dans toute cette étendue.*

Supposons que la fonction $f(z)$, holomorphe dans la partie A du plan, conserve une valeur constante quand la variable z décrit la ligne ab située dans cette partie du plan. Prenons deux points voisins z_0 et z_1 sur la ligne ab; le rapport $\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$ est nul; sa limite, quand le point z_1 se rapproche de z_0, est aussi nulle; ainsi la dérivée $f'(z)$ est nulle en tous les points de la ligne ab. La seconde dérivée est nulle pour la même raison, et ainsi de suite. Toutes les dérivées étant nulles en un point z_0 de la ligne ab, on en conclut que la fonction est constante dans l'aire A.

115. Théorème II. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie finie du plan, chaque racine est d'un degré entier et fini, et leur nombre est limité.*

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la partie A du plan enveloppée par la courbe C; traçons à l'intérieur une courbe C′ voisine de C. Supposons que la fonction $f(z)$ s'annule en un point a situé à l'intérieur de la courbe C′; un certain nombre de dérivées successives peuvent être nulles en ce point; mais il est impossible qu'elles le soient toutes, car alors la fonction serait nulle dans toute l'aire A. Soit donc n l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas au point a; si du

point a comme centre (*fig.* 61), on décrit un cercle compris dans la partie A du plan, la fonction proposée sera développable en une série

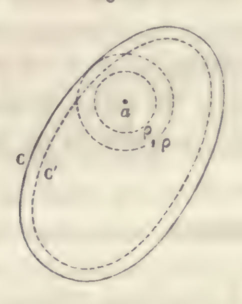
$$f(z) = \frac{f^n(a)}{1.2\ldots n}(z-a)^n + \frac{f^{n+1}(a)}{1.2\ldots(n+1)}(z-a)^{n+1} + \ldots,$$

ou

$$f(z) = (z-a)^n \left[\frac{f^n(a)}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(a)}{1.2\ldots(n+1)}(z-a) + \ldots \right],$$

convergente dans ce cercle. Il en résulte que le quotient de $f(z)$ par $(z-a)^n$, quotient que nous désignerons par $\varphi(z)$, est dans le cercle une fonction holomorphe, ne s'annulant pas au point a; c'est aussi une fonction holomorphe dans la partie de l'aire A extérieure au cercle,

Fig. 61.



comme quotient de deux fonctions holomorphes, dont la seconde, $(z-a)^n$, ne s'annule pas. Ainsi la fonction $f(z)$, holomorphe dans l'aire A et s'annulant au point a, est égale au produit de $(z-a)^n$ par une fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans la même étendue et ne s'annulant pas au point a. On dira, d'après cela, que la valeur $z = a$ est une racine ou un zéro du degré n de la fonction $f(z)$.

Dans le cercle précédent, dont nous appelons ρ le rayon, la fonction $\varphi(z)$ est représentée par la série convergente

$$\varphi(z) = \frac{f^n(a)}{1.2\ldots n} + \frac{f^{n+1}(a)}{1.2\ldots(n+1)}(z-a) + \ldots.$$

On peut assigner un nombre ρ_1 égal ou inférieur à ρ, tel que, pour toutes les valeurs de $z-a$ dont le module est inférieur à ρ_1, le module

du premier terme soit plus grand que la somme des modules de tous les autres termes; il est clair que le cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ρ_1 ne comprendra aucune racine de la fonction $\varphi(z)$, et, par conséquent, ne comprendra aucune racine de la fonction $f(z)$ autre que a.

Il en résulte que le nombre des racines situées dans l'aire A_1 enveloppée par la courbe C' est limité. Supposons, en effet, que cette aire comprenne une infinité de racines; divisons-la en plusieurs parties d'une manière quelconque, l'une des parties A_2, au moins, comprendra une infinité de racines; subdivisons celle-ci en plusieurs parties; l'une d'elles A_3, au moins, comprendra une infinité de racines; en continuant de la sorte, on formera une série indéfinie d'aires A_1, A_2, A_3,... de plus en plus petites, comprenant chacune une infinité de racines, et contenant chacune toutes les suivantes. Comme on peut mener les transversales de manière que toutes les dimensions de l'aire A_n tendent vers zéro, quand n augmente indéfiniment, il est clair que les aires ont pour limites un point déterminé z_1 du plan; il serait impossible de décrire un cercle ayant pour centre ce point et ne comprenant aucune racine autre que le point z_1.

Corollaire. — De l'égalité

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$$

on déduit

$$f'(z) = (z-a)^{n-1}[n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)] = (z-a)^{n-1}\psi(z),$$

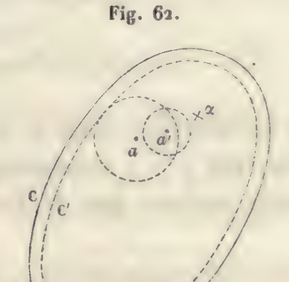
la fonction $\psi(z)$ étant holomorphe dans l'aire A et ne s'annulant pas au point a. On en conclut qu'une racine du degré n de la fonction proposée est racine du degré $n-1$ de la première dérivée, du degré $n-2$ de la seconde dérivée, etc.

116. Théorème III. — *Lorsqu'une fonction est méromorphe dans une certaine partie du plan, il est impossible qu'en un point situé dans cette partie du plan la fonction et toutes ses dérivées soient nulles.*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans la partie A du plan enveloppée par la courbe C (*fig.* 62); traçons à l'intérieur une courbe

fermée C′ voisine de C. Considérons un point racine a situé à l'intérieur de la courbe C′; d'après la définition de la continuité, il est possible de décrire, de ce point comme centre, un cercle tel, qu'en tous

Fig. 62.



les points intérieurs le module de la fonction soit moindre qu'un nombre donné; ce cercle ne comprendra aucun pôle de la fonction.

Supposons maintenant qu'au point a la fonction et toutes ses dérivées soient nulles. Du point a comme centre, avec un rayon égal ou inférieur à la distance du point a au pôle α le plus voisin, décrivons un cercle compris dans l'aire A; la fonction $f(z)$, étant holomorphe dans ce cercle, serait nulle dans toute l'étendue du cercle. Si le rayon du cercle est égal à la distance du point a au pôle voisin α, on aurait un point racine aussi rapproché du pôle α que l'on voudrait, ce qui est impossible. Si le rayon est plus petit que cette distance, d'un point a' intérieur au cercle, avec un rayon égal ou inférieur à la distance du point a' au pôle le plus voisin, décrivons un second cercle compris aussi dans l'aire A; en s'avançant ainsi de proche en proche, on arriverait à un point racine aussi rapproché qu'on voudrait d'un pôle, ce qui est impossible.

117. Théorème IV. — *Lorsqu'une fonction est méromorphe dans une partie finie du plan, les racines et les pôles situés dans cette partie du plan sont chacun d'un degré entier et fini, et leur nombre est limité.*

Conservons les mêmes notations que dans le numéro précédent. Soit a un point racine situé à l'intérieur de la courbe C′; du point a comme centre, avec un rayon ρ égal ou inférieur à la distance du point a

au pôle le plus voisin, décrivons un cercle compris dans l'aire A; la fonction $f(z)$ étant holomorphe dans ce cercle, et toutes les dérivées ne s'annulant pas au point a, la racine a est d'un degré entier et fini n, qui est l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas au point a (n° **115**), et l'on a

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction holomorphe dans le cercle ρ et ne s'annulant pas au point a; cette fonction $\varphi(z)$, méromorphe dans l'aire A, a les mêmes pôles et les mêmes racines que la fonction $f(z)$, excepté la racine a.

On peut, en outre, déterminer un nombre ρ_1 inférieur ou égal à ρ, tel que le cercle décrit du point a comme centre avec le rayon ρ_1 ne comprenne aucune racine de la fonction $\varphi(z)$, et l'on démontre, comme précédemment, que le nombre des racines situées dans la partie A du plan est limité.

Considérons maintenant la fonction $\frac{1}{f(z)}$, qui est méromorphe dans l'aire A, comme la fonction $f(z)$, et qui admet comme racines les pôles de celles-ci. Soit α un pôle de la fonction $f(z)$; ce point est une racine d'un degré entier et fini n de la fonction $\frac{1}{f(z)}$, et l'on a

$$\frac{1}{f(z)} = (z - \alpha)^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction méromorphe dans l'aire A, qui ne devient ni nulle, ni infinie au point α. On en déduit

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\alpha)^n},$$

la fonction $\psi(z)$, qui est égale à $\frac{1}{\varphi(z)}$, étant aussi méromorphe dans l'aire A, et ne devenant ni nulle, ni infinie au point α. On dit, d'après cela, que la valeur $z = \alpha$ est un pôle ou un infini du degré n de la fonction $f(z)$.

Puisque la fonction $\frac{1}{f(z)}$ n'admet qu'un nombre limité de racines

dans l'aire A, il en résulte que la fonction $f(z)$ n'admet qu'un nombre limité de pôles dans cette étendue.

118. Théorème V. — *Une fonction $f(z)$, méromorphe dans une partie finie A du plan, est égale à une fraction rationnelle, plus une fonction holomorphe dans cette partie du plan.*

La fonction $f(z)$ admet, dans l'aire A, un nombre fini m de pôles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de degrés $n, p, q, \ldots$. En vertu du théorème précédent, la fonction

$$\psi(z) = (z-\alpha)^n f(z)$$

est holomorphe dans le voisinage du point α; elle peut donc se développer en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z-\alpha$, convergente dans un cercle dont le centre est α, et l'on a

$$\psi(z) = \psi(\alpha) + \frac{\psi'(\alpha)}{1}(z-\alpha) + \ldots + \frac{\psi^{n-1}(\alpha)}{1.2\ldots(n-1)}(z-\alpha)^{n-1} + (z-\alpha)^n f_1(z),$$

la fonction $f_1(z)$ étant holomorphe dans le cercle de convergence. On en déduit

$$f_1(z) = f(z) - \frac{\psi(\alpha)}{(z-\alpha)^n} - \frac{\dfrac{\psi'(\alpha)}{1}}{(z-\alpha)^{n-1}} - \ldots - \frac{\dfrac{\psi^{n-1}(\alpha)}{1.2\ldots(n-1)}}{z-\alpha}.$$

La fonction $f_1(z)$ ainsi définie est méromorphe dans l'aire A, et admet les mêmes pôles que la fonction $f(z)$, excepté le pôle α.

De même la fonction

$$\psi_1(z) = (z-\beta)^p f_1(z)$$

est holomorphe dans le voisinage du point β; si on la développe en série, on a

$$\psi_1(z) = \psi_1(\beta) + \frac{\psi'_1(\beta)}{1}(z-\beta) + \ldots + \frac{\psi_1^{p-1}(\beta)}{1.2\ldots(p-1)}(z-\beta)^{p-1} + (z-\beta)^p f_2(z),$$

la fonction $f_2(z)$ étant holomorphe dans le cercle de convergence. On

en déduit

$$f_2(z) = f_1(z) - \frac{\psi_1(\beta)}{(z-\beta)^p} - \frac{\frac{\psi_1'(\beta)}{1}}{(z-\beta)^{p-1}} - \dots - \frac{\frac{\psi_1^{p-1}(\beta)}{1.2\,..(p-1)}}{z-\beta}.$$

La fonction $f_2(z)$ ainsi définie est méromorphe dans l'aire A, et admet les mêmes pôles que la fonction $f(z)$, excepté α et β.

En continuant de cette manière, on arrive à une fonction $f_m(z)$ holomorphe dans l'aire A, et l'on a

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \frac{A_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-\alpha} \\ & + \frac{B_p}{(z-\beta)^p} + \frac{B_{p-1}}{(z-\beta)^{p-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-\beta} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + f_m(z). \end{aligned}$$

119. *Remarques.* — La fonction $\psi(z)$ ne s'annulant pas au point α, il en résulte que le coefficient A_n de la première fraction qui se rapporte à ce point n'est pas nulle; il en est de même des coefficients $B_p, \dots$ Mais les autres coefficients $A_{n-1}, \dots, A_1, B_{p-1}, \dots$ peuvent être nuls.

Les coefficients $A_1, B_1, \dots$ des fractions du premier degré sont ce que Cauchy appelle les *résidus* de la fonction $f(z)$, relativement aux pôles $\alpha, \beta, \dots$, et il les désigne par le symbole $\mathcal{E}$ (*Anciens Exercices*, 1826). Ainsi

$$\mathcal{E}_{(\alpha)} f(z) = A_1, \quad \mathcal{E}_{(\beta)} f(z) = B_1, \dots$$

La dérivée $f'(z)$ ne contenant pas de fractions du premier degré, tous ses résidus sont nuls.

Remarquons aussi que la fonction proposée peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^n (z-\beta)^p \dots},$$

la fonction $F(z)$ étant holomorphe dans l'aire A.

120. Théorème VI. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est méromorphe dans*

une partie du plan à contour simple, l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

prise sur le contour de l'aire ou sur une courbe intérieure infiniment voisine, dans le sens positif, est égale à la somme des résidus de la fonction relatifs aux pôles situés dans cette partie du plan.

Autour des pôles α, β, γ,... de la fonction, décrivons des cercles infiniment petits (*fig.* 63), et joignons-les au contour C de l'aire par

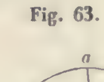
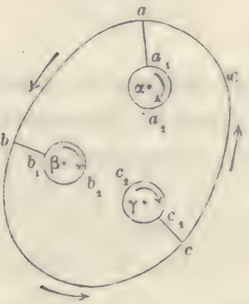


Fig. 63.



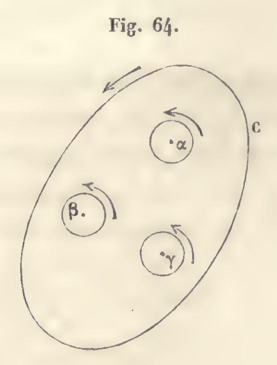
des transversales aa_1, bb_1, cc_1,...; si l'on conçoit que l'on ait enlevé les petits cercles, il reste une aire dans laquelle la fonction $f(z)$ est holomorphe, et dont le contour, parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel que l'observateur ait toujours à sa gauche l'aire elle-même, est la ligne fermée

$$aa_1\,a_2\,a_1\,abb_1\,b_2\,b_1\,bcc_1\,c_2\,c_1\,ca.$$

En vertu du théorème du n° 82, l'intégrale prise le long de cette ligne est nulle. Les transversales, étant parcourues deux fois dans des sens contraires, donnent dans l'intégrale des résultats égaux et de signes contraires; on peut les supprimer. Il reste la courbe C parcourue dans le sens positif, et les petites circonférences parcourues chacune dans le sens négatif par rapport à l'aire du cercle. On en conclut que l'intégrale définie relative à la courbe C est égale à la somme des inté-

grales relatives aux circonférences infiniment petites, décrites chacune dans le sens positif par rapport à l'aire du cercle (*fig.* 64).

Fig. 64.



Évaluons maintenant les intégrales relatives à ces petites circonférences. Considérons, par exemple, l'intégrale relative à la circonférence dont le centre est le pôle α. Nous avons vu que

$$f(z) = \frac{A_n}{(z-\alpha)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{z-\alpha} + f_1(z),$$

la fonction $f_1(z)$ étant holomorphe dans le cercle. Si l'on pose

$$z = \alpha + \rho e^{\theta i},$$

il vient

$$f(z) = \frac{A_n}{\rho^n} e^{-n\theta i} + \frac{A_{n-1}}{\rho^{n-1}} e^{-(n-1)\theta i} + \ldots + \frac{A_1}{\rho} e^{-\theta i} + f_1(z),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} f(z)\,dz = \frac{A_n}{2\pi\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta i}\,d\theta + \ldots + \frac{A_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} f_1(z)\,dz.$$

Les $n-1$ premières intégrales sont nulles; la suivante a pour valeur 2π; quant à la dernière, puisque la fonction $f_1(z)$ est holomorphe dans le cercle, elle est aussi nulle. On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} f(z)\,dz = A_1.$$

Les intégrales, le long des autres circonférences, donnent pareille-

ment B_1, C_1, ... On en déduit

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)\,dz = A_1 + B_1 + C_1 + \ldots.$$

121. Lemme. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est méromorphe dans une partie* A *du plan, le résidu de la fonction* D $\log f(z)$ *en chacun des points est égal à l'ordre de la fonction $f(z)$ en ce point.*

Il résulte du théorème IV que, quelle que soit la valeur de la fonction $f(z)$ en un point t situé dans la partie A du plan, il existe un nombre entier n, positif, négatif, ou nul, tel que le quotient

$$\frac{f(z)}{(z-t)^n}$$

ne devienne ni nul, ni infini au point t; ce nombre entier n est ce qu'on appelle l'*ordre* de la fonction $f(z)$ au point t. Lorsque la fonction $f(z)$ n'est ni nulle, ni infinie au point t, l'exposant n ou l'ordre, en ce point, est égal à zéro; lorsqu'elle s'annule, l'ordre est positif; lorsqu'elle devient infinie, l'ordre est négatif.

La fonction $D\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, quotient de deux fonctions méromorphes dans l'aire A, est aussi méromorphe dans cette partie du plan; ses pôles ne peuvent être que les zéros ou les infinis de $f(z)$. Soit d'abord a un zéro du degré n de $f(z)$, on a

$$f(z) = (z-a)^n\varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ ne devenant ni nulle, ni infinie au point a. On en déduit

$$D\log f(z) = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Ainsi le point a est un pôle simple de la fonction $D\log f(z)$, et le résidu correspondant est n. Soit maintenant α un infini du degré p de $f(z)$; on a

$$f(z) = (z-\alpha)^{-p}\psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ ne devenant ni nulle, ni infinie au point α. On en déduit

$$\mathrm{D}\log f(z) = \frac{-p}{z-\alpha} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

On en conclut que le point α est un pôle simple de la fonction $\mathrm{D}\log f(z)$, et le résidu correspondant est $-p$.

122. Théorème VII. — *Lorsqu'une fonction $f(z)$ est méromorphe dans une partie du plan, à contour simple, la somme des ordres de la fonction, dans cette partie du plan, est égale à l'intégrale définie*

$$\frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{D}\log f(z)\,dz,$$

relative au contour de l'aire ou à une courbe infiniment voisine, prise dans le sens positif.

Désignons par a l'un quelconque des zéros et par α l'un quelconque des infinis de la fonction $f(z)$; appelons n le degré du zéro, p celui de l'infini. Nous avons vu que la fonction $\mathrm{D}\log f(z)$ admet comme pôles simples les points a et α, et que les résidus correspondants de cette fonction sont n et $-p$. Nous savons aussi que l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{D}\log f(z)\,dz,$$

relative au contour C de l'aire, est égale à la somme des résidus de la fonction $\mathrm{D}\log f(z)$, relatifs aux pôles de cette fonction situés dans cette partie du plan. On a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})} \mathrm{D}\log f(z)\,dz = \Sigma n - \Sigma p.$$

Remarque. — L'intégrale définie que nous venons de considérer est égale à la variation de la fonction $\frac{1}{2\pi i}\log f(z)$, quand la variable z décrit la courbe fermée C. Si l'on pose $f(z) = re^{\theta i}$, on a $\log f(z) = \mathrm{L}r + \theta i$, $\frac{1}{2\pi i}\log f(z) = \frac{\mathrm{L}r}{2\pi i} + \frac{\theta}{2\pi}$: quand la variable z,

après avoir décrit la courbe C, revient au point de départ, le module r de la fonction $f(z)$ reprend sa valeur primitive, et l'argument devient $\theta + 2k\pi$, k étant un certain nombre entier; l'intégrale définie est donc égale au nombre entier k, et l'on a $\Sigma n - \Sigma p = k$. Ainsi l'on peut énoncer le théorème précédent en disant que l'on obtient la somme des ordres d'une fonction $f(z)$, méromorphe dans une partie du plan, en divisant par 2π la variation de l'argument de la fonction sur le contour de l'aire.

On arrive directement à ce résultat en remarquant que, d'après le théorème IV, la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{(z-a)^n (z-b)^{n'} \ldots}{(z-\alpha)^p (z-\beta)^{p'} \ldots} \varphi(z),$$

la fonction φ étant holomorphe dans la partie du plan considérée, et ne s'annulant pas. D'après le raisonnement du n° 21, la variation de l'argument de $\varphi(z)$ sur la courbe C est nulle. Les variations des arguments des binômes $(z-a)^n, \ldots, (z-\alpha)^{-p}, \ldots$ sont d'ailleurs respectivement égales à $2n\pi, \ldots, -2p\pi, \ldots$. Donc la variation de l'argument de $f(z)$ sur la courbe C est égale à $2\pi(\Sigma n - \Sigma p)$.

Lorsqu'une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une partie du plan à contour simple, la variation de son argument sur la courbe C se réduit à $2\pi \Sigma n$, ce qui donne le nombre des racines situées dans cette partie du plan.

Les deux théorèmes précédents, qui ont une grande importance dans la théorie des équations, sont dus à Cauchy.

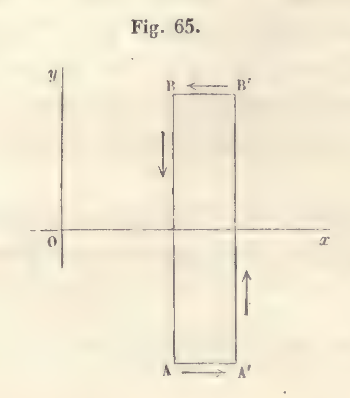
123. Appliquons cette méthode à l'équation

$$f(u) = u - \zeta - z \sin u = 0,$$

que l'on rencontre en Astronomie, et dans laquelle z est un nombre réel et positif, ζ une quantité réelle comprise entre 0 et π. Cherchons le nombre des racines comprises dans le rectangle AA'B'B (*fig.* 65) formé par des parallèles AB, A'B' à l'axe Oy, menées à des distances égales à $m\pi$ et à $(m+1)\pi$, m étant un nombre entier, et par des paral-

lèles AA′, BB′ à l'axe Ox, à une distance très-grande b de part et d'autre. La variation de l'argument de $f(u)$ sur le contour du rectangle est

Fig. 65.



égale à la somme de ses variations sur les quatre côtés.

Sur les côtés AA′, B′B, on a

$$u = x \mp bi,$$
$$f(u) = x - \zeta \mp bi + \frac{zi}{2}(e^{xi \pm b} - e^{-xi \mp b}).$$

La distance b étant très-grande, on peut réduire cette expression à son terme principal

$$\frac{zi}{2} e^b e^{xi} \quad \text{ou} \quad -\frac{zi}{2} e^b e^{-xi}.$$

Sur le côté AA′, x croissant de $m\pi$ à $(m+1)\pi$, l'argument de $f(u)$ éprouve une variation égale à $+\pi$; sur le côté B′B, x décroissant de $(m+1)\pi$ à $m\pi$, l'argument de $f(u)$ éprouve encore une variation égale à $+\pi$. La somme des variations de l'argument sur les deux côtés opposés AA′, B′B est donc $+2\pi$.

Sur le côté BA, on a

$$u = m\pi + yi,$$
$$f(u) = (m\pi - \zeta) + i\left[y - (-1)^m \frac{z}{2}(e^y - e^{-y})\right],$$
$$\frac{f(u)}{m\pi - \zeta} = 1 + i\left[\frac{y}{m\pi - \zeta} - \frac{(-1)^m z}{2(m\pi - \zeta)}(e^y - e^{-y})\right],$$

et, en désignant par θ l'argument de $\frac{f(u)}{m\pi - \zeta}$,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{m\pi - \zeta} - \frac{(-1)^m z}{2(m\pi - \zeta)}(e^y - e^{-y}).$$

Lorsque y varie de $+\infty$ à $-\infty$, l'argument θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, ou de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$, et, par conséquent, éprouve une variation égale à $+\pi$ ou à $-\pi$, suivant que la quantité $c = \frac{(-1)^m z}{m\pi - \zeta}$ est positive ou négative.

Sur le côté A'B', comme y varie de $-\infty$ à $+\infty$, la variation de l'argument est égale à $+\pi$ ou à $-\pi$, suivant que la quantité $c' = \frac{(-1)^{m+1} z}{(m+1)\pi - \zeta}$ est négative ou positive. Mais, excepté lorsque $m = 0$, le signe de c' est contraire à celui de c; la somme des variations de l'argument de $f(u)$ sur les deux côtés opposés BA, A'B', est donc $+2\pi$ ou -2π, suivant que la quantité c est positive ou négative. Dans le premier cas, qui se présente lorsque m est un nombre positif pair, ou négatif impair, la variation de l'argument sur le contour du rectangle est 4π, d'où l'on conclut que le rectangle comprend deux racines qui sont réelles ou imaginaires conjuguées; dans le second cas, qui se présente lorsque m est un nombre positif impair, ou négatif pair, la variation est nulle, d'où l'on conclut que le rectangle ne comprend aucune racine. Lorsque $m = 0$, les deux quantités c et c' ayant le même signe, les variations sur BA et A'B' sont égales et de signes contraires, de sorte que la variation sur le contour du rectangle est égale à $+2\pi$; on en conclut que ce prèmier rectangle contient une seule racine, qui est réelle.

124. Théorème VIII. — *La fonction* $\Theta(z)$ *n'a qu'une racine dans chaque parallélogramme* (ω, ω').

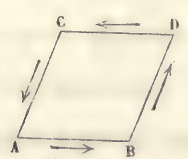
Considérons le parallélogramme ABDC (*fig.* 66), dont le sommet A est un point quelconque z_0 du plan, les sommets B et C les points $z_0 + \omega$, $z_0 + \omega'$. La fonction $\Theta(z)$ étant holomorphe, le nombre des racines contenues dans le parallélogramme est égal, d'après le théorème pré-

cédent, à l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int D\log\Theta(z)\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme. La fonction $\Theta(z)$ admettant la période ω, ainsi que sa dérivée $\Theta'(z)$, la fonction $D\log\Theta(z) = \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$ reprend la même valeur aux points homologues des côtés opposés BD,

Fig. 66.



CA; ces côtés, étant parcourus dans des sens contraires, donnent dans l'intégrale des quantités égales et de signes contraires. D'autre part, si z désigne un point du côté AB, $z+\omega'$ sera le point homologue du côté opposé DC, et l'on aura pour ces deux côtés

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}[D\log\Theta(z) - D\log\Theta(z+\omega')]\,dz.$$

De la relation (n° 73)

$$\Theta(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z),$$

on déduit

$$D\log\Theta(z+\omega') = -\frac{2\pi i}{\omega} + D\log\Theta(z),$$

et l'intégrale précédente se réduit à

$$\frac{1}{\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega} dz = 1.$$

Ainsi tout parallélogramme, tel que ABDC, comprend une seule racine de la fonction Θ, et cette racine est simple.

125. Corollaire. — Nous avons vu aussi (n° 73) que la fonction $\Theta(z)$ s'annule pour toutes les valeurs représentées par la formule

$$z = \frac{\omega + \omega'}{2} + m\omega + m'\omega',$$

dans laquelle m et m' sont des nombres entiers quelconques. Supposons que le plan soit divisé en un réseau de parallélogrammes égaux au précédent, et que le sommet A coïncide avec l'origine, la formule donne un zéro $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$ placé au centre du parallélogramme ABDC; comme on ajoute ensuite des multiples de ω et ω', elle en donne un placé au centre de chaque parallélogramme; puisque chaque parallélogramme ne comprend qu'un zéro, il s'ensuit que la formule représente tous les zéros.

La même conclusion s'applique aux quatre fonctions θ définies par les formules (5) du n° 74; les formules (9) du même numéro représentent tous les zéros de ces fonctions. On connaît ainsi tous les zéros et tous les infinis des trois fonctions elliptiques $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ (n° 76).

126. Théorème IX. — *Lorsqu'une fonction est holomorphe dans toute l'étendue du plan, et que son module reste moindre qu'une quantité déterminée, cette fonction est constante.*

Une fonction $f(z)$, holomorphe dans toute l'étendue du plan, est développable en une série entière

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

et convergente, quelle que soit la variable z; les coefficients de la série sont donnés par la formule (n° 94)

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

dans laquelle le rayon r est arbitraire. Si, sur la circonférence r, le module de la fonction $f(z)$ reste moindre qu'une quantité déterminée M, celui du coefficient u_n sera moindre que $\frac{M}{r^n}$; comme on peut supposer le

rayon r aussi grand qu'on veut, on en conclut que le module de u_n est nul. Ainsi tous les coefficients de la série, à partir du second, sont nuls, et par conséquent la fonction est égale à une constante u_0.

Ce théorème fondamental est dû à M. Liouville. On en conclut qu'*une fonction, holomorphe sur toute la sphère, est constante*. Il en résulte que, lorsqu'une fonction n'est pas constante, elle doit avoir sur la sphère un ou plusieurs points singuliers où elle cesse d'être holomorphe. Ainsi la fonction e^z est holomorphe sur toute la sphère, excepté au point O', qui est un point d'indétermination (nº 59).

127. Théorème X. — *Lorsque deux fonctions, méromorphes dans toute l'étendue du plan, admettent les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré, leur rapport est une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan; si, de plus, le module du rapport reste moindre qu'une quantité déterminée, le rapport est constant.*

Soient $f(z)$ et $F(z)$ les deux fonctions proposées. Si a est un zéro commun, du degré n, on a, d'après le théorème V,

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z), \quad F(z) = (z-a)^n F_1(z),$$

les fonctions $f_1(z)$ et $F_1(z)$ étant holomorphes dans le voisinage du point a, et ne s'annulant pas en ce point; on en conclut que le rapport

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \frac{F_1(z)}{f_1(z)}$$

reste holomorphe dans le voisinage du point a. Si α est un pôle ou un infini commun, du degré n, on a, d'après le même théorème,

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-\alpha)^n}, \quad F(z) = \frac{F_1(z)}{(z-\alpha)^n},$$

les fonctions $f_1(z)$ et $F_1(z)$ étant holomorphes dans le voisinage du point α, et ne s'annulant pas en ce point; on en conclut encore que le rapport

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \frac{F_1(z)}{f_1(z)}$$

reste holomorphe dans le voisinage du point α. Le rapport $\frac{F(z)}{f(z)}$ est donc une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Si le module de ce rapport reste moindre qu'une quantité déterminée, il résulte du théorème précédent que ce rapport est constant.

128. Théorème XI. — *Toute fonction, holomorphe sur toute la sphère, excepté au point O', qu'elle admet comme pôle, est une fonction entière.*

Si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, la fonction proposée $f(z)$ devient une fonction de z', que nous désignerons par $\varphi(z')$. Cette fonction

$$\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right) = f(z)$$

est holomorphe par rapport à la nouvelle variable z', excepté pour $z' = 0$. Dire que sur la sphère le point O' est pôle de la fonction $f(z)$, c'est dire que, dans le plan des z', le point $z' = 0$ est pôle de la fonction $\varphi(z')$. D'après le théorème IV, il existe un nombre n, entier et fini, tel que le produit $\psi(z') = z'^n\varphi(z')$ reste holomorphe dans le voisinage du point O', et par conséquent dans un cercle décrit du point O' comme centre, avec un certain rayon r, sur le plan des z'; cette fonction est développable en une série entière, convergente dans ce cercle, et l'on a

$$(1) \qquad \psi(z') = A_0 + A_1 z' + A_2 z'^2 + \ldots + A_{n-1} z'^{n-1} + z'^n P,$$

en posant

$$(2) \qquad P = A_n + A_{n+1} z' + A_{n+2} z'^2 + \ldots.$$

De l'équation (1) on déduit

$$P = \varphi(z') - \frac{A_0}{z'^n} - \frac{A_1}{z'^{n-1}} - \ldots - \frac{A_{n-1}}{z'},$$

ou

$$(3) \qquad P = f(z) - A_0 z^n - A_1 z^{n-1} - \ldots - A_{n-1} z.$$

Au cercle r décrit du point O′ comme centre sur le plan des z' correspond sur la sphère un cercle R, qui divise la surface de la sphère en deux zones, contenant, l'une le point O, l'autre le point O′; d'après l'équation (3), la quantité P est holomorphe dans la première zone; comme elle est représentée par la série (2) dans la seconde zone, elle est aussi holomorphe dans cette seconde zone; la quantité P est donc holomorphe sur toute la sphère, et par conséquent, en vertu du théorème IX, c'est une constante A_n. On déduit de là, d'après l'équation (3),

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Ainsi la fonction proposée est une fonction entière d'un degré égal au degré du pôle O′.

129. Théorème XII. — *Toute fonction, méromorphe sur toute la sphère, est une fraction rationnelle.*

Supposons d'abord que le point O′ soit un point ordinaire de la fonction $f(z)$; si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, cela signifie que la fonction $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ est holomorphe dans un cercle décrit du point O′ comme centre, avec un certain rayon r, sur le plan des z'; à ce cercle correspond sur la sphère un cercle R, qui divise la sphère en deux zones, comprenant, l'une le point O, l'autre le point O′; tous les pôles de la fonction $f(z)$ étant situés sur la première zone, c'est-à-dire dans le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à $\frac{1}{r}$ sur le plan des z, d'après le théorème IV, leur nombre est limité. Si le point O′ est un pôle, on peut, du point O′ comme centre, avec un certain rayon r, décrire sur le plan des z' un cercle qui ne comprenne aucun pôle de la fonction $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ autre que le point O′; tous les pôles de la fonction $f(z)$ autres que le point O′ sont donc situés dans le cercle décrit du point O comme centre avec le rayon $\frac{1}{r}$ sur le plan des z, et par conséquent leur nombre est encore limité. Ainsi, dans tous les cas, une fonction méromorphe sur toute la sphère n'admet qu'un nombre limité de pôles.

Cela posé, désignons par α, β, ... les pôles de la fonction $f(z)$ autres

que le point O′, par $n, p, \ldots$ leurs degrés; on peut, d'après le théorème V, déterminer des sommes de fractions simples, telles que la différence

$$\begin{aligned}\varphi(z) = f(z) &- \frac{A_n}{(z-\alpha)^n} - \ldots - \frac{A_1}{z-\alpha} \\ &- \frac{B_p}{(z-\beta)^p} - \ldots - \frac{B_1}{z-\beta} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

soit holomorphe sur la première zone. Si la fonction proposée $f(z)$ est holomorphe en O′, la fonction $\varphi(z)$ sera holomorphe sur toute la sphère, et par conséquent ce sera une constante (nº 126). Si le point O′ est pôle de $f(z)$, ce sera un pôle du même degré de $\varphi(z)$; cette dernière fonction, étant holomorphe sur toute la sphère, excepté au point O′, qu'elle admet comme pôle, est une fonction entière d'un degré égal à celui du pôle O′ (nº 128). Il résulte de là que la fonction $f(z)$ est le quotient de deux fonctions entières, telles que l'excès du degré du dénominateur sur celui du numérateur est égal à l'ordre de la fonction $f(z)$ au point O′.

Il est évident que la somme des ordres d'une fraction rationnelle sur toute la sphère est nulle.

Fonctions polytropes.

130. Les fonctions algébriques, que nous avons étudiées dans le Chapitre II du Livre I, constituent une première classe de fonctions polytropes; elles ont un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de la variable, et n'admettent sur toute la sphère que deux sortes de points singuliers, savoir des pôles et des points critiques algébriques.

Une équation $f(z, u) = 0$, dont le premier membre est, non plus un polynôme entier en z et u, mais une fonction holomorphe des deux variables z et u, dans le voisinage des valeurs a et b, définit une fonction implicite u de z qui jouit de quelques-unes des propriétés des fonctions algébriques. Nous remarquons d'abord que la racine b est d'un degré entier et fini de multiplicité, puisque $f(z, u)$, où l'on regarde z comme une constante a, est une fonction holomorphe de u dans le

voisinage de la valeur b (nº 115). Le théorème sur la continuité des racines subsiste : si pour $z = a$ l'équation a n racines égales à b, pour une valeur de z voisine de a elle a n racines voisines de b, et ces n racines forment un ou plusieurs systèmes circulaires; car on peut répéter ici les raisonnements que nous avons faits aux nºˢ 28 et 32. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les p racines d'un système circulaire; quand la variable z tourne autour du point a, une branche de la fonction u acquiert successivement les p valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$; après p tours, elle reprend sa valeur primitive u_1. Si l'on pose $z = a + z'$, $z' = z''^p$, quand z'' décrit une petite circonférence autour du point $z'' = 0$, z' décrit p circonférences autour du point $z' = 0$, et par conséquent u reprend sa valeur primitive; on en conclut que u est une fonction holomorphe de z'' dans le voisinage du point $z'' = 0$, et par conséquent est développable en une série entière par rapport à la variable z'',

$$u - b = A z''^q + B z''^{q+1} + \ldots$$

Les p valeurs du système circulaire sont représentées par la même série

$$u - b = A z'^{\frac{q}{p}} + B z'^{\frac{q+1}{p}} + \ldots.$$

En particulier, si $p = 1$, la branche de la fonction u est holomorphe dans le voisinage du point a.

Supposons que le premier membre de l'équation proposée $f(z, u) = 0$ soit une fonction holomorphe des deux variables z et u pour toutes les valeurs finies de chacune d'elles. On obtient les valeurs finies de z pour lesquelles l'équation admet des racines égales en cherchant les valeurs de z et de u qui satisfont aux deux équations simultanées

$$f(z, u) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Lorsque, dans le voisinage d'une de ces valeurs de z, une racine n'est pas holomorphe, elle appartient à un système de racines qui se permutent autour de ce point, et il peut arriver qu'à un même point critique correspondent une infinité de systèmes circulaires de racines.

L'analogie avec les fonctions algébriques cesse d'exister lorsqu'à

une valeur finie de z correspond une valeur infinie de u; car, si l'on pose $u = \frac{1}{u'}$, l'équation ne se transforme pas en général en une équation entre z et u' ayant son premier membre holomorphe pour les valeurs de u' voisines de zéro. Ces valeurs de z sont, en général, non des pôles ou des points critiques algébriques, mais des points singuliers transcendants. L'analogie n'existe pas non plus pour les valeurs infinies de z; car, si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, l'équation ne se transforme pas en général en une équation entre z' et u, ou entre z' et u', ayant son premier membre holomorphe pour les valeurs de z' voisines de zéro; de sorte que sur la sphère le point O′ est un point singulier transcendant.

Considérons, par exemple, l'équation $\sin u - z = 0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de z et de u pour toutes les valeurs finies de ces variables, et qui définit la fonction $u = \arcsin z$, que nous avons étudiée au n° 62. Les deux équations simultanées

$$\sin u - z = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \cos u = 0$$

sont satisfaites par les valeurs

$$u = (2m + 1)\frac{\pi}{2}, \quad z = (-1)^m = \pm 1,$$

m étant un nombre entier quelconque. A chacune des valeurs $z = \pm 1$ correspondent une infinité de groupes de deux racines égales; on a ainsi deux points critiques $z = \pm 1$, autour desquels se permutent les deux racines d'un même groupe. Si l'on pose, en effet,

$$z = (-1)^m(1 - z'), \quad u = (2m + 1)\frac{\pi}{2} + u',$$

l'équation devient

$$z' + \cos u' - 1 = 0,$$

et, en développant en série,

$$\left(z' - \frac{u'^2}{2}\right) + \frac{u'^4}{1.2.3.4} - \ldots = 0;$$

à une valeur infiniment petite de z' correspondent deux valeurs infiniment petites de u', dont les valeurs approchées sont $u' = \sqrt{2}z'^{\frac{1}{2}}$.

La fonction u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z; mais elle devient infinie quand z augmente indéfiniment. Si l'on pose

$$z = \frac{1}{z'}, \quad u = \frac{1}{u'},$$

l'équation devient

$$z' \sin \frac{1}{u'} - 1 = 0;$$

le premier membre est indéterminé pour $u' = 0$.

6 → **131.** Revenons à l'équation

$$(1) \qquad f(u, z) = u - \zeta - z \sin u = 0,$$

dans laquelle ζ est une quantité réelle. Nous avons vu (nº **123**) que, lorsque z est réelle, l'équation admet une infinité de racines; l'une d'elles se réduit à $u = \zeta$ pour $z = 0$; on peut la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de z, d'après la formule de Lagrange (nº **97**). Pour déterminer le rayon du cercle de convergence, il faut regarder z comme une variable imaginaire et u comme une fonction de z ayant la valeur initiale $u = \zeta$ pour $z = 0$. On obtient les points critiques en joignant à l'équation précédente l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 1 - z \cos u = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad u - \zeta - \operatorname{tang} u = 0.$$

On reconnaît immédiatement que cette dernière équation admet une solution réelle comprise entre $m\pi - \frac{\pi}{2}$ et $m\pi + \frac{\pi}{2}$, m étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, et, par conséquent, qu'elle a une infinité de solutions réelles; la méthode dont nous avons fait usage au nº **123** indique, en outre, qu'elle a deux racines imaginaires conjuguées, dont la partie réelle est comprise entre les mêmes multiples consécutifs

de $\frac{\pi}{2}$ que la quantité ζ. Autour de chacun des points critiques se permutent deux racines de l'équation (1), puisque la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ n'est pas nulle.

Considérons maintenant les deux racines imaginaires de l'équation (3); si l'on pose $u = x + yi$, cette équation se décompose en deux,

$$x - \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} = \zeta, \tag{4}$$

$$1 + \cosh 2y - \frac{\sinh 2y}{y} = 2\sin^2 x. \tag{5}$$

Les valeurs de y étant égales et de signes contraires, on peut supposer y positive. En développant en série le premier membre de l'équation (5) suivant les puissances entières et positives de y, on voit que cette fonction croît avec y de zéro à l'infini; on en conclut que, dans les racines imaginaires de l'équation (3), la valeur de y est moindre que la racine positive de l'équation

$$1 + \cosh 2y - \frac{\sinh 2y}{y} = 2,$$

ou

$$y \operatorname{tangh} y = 1; \tag{6}$$

cette racine est $y_1 = 1,1997\ldots$ La valeur correspondante de z, déduite de l'équation (2), est

$$z = \frac{1}{\cos u} = 2\,\frac{\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y}{\cos 2x + \cosh 2y},$$

et l'on a

$$\operatorname{mod} z = \sqrt{\frac{2y}{\sinh 2y}}.$$

Le second membre diminuant quand y augmente, et la valeur de y étant comprise entre 0 et y_1, il en résulte que le module de z est compris entre 1 et la quantité

$$b = \sqrt{\frac{2y_1}{\sinh 2y_1}} = \sqrt{y_1^2 - 1} = 0,6627\ldots.$$

Ainsi les deux points critiques fournis par les racines imaginaires de l'équation (3) sont compris, quelle que soit ζ, entre deux circonférences décrites de l'origine comme centre avec les rayons b et 1; il est évident d'ailleurs que les points critiques fournis par les racines réelles sont extérieurs à cette dernière circonférence. On en conclut que, quelle que soit la valeur réelle attribuée à ζ, la série de Lagrange est convergente dans le cercle de rayon b.

Quand on attribue à ζ la valeur $\frac{\pi}{2}$, les équations (4) et (5) admettent la solution $x = \frac{\pi}{2}$, $y = y_1$, à laquelle correspond le point critique $z = bi$. Pour voir quelles sont les racines qui se permutent autour de ce point critique, posons $z = z'i$ et $u = \frac{\pi}{2} + yi$; l'équation (1) devient

$$\frac{y}{\cosh y} = z', \tag{7}$$

la nouvelle fonction y ayant la valeur initiale $y = 0$ pour $z' = 0$. L'équation différentielle

$$dz' = \frac{1 - y \tanh y}{\cosh y} dy$$

montre que, quand y est réelle et croît de 0 à y_1, z' est aussi réelle et croît de 0 à b; on en conclut que, réciproquement, quand z' croît de 0 à b, y est réelle et croît de 0 à y_1. La racine considérée se permute donc avec une autre autour du point critique $z = bi$, et, par conséquent, pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, le cercle de rayon b est bien le cercle de convergence. Il est clair que, si ζ a une valeur différente d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, le rayon du cercle de convergence est plus grand que b.

132. Théorème XIII. — *Lorsque, dans une partie déterminée* A *du plan, une fonction* u *de* z *n'a pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, et admet un nombre fini* m *de valeurs en chaque point, toute fonction entière symétrique de ces* m *valeurs est une fonction méromorphe de* z *dans cette partie du plan.*

Pour définir la fonction, on fait partir la variable z d'un point fixe z_0, la fonction ayant une valeur initiale u_0 déterminée. Nous admettrons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, que, excepté en certains points singuliers, la fonction est continue et a une dérivée, et, par conséquent, que, tant que la variable se meut dans une partie de l'aire A ne comprenant aucun point singulier, la fonction est holomorphe.

Supposons qu'il existe, dans la partie A du plan, un point critique algébrique a relativement à la branche de la fonction que l'on obtient en allant du point z_0 à un point voisin de a par un chemin déterminé, c'est-à-dire un point a tel que, si la variable tourne ensuite autour de ce point, la branche de la fonction acquière, en chaque point voisin, un nombre limité p de valeurs finies, peu différentes les unes des autres, et devenant toutes égales à une même quantité b, quand le point z se rapproche de a. Posons

$$z = a + z', \quad z'' = z'^{\frac{1}{p}};$$

la branche considérée de la fonction se reproduisant quand z' fait p tours et, par conséquent, quand z'' reprend la même valeur, est une fonction holomorphe de z'' pour les valeurs de z'' voisines de zéro ; elle est donc développable en une série entière

$$u = b + A z''^{q} + B z''^{q+1} + \ldots,$$

et les p valeurs de la branche considérée de la fonction sont représentées par la même série

$$u = b + A z'^{\frac{q}{p}} + B z'^{\frac{q+1}{p}} + \ldots$$

Si l'on fait la somme des puissances semblables de ces p valeurs, les termes à exposants fractionnaires disparaissent, et il ne reste que des termes à exposants entiers; cette somme est donc une fonction holomorphe de z dans le voisinage du point a. Les mêmes choses se passent dans le voisinage de chacun des points critiques algébriques autour desquels se permutent des valeurs finies de la fonction.

Supposons maintenant qu'il existe un point critique α, tel qu'une

branche de la fonction acquière, quand la variable tourne autour de ce point, p valeurs très-grandes, et qui deviennent infinies au point α. Posons

$$z = \alpha + z', \quad u = \frac{1}{u'};$$

la branche correspondante de la fonction u' acquerra, dans le voisinage de ce point, p valeurs voisines de zéro; et, d'après ce que nous avons dit, ces p valeurs seront représentées par une même série convergente

$$u' = z'^{\frac{q}{p}}\left(A' + B'z'^{\frac{1}{p}} + \ldots\right);$$

il en résulte que les p valeurs de u seront représentées par une série de la forme

$$u = z'^{-\frac{q}{p}}\left(A + Bz'^{\frac{1}{p}} + \ldots\right).$$

La somme des puissances semblables de ces p valeurs ne contient encore que des exposants entiers; mais il peut y avoir au commencement de la série des termes à exposants négatifs; dans ce cas, le point α est un pôle de la somme, qui est alors une fonction méromorphe de z dans le voisinage de ce point.

Nous avons supposé en outre que la fonction u n'a qu'un nombre fini m de valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ en chaque point; il résulte de ce qui précède que la somme des puissances semblables de ces m valeurs est une fonction méromorphe de z dans l'aire A. On en conclut que toute fonction symétrique entière de ces m valeurs est une fonction méromorphe de z dans cette étendue.

133. Corollaire I. — Désignons par $\varphi_1(z)$ la somme des m valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de la fonction en chaque point, par $\varphi_2(z)$ la somme des produits des m valeurs deux à deux, et enfin par $\varphi_m(z)$ le produit de ces m valeurs; ces fonctions symétriques sont des fonctions méromorphes de z dans l'aire A, et la fonction u de z est racine de l'équation

$$u^m - \varphi_1(z)u^{m-1} + \varphi_2(z)u^{m-2} \ldots \pm \varphi_m(z) = 0.$$

Lorsque l'aire A est finie, les fonctions méromorphes $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$

peuvent être mises sous la forme

$$\varphi_1(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_0(z)}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\psi_2(z)}{\psi_0(z)}, \dots,$$

$\psi_0(z)$ étant un polynôme entier, et $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... des fonctions holomorphes dans l'aire A (n° 118), et l'équation devient

$$F(z, u) = \psi_0(z)\, u^m - \psi_1(z)\, u^{m-1} + \psi_2(z)^{m-2} \dots \pm \psi_m(z) = 0.$$

Son premier membre est une fonction entière de u et holomorphe de z dans l'aire A.

Les points où des racines deviennent infinies vérifient l'équation entière $\psi_0(z) = 0$. Les points où des racines finies deviennent égales sont donnés par les deux équations simultanées

$$F(z, u) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

l'élimination de u conduit à une équation $\chi(z) = 0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de z dans l'aire A. On en conclut que *le nombre des pôles et des points critiques situés dans l'aire finie* A *est limité.*

134. Corollaire II. — Nous appellerons, d'une manière générale, ordre de la fonction u en chaque point z l'ordre de la fonction

$$\varphi_m(z) = u_1 u_2 \dots u_m;$$

la fonction $\varphi_m(z)$ étant méromorphe dans l'aire A, cet ordre est entier. En tout point où aucune des m valeurs de u ne devient nulle ou infinie, l'ordre est nul. Supposons qu'en un point critique a les p valeurs u_1, $u_2, \dots, u_p$, qui composent un système circulaire, deviennent nulles, ces p valeurs seront représentées par une même série

$$u = z'^{\frac{q}{p}}\left(A + B z'^{\frac{1}{p}} + \dots\right),$$

et leur produit par une série entière

$$u_1 u_2 \dots u_p = z'^q (A_1 + B_1 z' + \dots);$$

le point a est un zéro du degré $\frac{q}{p}$ pour chacune des p valeurs du système circulaire et du degré entier q pour leur produit. De même, si les p valeurs d'un système circulaire deviennent infinies au point α, ces p valeurs seront représentées par la série

$$u = z'^{-\frac{q}{p}}(A + Bz'^{\frac{1}{p}} + \ldots),$$

et leur produit par la série

$$u_1 u_2 \ldots u_p = z'^{-q}(A_1 + B_1 z' + \ldots);$$

le point α est un infini du degré $\frac{q}{p}$ pour chacune des p valeurs du système circulaire et du degré entier q pour leur produit. L'ordre du produit est, dans le premier cas, $+q$; dans le second cas, $-q$.

Supposons que, sur la courbe C qui enveloppe l'aire A, chacune des m valeurs de la fonction u soit continue et différente de zéro; la fonction $\varphi_m(z)$ sera elle-même continue et différente de zéro. Nous savons, d'après le théorème VII, que la somme des ordres de la fonction méromorphe $\varphi_m(z)$ dans l'aire A est égale à la variation qu'éprouve la fonction $\frac{1}{2\pi i}\log\varphi_m(z)$ sur le contour C de l'aire, décrit dans le sens positif. On en conclut que la somme des ordres de la fonction u dans l'aire A est égale à la variation qu'éprouve sur ce contour la fonction $\frac{1}{2\pi i}\log(u_1 u_2 \ldots u_m)$, ou la somme des fonctions

$$\frac{1}{2\pi i}\log u_1 + \frac{1}{2\pi i}\log u_2 + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\log u_m,$$

qui se rapportent aux m branches de la fonction u.

135. Théorème XIV. — *Toute fonction qui, sur toute la sphère, n'a pas de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, et qui n'admet qu'un nombre fini m de valeurs en chaque point, est une fonction algébrique.*

En vertu du raisonnement précédent, toute fonction entière et symé-

trique des m valeurs de la fonction u est une fonction méromorphe de z, pour toutes les valeurs finies de z. Faisons maintenant $z = \frac{1}{z'}$; puisqu'on suppose que le point $z' = 0$ est un point ordinaire, ou un pôle, ou un point critique algébrique, d'après le même raisonnement, la fonction symétrique est aussi méromorphe dans le voisinage de ce point. Cette fonction symétrique, étant ainsi méromorphe sur toute la sphère, est une fraction rationnelle (n° 129). Il en résulte que les fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_m(z)$ sont des fractions rationnelles que l'on peut mettre sous la forme

$$\varphi_1(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_0(z)}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\psi_2(z)}{\psi_0(z)}, \ldots,$$

$\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... étant des polynômes entiers; par conséquent, la fonction proposée u de z satisfait à une équation

$$\psi_0(z)\,u^m - \psi_1(z)\,u^{m-1} + \psi_2(z)\,u^{m-2} \ldots \pm \psi_m(z) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme entier en z et en u, et du degré m par rapport à u.

Ce dernier théorème comprend, comme cas particuliers, les théorèmes XI et XII, qui servent à l'établir; ils nous seront très-utiles dans la suite. Nous les avons publiés pour la première fois, sous une forme un peu différente, dans le *Journal de l'École Polytechnique* de 1856.

Corollaire I. — *Une fonction u de z, définie par une équation dont le premier membre est un polynôme entier en z et u, du degré m par rapport à u, et irréductible, admet m valeurs en chaque point.*

Car, si elle en admettait un nombre moindre, elle satisferait à une équation algébrique d'un degré inférieur à m par rapport à u, et l'équation proposée ne serait pas irréductible.

Corollaire II. — *La somme des ordres d'une fonction algébrique sur toute la sphère est nulle.*

Cela résulte de ce que la somme des ordres d'une fraction rationnelle $\varphi_m(z)$ sur toute la sphère est nulle (n° 129). On peut encore s'en rendre compte de la manière suivante. Concevons que l'on divise la surface de la sphère en deux parties par un cercle C dont le plan soit

perpendiculaire au diamètre OO′, et qui ne passe par aucun point critique; la somme des ordres de la fonction u de z dans l'une ou l'autre zone est égale à la variation de la fonction $\frac{1}{2\pi i}\log(u_1 u_2 \ldots u_m)$ sur le cercle C, décrit dans le sens positif par rapport à cette zone, c'est-à-dire dans un sens tel, qu'un observateur ait à sa gauche l'aire de la zone; le sens du mouvement sur le cercle C étant différent pour les deux zones, les variations sont égales et de signes contraires, et, par conséquent, la somme des ordres de la fonction algébrique sur la sphère entière est nulle.

Soit $f(z, u) = 0$ l'équation proposée du degré m en u et du degré m' en z. La somme des ordres de la fonction u de z sur toute la sphère étant nulle, la somme des ordres positifs est égale à la valeur absolue de celle des ordres négatifs. Si, dans l'équation, on remplace u par $u_0 + u'$, u_0 étant une constante arbitraire, comme la somme des ordres négatifs est la même pour les deux fonctions u et u', celle des ordres positifs reste aussi la même et, par conséquent, est indépendante de la constante u_0. Supposons que la constante u_0 n'appartienne à aucun des systèmes de valeurs de u et z, ou de u et $\frac{1}{z}$, qui satisfont aux deux équations simultanées $f(z, u) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, et que, en outre, le coefficient de $z^{m'}$ dans l'équation proposée ne s'annule pas pour $u = u_0$. Pour évaluer la somme des ordres positifs de la fonction u' de z, il faut considérer les points z racines de l'équation $f(z, u_0) = 0$ du degré m'; en chacun de ces points, l'ordre de la fonction u' de z est égal au degré même du point racine, de sorte que la somme des ordres positifs de la fonction u' est égale à m'. Ainsi la valeur absolue de la somme des ordres négatifs de la fonction u de z, définie par une équation algébrique irréductible, est égale au degré de l'équation par rapport à z.

136. Corollaire III. — Dans le chapitre IV du Livre III, nous avons étudié l'intégrale

$$V = \int_{z_0}^{z} u\,dz,$$

u et z étant liées par une équation entière $f(z, u) = 0$, du degré m en u.

Cherchons dans quel cas V est elle-même fonction algébrique de z. Il est nécessaire d'abord que la fonction V n'admette, sur toute la sphère, que des points singuliers algébriques; ceci exige que, dans le développement de chaque système de valeurs infinies de u pour une valeur finie de z, ou de chaque système de valeurs infinies de $v = uz^2$ pour $z = \infty$ ou $z' = 0$, le coefficient H du terme qui, dans l'intégrale, engendre un logarithme, soit nul. Il faut ensuite qu'il n'y ait pas de cycles, ou, s'il y en a, que les intégrales relatives à ces cycles soient nulles. Quand ces conditions sont remplies, la fonction V, n'ayant sur toute la sphère que des points singuliers algébriques, et n'admettant qu'un nombre fini m de valeurs en chaque point, est une fonction algébrique de z, et l'équation entre z et V, mise sous forme entière, est du degré m par rapport à V. D'après une remarque faite dans le numéro précédent, le degré de l'équation par rapport à z est égal à la valeur absolue de la somme des ordres négatifs de la fonction V.

Prenons, comme exemple, l'équation

$$u^3 - 3u + 2z = 0,$$

que nous avons étudiée au n° 40. Dans le plan, il n'y a pas d'autres points singuliers que les deux points critiques $z = \pm 1$, autour de chacun desquels se permutent deux racines. Les deux lacets binaires $(a)_0^1$, $(b)_0^2$, relatifs à ces points, constituent un système de lacets fondamentaux; comme il n'y a pas d'autres lacets dans le plan, il n'y a pas de cycle, et, par conséquent, pas de période. On en conclut que l'intégrale

$$V = \int_0^z u\,dz$$

est une fonction algébrique de z.

L'équation transformée

$$z'^7 v^3 - 3z'^3 v + 2 = 0$$

a ses trois racines infinies et du degré $\frac{7}{3}$ pour $z' = 0$; mais comme il ne doit pas y avoir de période polaire, il est certain que, dans le développement de v, le coefficient H sera nul, ce qu'il est facile de vérifier

directement; le point O′ est donc un point critique algébrique par rapport à la fonction V qui acquiert autour de ce point trois valeurs infinies du degré $\frac{4}{3}$ se permutant circulairement; la somme des ordres négatifs de la fonction V étant égale à -4, l'équation entre V et z, qui est du troisième degré en V, est du quatrième degré en z.

Par un changement de variable, on a immédiatement

$$V = uz - \int_0^u z\,du = uz - \frac{3u^2}{4} + \frac{u^4}{8}.$$

L'élimination de u donne l'équation cherchée

$$64V^3 + 144V^2 - 27(8z^2 - 3)V + 27z^2(2z^2 - 1) = 0.$$

Prenons, comme second exemple, l'équation

$$u^3 - 3zu + z^3 = 0,$$

dont nous nous sommes occupés au n° 45. Dans le plan, il y a quatre points critiques a, b, c, O, auxquels correspondent quatre lacets binaires $(a)_0^1$, $(b)_0^2$, $(c)_0^1$, $(O)_1^2$; si l'on forme avec les deux premiers un système de lacets fondamentaux, les deux autres donneront deux cycles simples et, par conséquent, deux périodes

$$\omega_1 = a_0^1 + c_1^0, \quad \omega_2 = a_0^1 + O_1^2 + b_2^0.$$

L'équation transformée

$$z'^9 v^3 - 3z'^4 v + 1 = 0$$

a ses trois racines infinies et du troisième degré pour $z' = 0$; si l'on pose $v = wz'^{-3}$, l'équation devient

$$w^3 + 1 - 3wz' = 0.$$

Les trois racines de cette dernière équation sont holomorphes dans le voisinage du point $z' = 0$, et représentées par la série

$$w = -\alpha - \frac{z'}{\alpha} + \frac{\alpha z'^3}{3} + \cdots,$$

dans laquelle α désigne l'une quelconque des racines de l'équation $\alpha^3 = 1$; on en déduit

$$v = -\frac{\alpha}{z'^3} - \frac{1}{\alpha z'^2} + \frac{\alpha}{3} + \cdots;$$

le coefficient H est nul; il n'y a pas de période polaire, et le point O′ est pôle du second degré par rapport à chacune des branches de la fonction V. D'après cela, l'intégrale relative au lacet (O′) sur la sphère, ou au circuit correspondant dans le plan, donne une quantité nulle, quelle que soit la racine prise comme valeur initiale. En supposant que le rayon du circuit passe entre les points c et a, on en déduit les trois relations

$$a_0^1 + c_1^0 = 0, \quad a_1^0 + b_0^2 + O_2^1 = 0, \quad b_2^0 + c_0^1 + O_1^2 = 0,$$

qui se réduisent à deux, puisque la somme des trois premiers membres est identiquement nulle; il en résulte que les deux périodes ω_1 et ω_2 sont nulles. Ainsi la fonction V n'a que des points singuliers algébriques sur toute la sphère, et à chaque valeur de z correspondent seulement trois valeurs de V; donc V est une fonction algébrique de z. La somme des ordres négatifs de la fonction V étant égale à -6, l'équation entre V et z, qui est du troisième degré par rapport à V, est du sixième degré par rapport à z.

On obtient immédiatement la fonction V en posant

$$u = zt, \quad t^3 = \zeta;$$

d'où

$$z = \frac{3t}{1+t^3}, \quad u = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

$$V = 9\int_0^t \frac{(1-2t^3)t^2\,dt}{(1+t^3)^3} = 3\int_0^\zeta \frac{(1-2\zeta)\,d\zeta}{(1+\zeta)^3} = -\frac{9}{2(1+\zeta)^2} + \frac{6}{1+\zeta} - \frac{3}{2}.$$

L'élimination de z donne l'équation cherchée

$$8\left(V+\tfrac{3}{2}\right)^3 - 12\left(V+\tfrac{3}{2}\right)^2 - 12z^3\left(V+\tfrac{3}{2}\right) + z^6 + 16z^3 = 0.$$

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS X ET Y.

137. Soit $u = f(z)$ une fonction holomorphe de la variable imaginaire $z = x + yi$ dans une certaine étendue du plan; si l'on pose

$$u = X + Yi,$$

on obtient deux fonctions réelles X et Y des deux variables réelles et indépendantes x et y; ces deux fonctions jouissent de propriétés particulières dont nous avons dit quelques mots au commencement de cet Ouvrage. La fonction proposée ayant une dérivée, nous avons vu que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

et nous en avons conclu que les deux fonctions X et Y admettent des dérivées partielles satisfaisant aux deux relations

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Nous savons que la fonction $f'(z)$ est holomorphe dans la même étendue que la fonction proposée; il en résulte que les fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ admettent elles-mêmes des dérivées partielles, et, par conséquent, que les deux fonctions X et Y admettent des dérivées partielles

du deuxième ordre. Comme on a

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -i\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} + i\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2},$$

ces dérivées partielles satisfont aux quatre relations

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}.$$

La fonction $f''(z)$ étant aussi holomorphe, les dérivées partielles du deuxième ordre admettent des dérivées partielles du premier ordre, et, par conséquent, les deux fonctions X et Y admettent des dérivées partielles du troisième ordre, et ainsi de suite indéfiniment.

On a, d'une manière générale,

$$f^n(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = -i\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} = -\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2} = i\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-3}\partial y^3} = \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-4}\partial y^4} = \cdots = (-i)^n\frac{\partial^n u}{\partial y^n};$$

On en déduit les $2n$ relations linéaires et homogènes

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n X}{\partial x^n} = \dfrac{\partial^n Y}{\partial x^{n-1}\partial y} = -\dfrac{\partial^n X}{\partial x^{n-2}\partial y^2} = -\dfrac{\partial^n Y}{\partial x^{n-3}\partial y^3} = \dfrac{\partial^n X}{\partial x^{n-4}\partial y^4} = \cdots, \\ \dfrac{\partial^n Y}{\partial x^n} = -\dfrac{\partial^n X}{\partial x^{n-1}\partial y} = -\dfrac{\partial^n Y}{\partial x^{n-2}\partial y^2} = \dfrac{\partial^n X}{\partial x^{n-3}\partial y^3} = \dfrac{\partial^n Y}{\partial x^{n-4}\partial y^4} = \cdots \end{cases}$$

entre les $2n$ dérivées partielles de l'ordre n des deux fonctions X et Y, relations qui permettent d'exprimer ces $2n$ dérivées au moyen de deux d'entre elles, par exemple de $\frac{\partial^n X}{\partial x^n}$ et de $\frac{\partial^n X}{\partial x^{n-1}\partial y}$.

138. Considérons les deux courbes représentées par les équations $X = 0$, $Y = 0$. Soit z_0 une valeur de z qui annule la fonction $f(z)$.

Nous avons démontré que cette racine est d'un degré fini et entier n de multiplicité; elle annule la fonction $f(z)$ et ses $n-1$ premières dérivées, mais pas la suivante; d'après les relations (2), toutes les dérivées partielles des fonctions X et Y seront nulles jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement. On en conclut qu'un point racine d'ordre n de la fonction holomorphe $f(z)$ est un point multiple d'ordre n de chacune des courbes $X=0$, $Y=0$.

Réciproquement, si un point commun aux deux courbes $X=0$, $Y=0$ est multiple d'ordre n de l'une d'elles, il est multiple du même ordre dans l'autre; car si toutes les dérivées partielles de l'une des fonctions X et Y sont nulles jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, en vertu des relations (2), celles de l'autre sont aussi nulles jusqu'au même ordre. Ce point multiple, commun aux deux courbes, est une racine de degré n de la fonction $f(z)$.

Cherchons maintenant les tangentes en ce point multiple. La fonction $f(z)$ est développable en une série

$$f(z)=f^n(z_0)\frac{(z-z_0)^n}{1.2\ldots n}+f^{n+1}(z_0)\frac{(z-z_0)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}+\cdots,$$

ordonnée suivant les puissances entières de $z-z_0$, et convergente dans un cercle ayant le point z_0 pour centre. Si l'on pose

$$z-z_0=\rho e^{\theta i},$$

cette série devient

$$f(z)=f^n(z_0)\frac{\rho^n e^{n\theta i}}{1.2\ldots n}+f^{n+1}(z_0)\frac{\rho^{n+1}e^{(n+1)\theta i}}{1.2\ldots(n+1)}+\cdots;$$

on en déduit

$$X=\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n X_0}{\partial x_0^n}\cos n\theta-\frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}\sin n\theta\right)+\ldots;$$
$$Y=\frac{\rho^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n X_0}{\partial x_0^n}\sin n\theta+\frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}\cos n\theta\right)+\ldots.$$

Les tangentes au point multiple commun aux deux courbes $X=0$,

$Y = 0$ sont données par les équations

$$\operatorname{tang} n\theta = \frac{\frac{\partial^n X_0}{\partial x_0^n}}{\frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}}, \quad \operatorname{tang} n\theta' = -\frac{\frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}}{\frac{\partial^n X_0}{\partial y_0^n}} = \operatorname{tang}\left(n\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}, \quad \theta' = \theta + \frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque. Chacune de ces équations admettant n racines simples, on en conclut que chacune des courbes $X = 0$, $Y = 0$ comprend n branches réelles passant au point commun; les tangentes aux n branches d'une même courbe forment une rose des vents, et les rayons de l'une sont les bissectrices des angles de l'autre.

Ce que nous avons dit s'applique évidemment aux deux courbes $X = a$, $X = b$; il suffit de substituer à la fonction $f(z)$ la fonction $f(z) - a - bi$.

Si l'on remplace $f(z)$ par $f(z)(1 + i)$, et si l'on pose

$$X_1 + Y_1 i = (X + Yi)(1 + i),$$

d'où

$$X_1 = X - Y, \quad Y_1 = X + Y,$$

on obtient deux nouvelles courbes $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, qui jouissent des mêmes propriétés que les précédentes; le point z_0 est aussi un point multiple de chacune d'elles et de l'ordre n. Les tangentes à la première sont données par l'équation

$$\operatorname{tang} n\theta'' = \frac{\frac{\partial^n X_0}{\partial x_0^n} - \frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}}{\frac{\partial^n X_0}{\partial x_0^n} + \frac{\partial^n Y_0}{\partial x_0^n}} = \operatorname{tang}\left(n\theta' + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\theta'' = \theta' + \frac{\pi}{4n};$$

les roses des vents relatives à ces deux courbes coïncident avec les bissectrices des angles des deux premières réunies.

139. Le module R et l'argument φ de la fonction $f(z)$ peuvent être

regardés aussi comme des fonctions réelles des deux variables indépendantes x et y. Comme on a

$$\log R + \varphi i = \log f(z),$$

et que $\log f(z)$ est une fonction holomorphe de z dans toute portion de l'aire ne comprenant aucune racine de $f(z)$, les deux fonctions $\log R$ et φ jouissent des mêmes propriétés que les fonctions X et Y. On a donc les relations

$$\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log R}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{\partial^n \log R}{\partial x^n} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-1}\partial y} = -\frac{\partial^n \log R}{\partial x^{n-2}\partial y^2} = -\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-3}\partial y^3} + \frac{\partial^n \log R}{\partial x^{n-4}\partial y^4} = \ldots,$$

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = -\frac{\partial^n \log R}{\partial x^{n-1}\partial y} = -\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-2}\partial y^2} = \frac{\partial^n \log R}{\partial x^{n-3}\partial y^3} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^{n-4}\partial y^4} = \ldots.$$

Les courbes $R = a$ ou $\log R = \log a$ et $\varphi = b$ jouissent des mêmes propriétés que les courbes $X = a$, $Y = b$; un point multiple d'ordre n de l'une d'elles appartient à l'autre au même ordre; chaque courbe comprend n branches réelles passant en ce point, et tangentes aux rayons d'une rose des vents; en outre, les tangentes à l'une des courbes sont les bissectrices des angles formés par les tangentes à l'autre. Il en résulte que les tangentes en un point commun simple sont rectangulaires. Ainsi les courbes d'égal module et celles d'égal argument se coupent orthogonalement.

140. Considérons en particulier une fonction entière du degré m

$$u = f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots;$$

si l'on pose

$$z = re^{\theta i}, \quad A_0 = a_0 e^{\alpha_0 i}, \quad A_1 = a_1 e^{\alpha_1 i}, \ldots,$$

on a

$$f(z) = a_0 r^m e^{(m\theta+\alpha_0)i} + a_1 r^{m-1} e^{[(m-1)\theta+\alpha_1]i} + \ldots,$$

d'où

$$X = a_0 r^m \cos(m\theta + \alpha_0) + a_1 r^{m-1} \cos[(m-1)\theta + \alpha_1] + \dots,$$
$$Y = a_0 r^m \sin(m\theta + \alpha_0) + a_1 r^{m-1} \sin[(m-1)\theta + \alpha_1] + \dots;$$

les polynômes X et Y sont ordonnés ainsi par rapport aux puissances décroissantes de x et y. En égalant à zéro les termes du degré m, on obtient les directions des asymptotes; ces directions sont données par les équations

$$\cos(m\theta + \alpha_0) = 0, \quad \sin(m\theta' + \alpha_0) = 0,$$

d'où

$$\theta' = -\frac{\alpha_0}{m} + \frac{k\pi}{m}, \quad \theta = \theta' + \frac{\pi}{2m}.$$

Les racines de ces équations étant simples, on en conclut que chacune des courbes $X = 0$, $Y = 0$ admet m asymptotes à chacune desquelles correspondent deux branches réelles; les parallèles menées par un point arbitraire du plan aux asymptotes d'une même courbe forment une rose des vents, et les rayons de l'une sont bissectrices des angles de l'autre.

En transportant l'origine au point $z_0 = -\frac{A_1}{mA_0}$, on fait disparaître du polynôme $f(z)$ le terme du degré $m-1$; les polynômes X et Y ne contenant plus alors de termes du degré $m-1$, les asymptotes passent par la nouvelle origine. On conclut de là que les asymptotes aux deux courbes $X = 0$, $Y = 0$ passent par le même point z_0 où elles forment deux roses des vents bissectrices l'une de l'autre.

141. Nous avons remarqué (n° 87) que, lorsqu'une fonction est holomorphe dans une partie du plan, à contour simple, la connaissance des valeurs de la fonction, sur le contour ou sur une courbe intérieure infiniment voisine, détermine complétement la fonction dans cette partie du plan. On reconnaît sans peine, ainsi que l'a observé Lejeune-Dirichlet, qu'une fonction, holomorphe dans un cercle, est déterminée complétement lorsqu'on connaît les valeurs de l'une des fonctions X et Y sur la circonférence, et la valeur de l'autre en un point intérieur. En effet, toute fonction $f(z)$, holomorphe dans un cercle dont l'origine

est le centre, est développable en une série entière

$$(1) \qquad f(z) = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) z + (a_2 + b_2 i) z^2 + \ldots,$$

convergente dans ce cercle. Si l'on pose $z = re^{\theta i}$, r étant plus petit que le rayon R du cercle, on a

$$(2) \qquad X = a_0 + (a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta) r + (a_2 \cos 2\theta - b_2 \sin 2\theta) r^2 + \ldots,$$

$$(3) \qquad Y = b_0 + (a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta) r + (a_2 \sin 2\theta + b_2 \cos 2\theta) r^2 + \ldots.$$

Supposons que, sur la circonférence R, la fonction réelle X soit égale à une fonction réelle donnée $\varphi(\theta)$, qui reste finie, quand l'angle θ varie de o à 2π, mais qui peut être discontinue en certains points. Cette fonction $\varphi(\theta)$ est développable en une série trigonométrique

$$(4) \qquad \varphi(\theta) = \alpha_0 + (\alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta) + (\alpha_2 \cos 2\theta + \beta_2 \sin 2\theta) + \ldots,$$

dont les coefficients sont donnés par les intégrales

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos m\theta\, d\theta, \quad \beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin m\theta\, d\theta,$$

et ont des valeurs finies et déterminées. Pour que la fonction X sur la circonférence R soit égale à la fonction $\varphi(\theta)$, il faut que l'on ait

$$(5) \qquad a_0 = \alpha_0, \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{R}, \quad b_1 = -\frac{\beta_1}{R}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2}{R^2}, \quad b_2 = -\frac{\beta_2}{R^2}, \ldots,$$

et la fonction cherchée sera représentée par la série

$$(6) \qquad f(z) = (\alpha_0 + b_0 i) + (\alpha_1 - \beta_1 i)\frac{z}{R} + (\alpha_2 - \beta_2 i)\frac{z^2}{R^2} + \ldots,$$

qui est convergente dans le cercle R. Cette série renferme encore une constante arbitraire b_0; on la déterminera en donnant la valeur de la fonction Y en un point intérieur. Les fonctions X et Y sont alors connues dans tout le cercle; mais il est possible que la fonction Y n'ait pas une valeur finie en tous les points de la circonférence.

Supposons, par exemple, que, sur la circonférence de rayon un, la fonction X ait la valeur $\frac{\pi}{4}$, quand θ varie de o à π, et la valeur $-\frac{\pi}{4}$, quand θ varie de π à 2π, et que, pour $z=0$, Y soit nulle; on aura

$$\varphi(\theta)=\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\frac{1}{5}\sin 5\theta+\ldots,$$

et, par suite,

$$f(z)=-i\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots\right). \tag{7}$$

Sur la circonférence, la fonction Y est infinie pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$.

Considérons l'intégrale définie

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{dz}{1+z} &= \int_0^z \left(1-z+z^2\ldots\mp z^{n-1}\pm\frac{z^n}{1+z}\right)dz \\ &= \frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\ldots\mp\frac{z^n}{n}\pm\int_0^z\frac{z^n}{1+z}dz,\end{aligned}$$

qui est égale à la fonction $\log(1+z)$ s'annulant pour $z=0$. Si l'on astreint la variable z à rester dans le cercle de rayon un, et si l'on intègre suivant un rayon aboutissant à un point de la circonférence différent du point $z=-1$, le dernier terme tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment. On en conclut que la série

$$\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots$$

est encore convergente sur la circonférence, excepté pour $z=-1$, et a pour somme $\log(1+z)$.

On verra de même que la série

$$-\left(\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)$$

est convergente sur la circonférence, excepté au point $z=1$, et a pour somme $\log(1-z)$, ce qui justifie la remarque faite au n° 50. Il en

résulte que la série (7) est convergente sur la circonférence, excepté aux points $z = \pm 1$, et a pour somme $-\frac{i}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$.

Sur la circonférence, on a

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} = i\cot\frac{\theta}{2},$$

et, quand θ varie de 0 à π,

$$f(z) = -\frac{i}{2}\log\left(i\cot\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\,\mathrm{L}\cot\frac{\theta}{2};$$

en comparant avec la série (7), on en déduit

$$\frac{\pi}{4} = \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\cot\frac{\theta}{2} = \cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta + \ldots.$$

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

Des périodes.

142. Dans le chapitre IV du Livre II nous avons montré comment, à l'aide des quatre fonctions θ, qui se déduisent d'une même fonction Θ, on peut former des fonctions méromorphes doublement périodiques, et nous avons figuré cette propriété par la division du plan en parallélogrammes égaux construits sur les deux périodes. D'une manière générale, nous dirons qu'une fonction $f(z)$ admet les deux périodes ω et ω', lorsqu'on a

$$f(z+\omega)=f(z), \quad f(z+\omega')=f(z),$$

et, par suite,

$$f(z+m\omega+m'\omega')=f(z),$$

m et m' étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Nous supposerons que l'on n'a pas $f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=f(z)$, n étant un nombre entier, sans quoi on remplacerait la période ω par la période plus petite $\frac{\omega}{n}$; nous supposerons de même que l'on n'a pas $f\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=f(z)$.

Remarquons d'abord que le rapport des deux périodes est imaginaire. Car, si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ était réel et égal à une fraction ordinaire irréductible $\frac{n'}{n}$, on aurait

$$m\omega+m'\omega'=\frac{(mn+m'n')\,\omega}{n}.$$

on pourrait déterminer les deux nombres entiers m et m' de manière que $mn + m'n' = 1$; il en résulterait

$$m\omega + m'\omega' = \frac{\omega}{n},$$

et, par suite,

$$f\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = f(z),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ était incommensurable, en le supposant converti en fraction continue, il serait compris entre deux réduites consécutives $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, dont la différence est $\frac{1}{qq'}$; on pourrait donc le représenter par $\frac{p}{q} + \frac{h}{qq'}$, h étant un nombre compris entre -1 et $+1$, et l'on aurait

$$m\omega + m'\omega' = \left(\frac{mq + m'p}{q} + \frac{m'h}{qq'}\right)\omega,$$

et, en faisant $m = -p$, $m' = q$,

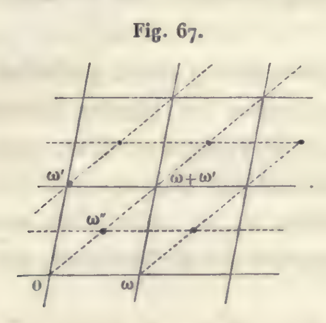
$$m\omega + m'\omega' = \frac{h\omega}{q'}, \quad f\left(z + \frac{h\omega}{q'}\right) = f(z).$$

La fonction aurait la même valeur au point z et au point infiniment voisin $z + \frac{h\omega}{q'}$. Appelons u la valeur de la fonction $f(z)$ au point z; il serait impossible de décrire du point z comme centre un cercle ne comprenant aucune racine de la fonction $f(z) - u$, autre que le point z, ce qui ne peut pas être (n° 115).

Le rapport des périodes étant imaginaire, les arguments des périodes ω, ω' déterminent deux directions différentes, et l'on pourra diviser le plan en un réseau de parallélogrammes égaux (*fig.* 67), dont les sommets correspondent aux valeurs $m\omega + m'\omega'$ de la variable z (n° 76). La fonction reprend la même valeur aux points homologues de ces différents parallélogrammes. Si, à l'intérieur du premier

parallélogramme, celui qui a pour sommets l'origine et les trois points ω, ω', $\omega + \omega'$, il n'y a aucun point ω'' tel que l'on ait $f(z + \omega'') = f(z)$,

Fig. 67.



nous dirons que le réseau formé sur les deux périodes ω, ω' est un réseau *élémentaire*.

143. Mais s'il existe un ou plusieurs points jouissant de cette propriété, on pourra construire un réseau à mailles plus petites. Remarquons d'abord que le nombre de ces points est limité; car, s'il y en avait une infinité, l'équation $f(z) - u_0 = 0$, dans laquelle u_0 est la valeur de u pour $z = 0$, admettrait une infinité de racines dans le parallélogramme, ce qui est impossible (nº 117). Concevons que la droite $O\omega$ se meuve parallèlement à elle-même, et soit ω'' le premier des points intérieurs dont nous venons de parler qu'elle rencontre; considérons le réseau construit sur les deux périodes ω, ω'', et qui, d'après sa formation même, est un réseau élémentaire; les sommets du premier réseau appartiennent au second; car, si un sommet du premier réseau ne coïncidait pas avec un sommet du second, il y aurait à l'intérieur de l'un des parallélogrammes, et par conséquent à l'intérieur du premier parallélogramme du second réseau, un point ω''' tel que $f(z + \omega''') = f(z)$, ce qui est impossible.

Il résulte de ce qui précède que toutes les périodes d'une fonction monotrope se réduisent à une ou à deux périodes distinctes. Dans le premier cas, elles sont de la forme $m\omega$; dans le second cas, de la forme $m\omega + m'\omega'$, m et m' désignant des nombres entiers quelconques, et le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant imaginaire.

Transformation des périodes.

144. Lorsque la fonction admet deux périodes distinctes, il y a une infinité de manières de former un réseau élémentaire. Il est évident d'abord, d'après ce que nous venons de dire, que les sommets de deux réseaux élémentaires coïncident. Soient ω, ω' les deux périodes d'un premier réseau élémentaire, ω_1, ω'_1 celles d'un second. Les sommets ω_1, ω'_1 du second réseau appartenant au premier, on a

$$\omega_1 = p\omega + p'\omega', \quad \omega'_1 = q\omega + q'\omega',$$

p, p', q, q' étant des nombres entiers. Les sommets ω, ω' du premier réseau appartenant au second, les valeurs de ω et de ω' tirées de ces relations doivent avoir la même forme, ce qui exige que les nombres p, p', q, q' vérifient la relation $pq' - qp' = \pm 1$, et cette condition est suffisante. Cette relation admettant une infinité de solutions, on en conclut que l'on peut remplacer le système des deux périodes ω, ω' par une infinité de systèmes équivalents.

Remarquons que deux réseaux élémentaires sont formés de parallélogrammes équivalents; car, si l'on pose

$$\omega = a + bi, \quad \omega' = a' + b'i,$$

l'aire du premier parallélogramme est $\pm(ab' - ba')$, celle du second

$$\pm[(pa + p'a')(qb + q'b') - (pb + p'b')(qa + q'a')] = \pm(pq' - qp')(ab' - ba').$$

145. La manière la plus simple de transformer un réseau élémentaire en un autre réseau élémentaire consiste à prendre

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega'_1 = q\omega + \omega',$$

q étant un nombre entier quelconque. Les deux parallélogrammes ont alors un côté commun $O\omega$ (*fig.* 68) et les côtés opposés au côté commun sont sur une même droite.

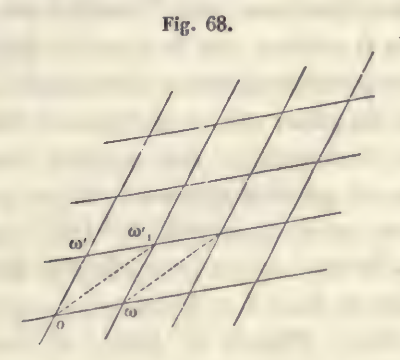
On peut toujours, par une série de transformations de cette sorte,

passer d'un réseau élémentaire (ω, ω') à un autre réseau élémentaire

$$\omega_1 = p\omega + p'\omega', \quad \omega'_1 = q\omega + q'\omega', \quad pq' - qp' = \pm 1.$$

Si p est plus grand que p' en valeur absolue, divisons p par p', et soit

Fig. 68.



$p = mp' + p''$; posons $q = mq' + q''$, la relation $pq' - qp' = \pm 1$ devient $p''q' - q''p' = \pm 1$, et l'on a

$$\omega_1 = p'(\omega' + m\omega) + p''\omega = p'\omega'' + p''\omega,$$
$$\omega'_1 = q'(\omega' + m\omega) + q''\omega = q'\omega'' + q''\omega,$$

en appelant ω'' la nouvelle période $\omega' + m\omega$. Divisons de même p' par p'', et soit $p' = m'p'' + p'''$; posons $q' = m'q'' + q'''$, nous aurons

$$\omega_1 = p''(\omega + m'\omega'') + p'''\omega'' = p''\omega''' + p'''\omega'',$$
$$\omega'_1 = q''(\omega + m'\omega'') + q'''\omega'' = q''\omega''' + q'''\omega'',$$

en appelant ω''' la nouvelle période $\omega + m'\omega''$. Après un certain nombre de transformations pareilles, on aura

$$\omega_1 = p^{(n-1)}\omega^{(n)} + p^{(n)}\omega^{(n-1)},$$
$$\omega'_1 = q^{(n-1)}\omega^{(n)} + q^{(n)}\omega^{(n-1)},$$

les coefficients satisfaisant à la relation $p^{(n-1)}q^{(n)} - q^{(n-1)}p^{(n)} = \pm 1$. Les deux nombres p et p' étant premiers entre eux, on arrivera à un reste $p^{(n-1)}$ égal à l'unité; le reste suivant $p^{(n)}$ étant nul, la relation précédente donne $q^{(n)} = \pm 1$, et l'on a

$$\omega_1 = \omega^{(n)}, \quad \omega'_1 = \pm\omega^{(n-1)} + q^{(n-1)}\omega^{(n)}.$$

Fonctions intermédiaires.

146. Certaines fonctions simplement périodiques, telles que e^z, $\sin z$, $\cos z$, restent holomorphes dans toute l'étendue du plan; telle est aussi la fonction $e^{\sin z}$. Mais il n'existe pas de fonction doublement périodique holomorphe dans un parallélogramme élémentaire, et par conséquent dans toute l'étendue du plan; car, si la fonction était holomorphe dans un parallélogramme élémentaire, son module serait moindre qu'une quantité fixe M dans ce parallélogramme, et par conséquent dans tout le plan, et la fonction serait constante (n° 126). La fonction Θ appartient à une classe de fonctions sur lesquelles M. Hermite a appelé l'attention des géomètres et dont il a démontré les principales propriétés (Lettre à Jacobi, 1844; *Œuvres de Jacobi* et *Cours de l'École Polytechnique*). Ces fonctions, intermédiaires entre les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, sont holomorphes dans toute l'étendue du plan, et jouissent des propriétés suivantes :

$$(1) \qquad f(z+\omega) = e^{az+b} f(z), \quad f(z+\omega') = e^{a'z+b'} f(z).$$

Nous verrons qu'on les exprime toutes à l'aide de la fonction Θ.

Remarquons d'abord que, si l'on remplace dans l'une et l'autre des relations précédentes z par $z+\omega'$ ou par $z+\omega$, on a

$$\frac{f(z+\omega+\omega')}{f(z)} = e^{(a+a')z+a\omega'+b+b'} = e^{(a+a')z+a'\omega+b+b'},$$

ce qui exige que les deux constantes a et a' satisfassent à la relation

$$(2) \qquad a\omega' - a'\omega = 2n\pi i,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Concevons le plan divisé, comme précédemment, en un réseau de parallélogrammes égaux. Il est évident que, si z_1 est un zéro de la fonction, toutes les valeurs de z représentées par la formule

$$z = z_1 + m\omega + m'\omega',$$

dans laquelle m et m' sont des nombres entiers quelconques, sont aussi des zéros de la fonction; ces zéros sont des points homologues des divers parallélogrammes. En répétant ici le raisonnement du n° 124, on démontre que le nombre des zéros compris dans chaque parallélogramme est égal à n; c'est ce que nous appellerons l'*ordre* de la fonction.

On ramène la recherche de ces fonctions à celles des fonctions de même sorte, mais qui admettent la période ω. Posons, en effet,

$$(3) \qquad f(z) = e^{Az^2+Bz}\varphi(z),$$

A et B étant des constantes arbitraires; la fonction $\varphi(z)$ jouit des mêmes propriétés, car on a

$$\varphi(z+\omega) = e^{(a-2A\omega)z+b-A\omega^2-B\omega}\varphi(z).$$

Si l'on choisit les constantes A et B de manière que

$$a - 2A\omega = 0, \quad b - A\omega^2 - B\omega = 0,$$

d'où

$$A = \frac{a}{2\omega}, \quad B = \frac{b}{\omega} - \frac{a}{2},$$

la fonction admettra la période ω, et l'on aura

$$\varphi(z+\omega') = e^{-\frac{2n\pi zi}{\omega} + \frac{a\omega'(\omega-\omega')}{2\omega} + \frac{b'\omega - b\omega'}{\omega}}\varphi(z).$$

147. Il s'agit donc de trouver une fonction holomorphe $\varphi(z)$ jouissant des propriétés

$$(4) \qquad \varphi(z+\omega) = \varphi(z), \quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{2n\pi zi}{\omega}+b}\varphi(z).$$

Cette fonction, étant holomorphe dans tout le plan et admettant la période ω, est développable en une série

$$(5) \qquad \varphi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{\frac{2m\pi zi}{\omega}},$$

ordonnée suivant les puissances entières, positives ou négatives, de

l'exponentielle $e^{\frac{2\pi zi}{\omega}}$, et convergente dans tout le plan (n° 99). Si l'on remplace z par $z+\omega'$, cette série devient

$$\varphi(z+\omega') = \Sigma A_m e^{2m\pi\rho i} e^{\frac{2m\pi zi}{\omega}},$$

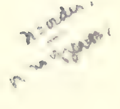
ρ désignant le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Mais la seconde des relations (4) donne

$$\varphi(z+\omega') = \Sigma A_m e^b e^{\frac{2(m-n)\pi zi}{\omega}} = \Sigma A_{m+n} e^b e^{\frac{2m\pi zi}{\omega}}.$$

De la comparaison des deux séries précédentes, on déduit

$$A_{m+n} = A_m e^{2m\pi\rho i - b}. \tag{6}$$

Tous les coefficients de la série pourront donc s'exprimer à l'aide des n coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, qui restent arbitraires.



Dans le cas où $n=0$, l'équation (6) se réduit à $A_m(e^{2m\pi\rho i-b}-1)=0$; tous les coefficients sont nuls, excepté un, par exemple A_m, et l'on a $b = 2m\pi\rho i$, $\varphi(z) = A_m e^{\frac{2m\pi zi}{\omega}}$; ainsi la fonction de l'espèce considérée, qui n'a pas de zéro, est une exponentielle.

Dans le cas où $n=1$, la relation (6) devient

$$A_{m+1} = A_m e^{2m\pi\rho i - b}.$$

En donnant à m successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$, et multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$A_m = A_0 e^{m(m-1)\pi\rho i - mb},$$

et, par suite,

$$\varphi(z) = A_0 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-z_1)+m^2\omega']} = A_0 \Theta(z-z_1),$$

en posant $z_1 = \frac{\omega'}{2} + \frac{b\omega}{2\pi i}$. On retrouve ainsi la fonction Θ; c'est la seule fonction de l'espèce considérée qui n'ait qu'un seul zéro dans le parallélogramme (ω, ω').

Avec cette fonction Θ, on peut former toutes les autres. Considérons en effet la fonction

$$\psi(z) = \prod_{h=1}^{h=n} \Theta\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + z - a_h\right),$$

qui a n zéros donnés $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans le parallélogramme (ω, ω'), et qui satisfait à des relations de la forme (4); si la fonction $\varphi(z)$ admet les mêmes zéros, la fonction holomorphe $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, n'ayant pas de zéros, et satisfaisant à des relations de même forme, est une exponentielle $Ce^{\frac{2m\pi zi}{\omega}}$, dans laquelle m est un nombre entier arbitraire; on a donc

(7) $$\varphi(z) = Ce^{\frac{2m\pi zi}{\omega}} \prod_{h=1}^{h=n} \Theta\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + z - a_h\right),$$

et, par suite,

(8) $$f(z) = Ce^{Az^2 + Bz} \prod_{h=1}^{h=n} \Theta\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + z - a_h\right),$$

A, B, C étant des constantes arbitraires. Telle est l'expression générale des fonctions intermédiaires de l'ordre n; elles renferment $n + 3$ constantes arbitraires, savoir les n zéros et les trois coefficients A, B, C. C'est à l'aide de ces fonctions holomorphes que l'on forme les fonctions doublement périodiques; car, si l'on considère deux fonctions intermédiaires satisfaisant aux mêmes relations (1), et, par conséquent, du même ordre, à cause de la relation (2), leur quotient sera une fonction méromorphe doublement périodique. Nous allons maintenant étudier en elles-mêmes les fonctions doublement périodiques.

148. Théorème I. — *La somme des résidus d'une fonction méromorphe doublement périodique, dans chaque parallélogramme élémentaire, est nulle.*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe admettant les deux périodes ω, ω'. Considérons un parallélogramme, rectiligne ou curviligne, ayant pour sommets z_0, $z_0 + \omega$, $z_0 + \omega'$, $z_0 + \omega + \omega'$, et dont le contour ne

passe par aucun pôle. Nous savons (n° 120) que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

relative à ce contour, est égale à la somme des résidus de la fonction $f(z)$ relatifs aux pôles situés dans le parallélogramme. Les côtés opposés du parallélogramme donnant dans l'intégrale des résultats égaux et de signes contraires, l'intégrale définie et, par conséquent, la somme des résidus, est nulle.

149. Théorème II. — *Toute fonction méromorphe doublement périodique admet au moins deux infinis dans chaque parallélogramme élémentaire.*

Comme nous l'avons déjà remarqué (n° 146), la fonction devient nécessairement infinie dans chaque parallélogramme élémentaire et, par conséquent, puisqu'elle est supposée méromorphe, elle admet un ou plusieurs pôles dans ce parallélogramme. Si tous les pôles α, β, ... sont simples, la fonction pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta} + \ldots + f_1(z),$$

$f_1(z)$ étant holomorphe dans le parallélogramme (n° 118); les résidus relatifs aux pôles sont A, B, ...; puisque la somme $A + B + \ldots$ des résidus est nulle, il est nécessaire qu'il y ait au moins deux pôles dans le parallélogramme. Mais, au lieu de deux pôles simples, il peut y avoir un pôle double; dans ce cas, on aura

$$f(z) = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + f_1(z),$$

le résidu étant nul.

150. Corollaire. — *Deux fonctions intermédiaires du premier ordre, satisfaisant aux mêmes relations*

$$f(z+\omega) = e^{az+b} f(z), \quad f(z+\omega') = e^{a'z+b'} f(z),$$

sont dans un rapport constant. Autrement ce rapport serait une fonction

doublement périodique n'ayant qu'un infini dans chaque parallélogramme (ω, ω'). C'est d'ailleurs ce que l'on peut vérifier directement à l'aide de la formule (8), qui représente ce genre de fonctions.

Il en résulte que les fonctions θ sont, abstraction faite d'un facteur constant, les seules qui jouissent des propriétés établies au n° 75, savoir :

$$(9)\quad \begin{cases} \theta_3(z+\omega) = \theta_3(z), \\ \theta_3(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta_3(z), \end{cases} \qquad (11)\quad \begin{cases} \theta(z+\omega) = \theta(z), \\ \theta(z+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta(z), \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \theta_2(z+\omega) = -\theta_2(z), \\ \theta_2(z+\omega') = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta_2(z), \end{cases} \qquad (12)\quad \begin{cases} \theta_1(z+\omega) = -\theta_1(z), \\ \theta_1(z+\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta_1(z). \end{cases}$$

151. Théorème III. — *La somme des ordres d'une fonction méromorphe doublement périodique, dans chaque parallélogramme élémentaire, est nulle.*

D'après le théorème du n° 122, la somme des ordres de la fonction $f(z)$ dans un parallélogramme est égale à l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \mathrm{D}\log f(z)\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme; la fonction $\mathrm{D}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, admettant les deux périodes ω, ω', comme la fonction proposée $f(z)$ et sa dérivée $f'(z)$, les parties de l'intégrale relatives aux côtés opposés sont égales et de signes contraires. Ainsi l'intégrale définie, et, par conséquent, la somme des ordres de la fonction $f(z)$, est nulle.

Corollaire. — Appelons n le nombre des infinis de la fonction $f(z)$ dans un parallélogramme élémentaire, en tenant compte du degré de multiplicité de chacun d'eux; le nombre des zéros sera aussi n. La fonction doublement périodique $f(z) - u$, dans laquelle nous regardons u comme une constante, ayant les mêmes infinis que $f(z)$, a aussi n zéros; on en conclut que, dans chaque parallélogramme, il y a n points où la fonction proposée $f(z)$ acquiert une valeur donnée quelconque u. D'après cela, nous caractérisons l'ordre d'une fonction doublement périodique par le nombre de ses infinis dans chaque parallélogramme; l'ordre est au moins égal à deux. Les trois fonctions

elliptiques λ, μ, ν, que nous avons formées à l'aide des quatre fonctions θ (n° 76), ont chacune deux infinis dans chacun des parallélogrammes du réseau; ce sont des fonctions du second ordre et les réseaux, tels que nous les avons construits, sont bien des réseaux élémentaires.

La dérivée $f'(z)$ admet les deux périodes ω, ω'. Le réseau construit sur ces deux périodes est aussi un réseau élémentaire de la fonction $f'(z)$; car si, dans le premier parallélogramme, il y avait un point ω'' tel que l'on eût $f'(z+\omega'')=f'(z)$, la fonction $f(z+\omega'')-f(z)$, ayant sa dérivée nulle, serait une constante A, et l'on aurait $f(z+m\omega'')-f(z)=m\mathrm{A}$; mais, comme on a ici $\omega'=m'\omega+m\omega''$, la constante A serait nulle, et l'on aurait $f(z+\omega'')=f(z)$. Soit p le degré d'un infini de la fonction $f(z)$; la dérivée $f'(z)$ admet le même infini au degré $p+1$; l'ordre de la dérivée est donc égal à $\Sigma(p+1)=n+n_1$, n_1 désignant le nombre des infinis distincts; il est égal, au moins à $n+1$, au plus à $2n$.

152. Théorème IV. — *Deux fonctions méromorphes doublement périodiques, aux mêmes périodes, et qui, dans un parallélogramme élémentaire, ont les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré, sont dans un rapport constant.*

Le rapport des deux fonctions proposées est une fonction doublement périodique, aux mêmes périodes. Ces deux fonctions ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré, leur rapport reste holomorphe; c'est donc une constante (n° 146).

153. Théorème V. — *Si l'on considère les zéros et les infinis d'une fonction méromorphe doublement périodique qui sont situés dans un même parallélogramme élémentaire, la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par des multiples des périodes.*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe doublement périodique aux périodes ω, ω', ayant n zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et n infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans un même parallélogramme élémentaire. On peut trouver dans ce parallélogramme un point a'_1 tel que l'excès de la somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ sur la somme $a'_1+a_2+\ldots+a_n$ soit de la forme $m\omega'+m'\omega$. Consi-

dérons la fonction

$$\varphi(z) = e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}} \frac{\theta_1(z - a'_1)\,\theta_1(z - a_2)\ldots\theta_1(z - a_n)}{\theta_1(z - \alpha_1)\,\theta_1(z - \alpha_2)\ldots\theta_1(z - \alpha_n)},$$

this θ_1 is the H_1 of Appell = ϑ_1 of Weierstrass

qui admet évidemment la période ω. Quand on y remplace z par $z + \omega'$, le numérateur et le dénominateur étant multipliés respectivement par

$$(-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\omega}[2nz - 2(a'_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n\omega']}, \quad (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\omega}[2nz - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + n\omega']},$$

la fonction $\varphi(z)$ est multipliée par

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}[m\omega' + (a'_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)]},$$

c'est-à-dire par 1; elle admet donc aussi la période ω'. D'ailleurs elle a dans le parallélogramme les zéros a'_1, $a_2, \ldots, a_n$ et les infinis α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Je dis maintenant que $a_1 = a'_1$; car, si cela n'avait pas lieu, le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ serait une fonction doublement périodique n'ayant qu'un infini a'_1 dans le parallélogramme, ce qui est impossible (nº 149). Ainsi les zéros et les infinis situés dans un même parallélogramme élémentaire satisfont à la relation

$$(13) \qquad \Sigma\alpha_h - \Sigma a_h = m\omega' + m'\omega.$$

Ce théorème important est dû à M. Liouville.

154. Théorème VI. — *Il existe une fonction méromorphe doublement périodique ayant des périodes données et admettant dans un parallélogramme élémentaire n zéros et n infinis donnés, tels que la somme des zéros ne diffère de celle des infinis que par des multiples des périodes.*

Soient ω, ω' les périodes données, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les infinis situés dans un même parallélogramme élémentaire; nous supposons que ces zéros et ces infinis satisfont à la relation

$$\Sigma\alpha_h - \Sigma a_h = m\omega' + m'\omega,$$

m et m' étant deux nombres entiers. Nous avons vu que la fonction

$$\varphi(z) = \mathrm{A} e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}} \prod_{h=1}^{h=n} \frac{\theta_1(z - a_h)}{\theta_1(z - \alpha_h)},$$

dans laquelle le coefficient A est arbitraire, jouit de toutes les propriétés énoncées; en vertu du théorème IV, c'est la seule. On déterminera le coefficient A en donnant la valeur de la fonction pour une valeur particulière de la variable.

155. Théorème VII. — *La somme des n valeurs de la variable qui, dans un même parallélogramme élémentaire, correspondent à une même valeur de la fonction, est constante, abstraction faite des multiples des périodes.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n infinis de la fonction doublement périodique $f(z)$ dans un parallélogramme élémentaire; la fonction $f(z) - u$, dans laquelle nous regardons u comme une constante, ayant les mêmes infinis que $f(z)$, a aussi n zéros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dans le parallélogramme; en vertu du théorème V, la somme $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ de ces n valeurs de z ne diffère de la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ des infinis que de multiples des périodes.

Corollaire I. — *Une fonction doublement périodique du second ordre, dont les infinis sont* α et β, *satisfait à la relation*

$$f(\alpha + \beta - z) = f(z). \tag{14}$$

Soit $f(z)$ une fonction doublement périodique du second ordre, aux périodes ω, ω', et ayant les deux infinis α et β; à chaque valeur de la fonction correspondent dans un même parallélogramme deux valeurs z_1 et z_2, dont la somme $z_1 + z_2$ ne diffère de la somme $\alpha + \beta$ des infinis que de multiples des périodes; on a donc

$$z_1 + z_2 = \alpha + \beta + m\omega + m'\omega';$$

d'où

$$z_2 = \alpha + \beta - z_1 + m\omega + m'\omega',$$

et, par suite,

$$f(\alpha + \beta - z_1) = f(z_1),$$

et cette relation a lieu, quelle que soit la valeur de z_1.

La fonction $\lambda(z)$, aux périodes 2ω, ω', ayant les infinis $\frac{\omega'}{2}$, $\omega - \frac{\omega'}{2}$,

satisfait à la relation $\lambda(\omega - z) = \lambda(z)$, qui d'ailleurs est une conséquence de la relation $\lambda(z + \omega) = -\lambda(z)$ (n° 76).

156. Corollaire II. — *La dérivée d'une fonction doublement périodique du second ordre, aux périodes ω, ω', et ayant deux infinis simples α et β, admet les quatre zéros* $\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$.

Il est des cas où l'on aperçoit immédiatement certains zéros et certains infinis de la fonction. Considérons d'abord une fonction satisfaisant à la relation $f(c - z) = -f(z)$, dans laquelle c est une constante. En faisant $z = \frac{c}{2}$, on a $f\left(\frac{c}{2}\right) = -f\left(\frac{c}{2}\right)$; d'où l'on conclut que la valeur $\frac{c}{2}$ rend la fonction nulle ou infinie. En faisant $z = \frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}$, on a de même $f\left(\frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}\right) = -f\left(\frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}\right)$; d'où l'on conclut que la valeur $\frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}$ rend aussi la fonction nulle ou infinie; on peut en dire autant de $\frac{c}{2} + \frac{\omega'}{2}$ et de $\frac{c}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$. Ainsi les quatre valeurs $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$ sont des zéros ou des infinis de la fonction. La somme des autres zéros deux à deux, et de même celle des infinis, est égale à c; car, les fonctions $f(z)$ et $f(c - z)$ admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis, si a est un zéro, $c - a$ est aussi un zéro, et, de même, si α est un infini, $c - \alpha$ est aussi un infini. Une fonction impaire rentre dans cette catégorie; il suffit de faire $c = 0$.

Considérons, en second lieu, une fonction satisfaisant à la relation $f(c - z) = f(z)$. Les zéros et les infinis de cette fonction ont encore, deux à deux, une somme égale à c. La dérivée satisfaisant à la relation $f'(c - z) = -f'(z)$, les quatre valeurs $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{c}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$ sont des zéros ou des infinis de la fonction $f'(z)$. Une fonction paire rentre dans cette catégorie; il suffit de faire $c = 0$.

Nous avons vu qu'une fonction doublement périodique du second ordre satisfait à la relation $f(\alpha + \beta - z) = f(z)$; il en résulte que les quatre valeurs $\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}$, attribuées

à z, rendent la dérivée $f'(z)$ nulle ou infinie. Si la fonction $f(z)$ a deux infinis simples α et β, la dérivée, ayant les deux infinis doubles α et β, est du quatrième ordre; ses quatre zéros sont les quatre valeurs précédentes. Si la fonction a un infini double α, la dérivée, ayant l'infini triple α, est du troisième ordre; ses trois zéros sont $\alpha + \frac{\omega}{2}$, $\alpha + \frac{\omega'}{2}$, $\alpha + \frac{\omega + \omega'}{2}$.

157. Théorème VIII. — *Les trois fonctions elliptiques satisfont aux deux relations*

$$\mu^2(z) + \lambda^2(z) = 1, \tag{15}$$

$$\nu^2(z) + k^2\lambda^2(z) = 1. \tag{16}$$

Les quatre fonctions $\theta^2(z)$ sont des fonctions intermédiaires du second ordre, ayant chacune un zéro double dans le parallélogramme (ω, ω'), et satisfaisant aux relations

$$\varphi(z+\omega) = \varphi(z), \quad \varphi(z+\omega') = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\varphi(z).$$

Les fonctions paires

$$\theta_2^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_2^2(z), \quad \theta_3^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_3^2(z)$$

satisfont aux mêmes relations et admettent le zéro double $z = 0$, comme la fonction $\theta_1^2(z)$; car leurs dérivées, étant impaires, s'annulent pour $z = 0$; ces deux fonctions sont dans des rapports constants avec la fonction $\theta_1^2(z)$; autrement ces rapports seraient des fonctions doublement périodiques, n'ayant pas d'infinis. On a donc

$$\theta_2^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_2^2(z) = A\theta_1^2(z),$$
$$\theta_3^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_3^2(z) = B\theta_1^2(z).$$

On détermine les constantes A et B en faisant $z = \frac{\omega'}{2}$, ce qui donne

$$A = \theta_3^2(0), \quad B = \theta_2^2(0),$$

et l'on obtient les deux relations

$$\theta_2^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_2^2(z) = \theta_3^2(0)\theta_1^2(z), \tag{17}$$

$$\theta_3^2(0)\theta^2(z) - \theta^2(0)\theta_3^2(z) = \theta_2^2(0)\theta_1^2(z), \tag{18}$$

desquelles on déduit les deux relations cherchées.

Si dans l'équation (16) on fait $z = \frac{\omega}{2}$ et si l'on remarque que $\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) = k'$ (nº 77), on trouve que les deux constantes k et k' vérifient la relation

$$k^2 + k'^2 = 1. \tag{19}$$

158. Théorème IX. — *Une fonction méromorphe $u = f(z)$, doublement périodique et du second ordre, satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4}, \tag{20}$$

le polynôme sous le radical étant du troisième ou du quatrième degré.

Lorsque la fonction u a deux infinis simples α et β, sa dérivée u', ayant deux infinis doubles α et β, est du quatrième ordre; si ω et ω' sont les périodes, les quatre zéros de la dérivée sont, comme nous l'avons vu (nº 156), $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega+\omega'}{2}$. La fonction u'^2 est du huitième ordre; elle a deux infinis quadruples α et β, et les quatre zéros précédents, mais chacun au second degré. Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(z) = &\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega}{2}\right)\right] \\ &\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega+\omega'}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

qui admet les mêmes infinis quadruples α et β. Le premier facteur s'annule pour $z = \frac{\alpha+\beta}{2}$; cette valeur est un zéro double, car elle annule la dérivée $f'(z)$ de ce premier facteur; il en est de même des autres facteurs. Les deux fonctions doublement périodiques u'^2 et $\varphi(z)$, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, chacun au même degré, sont dans un rapport constant. Dans ce cas, le polynôme placé sous le radical est du quatrième degré.

Lorsque la fonction u a un infini double α, sa dérivée u', ayant un infini triple, est du troisième ordre; ses trois zéros sont $\alpha + \frac{\omega}{2}$, $\alpha + \frac{\omega'}{2}$,

$\alpha + \frac{\omega + \omega'}{2}$. La fonction u'^2 est du sixième ordre; elle a un infini sextuple α et trois zéros doubles. Si l'on considère la fonction

$$\varphi(z) = \left[f(z) - f\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\alpha + \frac{\omega'}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\alpha + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)\right],$$

on verra, comme précédemment, que le rapport des fonctions u'^2 et $\varphi(z)$ est constant. Dans ce cas, le polynôme placé sous le radical est du troisième degré.

159. Corollaire. — Appliquons ce théorème à la fonction $\lambda(z)$, dont les périodes sont 2ω, ω'. On a ici

$$\alpha = \frac{\omega'}{2}, \quad \beta = \omega - \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\omega}{2}, \quad \lambda\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \omega\right) = -1,$$

$$\lambda\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}, \quad \lambda\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \omega + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{1}{k},$$

et l'équation différentielle se réduit à

$$(21) \qquad \frac{d\lambda}{dz} = g\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2)} = g\mu\nu.$$

Des relations établies au n° 157 on déduit en différentiant

$$(22) \qquad \frac{d\mu}{dz} = -g\lambda\nu = -gk'\sqrt{(1 - \mu^2)\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}\mu^2\right)},$$

$$(23) \qquad \frac{d\nu}{dz} = -gk^2\lambda\mu = gik'\sqrt{(1 - \nu^2)\left(1 - \frac{1}{k'^2}\nu^2\right)}.$$

En vertu des formules (22) du n° 77, on suppose que, dans les équations précédentes, les radicaux ont la valeur $+1$, le premier pour $z = 0$, le second pour $z = \frac{\omega}{2}$, le troisième pour $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$.

L'équation (21) renferme deux constantes k et g que l'on appelle, la première le *module*, la seconde le *multiplicateur* de la fonction elliptique λ. La constante k', qui satisfait à la relation $k^2 + k'^2 = 1$, est le *module complémentaire*. D'après les formules (17) du n° 76 et (23) du n° 77, les modules k et k' ne dépendent que de la constante $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$,

et par conséquent du rapport des périodes. Quant au multiplicateur g, on le détermine par la condition

$$(24) \qquad g=\lambda'(0)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta'_1(0)}{\theta(0)}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{k}\,\theta(0)}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

et l'on remarque que la quantité $g\omega$ ne dépend aussi que du rapport des périodes.

160. Théorème X. — *Si $f(z)$ est une fonction doublement périodique du second ordre, ayant pour infinis α et β, toute fonction doublement périodique $F(z)$, aux mêmes périodes, et satisfaisant à la relation $F(\alpha+\beta-z)=F(z)$, s'exprime rationnellement au moyen de $f(z)$.*

En vertu de la relation $F(\alpha+\beta-z)=F(z)$, si la fonction $F(z)$ admet un infini α_1, elle admet un autre infini $\alpha+\beta-\alpha_1$, et de même, si elle admet un zéro a_1, elle admet un autre zéro $\alpha+\beta-a_1$. La fonction $F(z)$ est donc d'ordre pair $2n$; nous représenterons ses zéros par

$$(a_1,\ \alpha+\beta-a_1),\ (a_2,\ \alpha+\beta-a_2),\ldots,\ (a_n,\ \alpha+\beta-a_n);$$

ses infinis par

$$(\alpha_1,\ \alpha+\beta-\alpha_1),\ (\alpha_2,\ \alpha+\beta-\alpha_2),\ldots,\ (\alpha_n,\ \alpha+\beta-\alpha_n).$$

Considérons la fonction doublement périodique

$$\varphi(z)=\frac{[f(z)-f(a_1)]\,[f(z)-f(a_2)]\ldots[f(z)-f(a_n)]}{[f(z)-f(\alpha_1)]\,[f(z)-f(\alpha_2)]\ldots[f(z)-f(\alpha_n)]}.$$

Tous les facteurs deviennent infinis en même temps que $f(z)$, c'est-à-dire pour les valeurs α et β; chacune de ces valeurs de z est donc un infini du degré n du numérateur et du dénominateur, et la fraction conserve une valeur finie. Un facteur $f(z)-f(a_h)$ du numérateur, s'annulant pour $z=a_h$, admet le second zéro $\alpha+\beta-a_h$; de même un facteur $f(z)-f(\alpha_h)$ du dénominateur admet les deux zéros α_h et $\alpha+\beta-\alpha_h$, qui sont des infinis de la fraction. La fonction $\varphi(z)$ admet les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $F(z)$, et par conséquent le rapport des deux fonctions est constant.

161. Théorème XI. — *Toute fonction méromorphe doublement périodique s'exprime rationnellement au moyen d'une fonction du second ordre, aux mêmes périodes, et de sa dérivée.*

Soient $u = f(z)$ une fonction du second ordre, aux périodes ω, ω', et ayant pour infinis α et β, $F(z)$ une fonction de l'ordre n aux mêmes périodes, et ayant pour infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Considérons d'abord la fonction

$$\varphi(z) = F(z) + F(\alpha + \beta - z),$$

qui est de l'ordre $2n$, car elle admet les $2n$ infinis

$$(\alpha_1, \alpha + \beta - \alpha_1), \ (\alpha_2, \alpha + \beta - \alpha_2), \ldots, \ (\alpha_n, \alpha + \beta - \alpha_n);$$

elle satisfait à la relation $\varphi(\alpha + \beta - z) = \varphi(z)$; elle est donc égale à une fraction rationnelle en u, et l'on a, d'après le théorème précédent,

$$(25) \qquad \varphi(z) = F(z) + F(\alpha + \beta - z) = \frac{M}{L},$$

L et M étant des polynômes entiers en u du degré n.

Considérons ensuite la fonction

$$\psi(z) = F(z) - F(\alpha + \beta - z),$$

qui est aussi de l'ordre $2n$; car elle admet les mêmes infinis que la fonction $\varphi(z)$; elle satisfait à la relation $\psi(\alpha + \beta - z) = -\psi(z)$, comme la fonction $f'(z)$; d'après une remarque du n° 156, cette fonction admet les quatre zéros de la fonction $f'(z)$, savoir $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\omega+\omega'}{2}$ et $2n - 4$ autres zéros qui, deux à deux, ont une somme égale à $\alpha + \beta$. La fonction $\chi(z) = \frac{\psi(z)}{f'(z)}$ conserve donc une valeur finie quand le dénominateur $f'(z)$ s'annule; elle est aussi de l'ordre $2n$, car elle admet les $2n$ infinis de $\psi(z)$, qui sont les mêmes que ceux de $\varphi(z)$; ses $2n$ zéros sont les deux infinis doubles α et β de $f'(z)$ et les $2n - 4$ zéros de $\psi(z)$, autres que ceux de $f'(z)$; elle satisfait, d'ailleurs, à la relation de $\chi(\alpha + \beta - z) = \chi(z)$; on en conclut qu'elle est égale à une fraction rationnelle $\frac{N}{L}$ en u, dont le dénominateur est le

même que celui de la fraction précédente et le numérateur du degré $n - 2$; on a donc

$$(26) \qquad \psi(z) = \mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(\alpha + \beta - z) = \frac{\mathrm{N}f'(z)}{\mathrm{L}}.$$

Des deux relations (25) et (26) on déduit la relation cherchée

$$(27) \qquad \mathrm{F}(z) = \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}f'(z)}{2\,\mathrm{L}}.$$

Ce théorème est dû à M. Liouville.

162. Corollaire. — Soient $f(z) = \mu(z)$, $\mathrm{F}(z) = \mu(nz)$, n étant un nombre entier. On peut prendre $\alpha = \frac{\omega'}{2}$, $\beta = -\frac{\omega'}{2}$, d'où $\alpha + \beta = 0$. Puisque $\mathrm{F}(-z) = \mathrm{F}(z)$, on conclut, d'après le théorème X, que $\mu(nz)$ s'exprime par une fraction rationnelle en $\mu(z)$. De même $\nu(nz)$ s'exprime par une fraction rationnelle en $\nu(z)$.

Soient maintenant $f(z) = \lambda(z)$, $\mathrm{F}(z) = \lambda(nz)$. La somme $\alpha + \beta$ est égale à ω. Quand n est impair, comme on a $\mathrm{F}(\alpha + \beta - z) = \mathrm{F}(z)$, la fonction $\lambda(nz)$ s'exprime par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Quand n est pair, comme on a $\mathrm{F}(\alpha + \beta - z) = -\mathrm{F}(z)$, d'après la relation (26) établie au numéro précédent, $\lambda(nz)$ est égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Nous nous occuperons plus tard de la détermination de ces fractions rationnelles.

163. *Fonctions inverses.* — Considérons l'équation

$$(28) \qquad f(z) - u = 0,$$

dans laquelle $f(z)$ est une fonction méromorphe doublement périodique de l'ordre n, aux périodes ω, ω', et où nous regardons z comme l'inconnue. A chaque valeur finie ou infinie de u correspondent n séries de valeurs de z de la forme

$$(29) \qquad z_1 + m\omega + m'\omega', \quad z_2 + m\omega + m'\omega', \ldots, \quad z_n + m\omega + m'\omega',$$

m et m' étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Le premier membre de l'équation étant une fonction méromorphe de u et de z pour toutes les valeurs finies ou infinies de u et pour toutes les

valeurs finies de z, les racines jouissent des propriétés énoncées au n° 130. L'équation peut servir à définir une fonction implicite z de la variable u; on fera partir la variable du point u_0, en attribuant à z une valeur initiale z_0 qui soit racine simple de l'équation; tant que z reste racine simple, elle est fonction holomorphe de u. Supposons que, la variable u arrivant au point u_1 par un chemin déterminé, z devienne égale à une racine multiple z_1 du degré p; si l'on fait $u = u_1 + u'$, $z = z_1 + z'$, l'équation devient

$$-u' + f^p(z_1)\frac{z'^p}{1.2\ldots p} + f^{p+1}(z_1)\frac{z'^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)} + \ldots = 0.$$

On se trouve ici dans le cas simple examiné au n° 33 : les p racines voisines de z_1 forment un système circulaire, et se permutent les unes dans les autres, quand la variable u tourne autour du point u_1. Les mêmes propriétés subsistent quand la variable u devient infinie; car, si l'on pose $u = \frac{1}{u'}$, le point $u' = 0$ est un point ordinaire ou un point critique semblable aux précédents. Si donc on figure la variable u par le mouvement d'un point sur la sphère, on peut dire que sur toute la sphère il n'y a pas de points singuliers autres que des points critiques algébriques.

Les points critiques sont donnés par les équations simultanées

$$(30) \qquad f(z) - u = 0, \quad f'(z) = 0.$$

La seconde équation est satisfaite par n' séries de valeurs de z de la forme $z_h + m\omega + m'\omega'$, auxquelles correspondent n' valeurs de u. Relativement à la variable u, il y a donc un nombre fini n' de points critiques; mais à chacun d'eux se rapportent une infinité de groupes de racines égales; car, s'il y a un groupe de p racines égales à z_1, il y a un groupe de p racines égales à $z_1 + m\omega + m'\omega'$, m et m' étant des nombres entiers quelconques.

Quand la variable u, partant du point initial u_0, décrit différents chemins aboutissant à un même point u, la fonction z acquiert toutes les valeurs comprises dans les formules (29); car, lorsqu'on regarde z comme la variable, à des chemins allant du point z_0 à ces diverses valeurs correspondent des chemins allant du point u_0 au même point u.

Inversement, lorsque la variable u décrit ces derniers chemins, la fonction z décrit les premiers.

164. La considération de la fonction inverse permet de démontrer le théorème VII sans avoir recours à la formation des fonctions doublement périodiques à l'aide de la fonction Θ. La fonction $\frac{1}{f(z)-u}$, dans laquelle u est une constante, étant doublement périodique, la somme des résidus de cette fonction relatifs aux pôles $z_1, z_2, \ldots, z_n$, situés dans un parallélogramme élémentaire, est nulle (n° 148). L'un de ces résidus est la limite vers laquelle tend la quantité $\frac{z-z_1}{f(z)-f(z_1)}$ quand z tend vers z_1; cette limite est $\frac{1}{f'(z_1)}$. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{1}{f'(z_1)}+\frac{1}{f'(z_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(z_n)}=0.$$

Concevons maintenant que u varie d'une manière continue, sans passer par aucun point critique; chacune des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ variera d'une manière continue et sera une fonction holomorphe de u dans une certaine étendue; il en est de même de leur somme ζ. Puisque $\frac{dz_1}{du}=\frac{1}{f'(z_1)}$, l'équation précédente devient

$$\frac{d\zeta}{du}=\frac{dz_1}{du}+\frac{dz_2}{du}+\ldots+\frac{dz_n}{du}=0.$$

On en conclut que la somme ζ reste constante.

Il peut se faire toutefois que, dans leurs variations, un ou plusieurs des points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sortent du parallélogramme où ils étaient d'abord; en les remplaçant par les points homologues de ce parallélogramme, on augmente ou on diminue la somme de l'une des périodes.

165. Théorème XII. — *Une fonction méromorphe doublement périodique $f(z)$, aux périodes 2ω, ω', de l'ordre $2n$, et qui satisfait à la relation $f(z+\omega)=-f(z)$, est une fonction linéaire des quantités $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+z-\alpha\right)$, si les infinis α sont simples, et, en outre, de leurs dérivées si les infinis sont multiples.*

Considérons le parallélogramme ABDC, dont le sommet A est un point arbitraire z_0, et les deux sommets B et C les points $z_0 + \omega$, $z_0 + \omega'$. Soit t un point situé à l'intérieur. La fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{\lambda(z - t)}$$

admettant les deux périodes ω, ω', la somme de ses résidus dans le parallélogramme ABDC est nulle, et l'on a l'équation

$$\frac{f(t)}{g} + \sum_h \mathcal{E}_{\alpha_h} \varphi(z) = 0, \tag{31}$$

α_h étant l'un quelconque des infinis de la fonction $f(z)$ situés dans le parallélogramme ABDC, moitié du parallélogramme élémentaire relatif à cette fonction; l'autre moitié renfermera les infinis $\alpha_h + \omega$.

Lorsque l'infini α_h de la fonction $f(z)$ est simple, on a

$$\mathcal{E}_{\alpha_h} \varphi(z) = \frac{A_h}{\lambda(\alpha_h - t)},$$

en désignant par A_h le résidu de la fonction $f(z)$. Si tous les infinis sont simples, l'équation (31) devient

$$f(t) = g \sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_h}{\lambda(t - \alpha_h)}.$$

Puisque les deux membres changent de signes quand on augmente t de ω, l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de t. En remplaçant t par z, on a

$$f(z) = g \sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_h}{\lambda(z - \alpha_h)}. \tag{32}$$

Supposons maintenant que α_h soit un infini multiple du degré p. En

posant $z = \alpha_h + z'$ et développant en séries, on a

$$f(\alpha_h + z') = \frac{A_p^h}{z'^p} + \frac{A_{p-1}^h}{z'^{p-1}} + \ldots + \frac{A_1^h}{z'} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\lambda(\alpha_h - t + z')} = -k\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h - z'\right)$$

$$= k\left[-\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right) + \frac{z'}{1}\lambda'\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right) - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^p \frac{z'^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\lambda^{(p-1)}\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right) + \ldots\right],$$

et l'on trouve pour le résidu cherché

$$k\left[-A_1^h\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right) + \frac{A_2^h}{1}\lambda'\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right) - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^p \frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\lambda^{(p-1)}\left(\frac{\omega'}{2} + t - \alpha_h\right)\right].$$

On obtient ainsi l'équation

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z) = gk\sum_h \Bigg[& A_1^h\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z - \alpha_h\right) - \frac{A_2^h}{1}\lambda'\left(\frac{\omega'}{2} + z - \alpha_h\right) + \ldots \\ & + (-1)^{p-1} \frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\lambda^{(p-1)}\left(\frac{\omega'}{2} + z - \alpha_h\right)\Bigg], \end{aligned} \right.$$

qui est vraie pour toutes les valeurs de z.

166. Corollaire I. — *Une puissance impaire de $\lambda(z)$ est une fonction linéaire de $\lambda(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs.*

La fonction $\lambda^{2n+1}(z)$ change de signe quand on remplace z par $z + \omega$; elle n'admet qu'un infini $\frac{\omega'}{2}$ au degré $2n + 1$ dans le parallélogramme (ω, ω'); on peut donc lui appliquer la formule (33). La fonction

$$f(\alpha_h + z') = \lambda^{2n+1}\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{1}{k^{2n+1}\lambda^{2n+1}(z')}$$

étant impaire par rapport à z', son développement en série ne con-

tient que des puissances impaires de z', et l'on a

$$\frac{1}{\lambda^{2n+1}(z')} = \frac{A_{2n+1}}{z'^{2n+1}} + \frac{A_{2n-1}}{z'^{2n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z'} + \ldots.$$

On en déduit

$$(34) \qquad \lambda^{2n+1}(z) = \frac{g}{k^{2n}} \left[A_1 \lambda(z) + \frac{A_3}{1.2} \lambda''(z) + \ldots + \frac{A_{2n+1}}{1.2\ldots 2n} \lambda^{(2n)}(z) \right].$$

Remarquons que le coefficient A_{2n+1} est égal à $\frac{1}{g^{2n+1}}$.

Si l'on remplace z par $z + \frac{\omega'}{2}$, il vient

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^{2n+1}(z)} = gk \left[A_1 \lambda\left(z + \dfrac{\omega'}{2}\right) + \dfrac{A_3}{1.2} \lambda''\left(z + \dfrac{\omega'}{2}\right) + \ldots \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{A_{2n+1}}{1.2\ldots 2n} \lambda^{(2n)}\left(z + \dfrac{\omega'}{2}\right) \right]. \end{cases}$$

167. Corollaire II. — *Une puissance paire de $\lambda(z)$ est une fonction linéaire de $\lambda^2(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs.*

La fonction

$$\varphi(z) = \frac{\lambda^{2n}(z)}{\lambda^2(z-t)}$$

admettant les deux périodes ω, ω', la somme de ses résidus dans le parallélogramme ABDC est nulle. Le résidu relatif à l'infini double $z = t$ est $\frac{1}{g^2} D_t \lambda^{2n}(t)$. Pour trouver le résidu relatif à l'infini $\frac{\omega'}{2}$ du degré $2n$, nous poserons, comme précédemment, $z = \frac{\omega'}{2} + z'$; d'où

$$\lambda^{2n}\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \frac{1}{k^{2n}\lambda^{2n}(z')} = \frac{1}{k^{2n}} \left[\frac{A_{2n}}{z'^{2n}} + \frac{A_{2n-2}}{z'^{2n-2}} + \ldots + \frac{A_2}{z'^2} + \ldots \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2\left(\dfrac{\omega'}{2} - t + z'\right)} = k^2 \lambda^2(t - z') = k^2 \Big[& \lambda^2(t) - \frac{z'}{1} D_t \lambda^2(t) + \frac{z'^2}{1.2} D_t^2 \lambda^2(t) - \ldots \\ & - \frac{z'^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} D_t^{2n-1} \lambda^2(t) + \ldots \Big]; \end{aligned}$$

le résidu est

$$-\frac{1}{k^{2n-2}}\left[\frac{A_2}{1}D_t\lambda^2(t)+\frac{A_4}{1.2.3}D_t^3\lambda^2(t)+\ldots+\frac{A_{2n}}{1.2\ldots(2n-1)}D_t^{2n-1}\lambda^2(t)\right],$$

et l'on a l'équation

$$D_t\lambda^{2n}(t)=\frac{g^2}{k^{2n-2}}\left[\frac{A_2}{1}D_t\lambda^2(t)+\frac{A_4}{1.2.3}D_t^3\lambda^2(t)+\ldots+\frac{A_{2n}}{1.2\ldots(2n-1)}D_t^{2n-1}\lambda^2(t)\right].$$

Concevons maintenant que, après avoir multiplié les deux membres de cette équation par dt, on intègre en faisant varier t de o à z, sans passer par aucun pôle de $\lambda(z)$; on aura

$$(36)\quad \lambda^{2n}(z)=\frac{g^2}{k^{2n-2}}\left[C+\frac{A_2}{1}\lambda^2(z)+\frac{A_4}{1.2.3}D^2\lambda^2(z)+\ldots+\frac{A_{2n}}{1.2\ldots(2n-1)}D^{2n-2}\lambda^2(z)\right],$$

C étant une constante que l'on déterminera par la condition que le second membre s'annule pour $z=0$.

En remplaçant z par $z+\frac{\omega'}{2}$, on en déduit

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\lambda^{2n}(z)}=g^2k^2\Bigg[C&+\frac{A_2}{1}\lambda^2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{A_4}{1.2.3}D^2\lambda^2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)+\ldots\\&+\frac{A_{2n}}{1.2\ldots(2n-1)}D^{2n-2}\lambda^2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

168. Théorème XIII. — *Une fonction méromorphe doublement périodique $f(z)$, aux périodes ω, ω', est une fonction linéaire des quantités $D\log\theta_1(z-\alpha)$, si les infinis α sont simples, et, en outre, de leurs dérivées si les infinis sont multiples.*

En vertu des relations (10) et (11) du n° 75, les quatre fonctions impaires $D\log\theta(z)=\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$ admettent la période ω et éprouvent un accroissement constant $-\frac{2\pi i}{\omega}$ quand on remplace z par $z+\omega'$; car chacune d'elles satisfait à la relation

$$D\log\theta(z+\omega')=-\frac{2\pi i}{\omega}+D\log\theta(z).$$

On en déduit

$$D^2 \log\theta(z+\omega') = D^2 \log\theta(z).$$

Ainsi les quatre fonctions paires $D^2 \log\theta(z)$ admettent la seconde période ω'; ce sont des fonctions méromorphes doublement périodiques du second ordre, aux périodes ω, ω'. Chacune d'elles a un infini double qui est le zéro de la fonction correspondante θ.

Considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\, D_z \log\theta_1(z-t)\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme ABDC, dont nous nous sommes servis dans les numéros précédents, et dans lequel nous marquons toujours un point t. Les deux côtés BD, CA donnent des résultats égaux et de signes contraires. Si z est un point de AB, le point homologue de CD est $z+\omega'$, et l'on a

$$D_z \log\theta_1(z-t+\omega') = -\frac{2\pi i}{\omega} + D_z \log\theta_1(z-t);$$

l'intégrale définie se réduit donc à l'intégrale

$$\frac{1}{\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(z)\,dz$$

suivant le côté AB; nous la représenterons par H.

Cherchons maintenant les résidus de la fonction $f(z)\, D_z \log\theta_1(z-t)$ relatifs aux pôles situés dans le parallélogramme. Ces pôles sont le point t et les infinis α_h de la fonction $f(z)$. Le résidu relatif au pôle simple t est $f(t)$, puisque le résidu de la fonction $D_z \log\theta_1(z-t)$ est égal à l'ordre de la fonction $\theta_1(z-t)$ en ce point (n° 121), c'est-à-dire à l'unité. On a donc l'équation

$$(38) \qquad f(t) - \sum_h \mathcal{E}_{\alpha_h} f(z)\, D_t \log\theta_1(z-t) = H.$$

Lorsque l'infini α_h est simple, le résidu cherché est

$$A_h D_t \log\theta_1(t-\alpha_h),$$

A_h désignant le résidu de $f(z)$. Si tous les infinis sont simples, l'équation devient, en remplaçant t par z,

$$f(z) = \text{H} + \sum_{h=1}^{h\,2n} \text{A}_h \, \text{D}_z \log\theta_1(z - \alpha_h). \tag{39}$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ait un infini multiple α_h du degré p. En posant $z = \alpha_h + z'$ et développant en série, il vient

$$f(\alpha_h + z') = \frac{\text{A}_p^h}{z'^p} + \frac{\text{A}_{p-1}^h}{z'^{p-1}} + \cdots + \frac{\text{A}_1}{z'} + \cdots,$$

$$\text{D}_t \log\theta_1(t - \alpha_h - z') = \text{D}\log\theta_1(t - \alpha_h) - \frac{z'}{1}\text{D}^2\log\theta_1(t - \alpha_h) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{z'^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\text{D}^p\log\theta_1(t - \alpha_h) + \ldots,$$

et le résidu cherché est

$$\text{A}_1^h\,\text{D}\log\theta_1(t - \alpha_h) - \frac{\text{A}_2^h}{1}\text{D}^2\log\theta_1(t - \alpha_h) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{\text{A}_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\text{D}^p\log\theta_1(t - \alpha_h).$$

On obtient ainsi l'équation

$$\left\{\begin{aligned} f(z) = \text{H} + \sum_h \Big[&\text{A}_1^h\,\text{D}\log\theta_1(z - \alpha_h) - \frac{\text{A}_2^h}{1}\text{D}^2\log\theta_1(z - \alpha_h) + \ldots \\ &+ (-1)^{p-1}\frac{\text{A}_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\text{D}^p\log\theta_1(z - \alpha_h)\Big]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Il est facile de reconnaître que les seconds membres des équations (39) et (40) admettent la période ω', grâce à la relation $\Sigma\,\text{A}_1^h = 0$ (n° 148), ce qui démontre que ces équations sont générales.

169. Corollaire. — Chacune des fonctions $\frac{1}{\lambda^2(z)}, \frac{\mu^2(z)}{\lambda^2(z)}, \frac{\nu^2(z)}{\lambda^2(z)}$ admet les périodes ω, ω', et a un infini double $\alpha = 0$ dans le premier parallélogramme; ces fonctions étant paires, dans les développements en séries le coefficient A_1 est nul; on a d'ailleurs $\text{A}_2 = \frac{1}{g^2}$; on obtient ainsi les

expressions

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2(z)} = \dfrac{1}{g^2}[H - D^2 \log\theta_1(z)], \\ \dfrac{\mu^2(z)}{\lambda^2(z)} = \dfrac{1}{g^2}[H_1 - D^2 \log\theta_1(z)], \\ \dfrac{\nu^2(z)}{\lambda^2(z)} = \dfrac{1}{g^2}[H_2 - D^2 \log\theta_1(z)]. \end{cases}$$

En remplaçant z par l'une des quantités $z + \frac{\omega'}{2}$, $z + \frac{\omega}{2}$, $z + \frac{\omega + \omega'}{2}$, et tenant compte des relations des n°s 75 et 77, on en déduit

$$(42)\quad \begin{cases} \lambda^2(z) = \dfrac{1}{g^2 k^2}[H - D^2 \log\theta(z)], \\ \nu^2(z) = \dfrac{-1}{g^2}[H_1 - D^2 \log\theta(z)], \\ \mu^2(z) = \dfrac{-1}{g^2 k^2}[H_2 - D^2 \log\theta(z)]; \end{cases}$$

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\nu^2(z)}{\mu^2(z)} = \dfrac{1}{g^2}[H - D^2 \log\theta_2(z)], \\ \dfrac{\lambda^2(z)}{\mu^2(z)} = \dfrac{1}{g^2 k'^2}[H_1 - D^2 \log\theta_2(z)], \\ \dfrac{1}{\mu^2(z)} = \dfrac{1}{g^2 k'^2}[H_2 - D^2 \log\theta_2(z)]; \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)} = \dfrac{1}{g^2 k^2}[H - D^2 \log\theta_3(z)], \\ \dfrac{1}{\nu^2(z)} = \dfrac{-1}{g^2 k'^2}[H_1 - D^2 \log\theta_3(z)], \\ \dfrac{\lambda^2(z)}{\nu^2(z)} = \dfrac{-1}{g^2 k^2 k'^2}[H_2 - D^2 \log\theta_3(z)]. \end{cases}$$

On a ainsi les carrés des trois fonctions elliptiques, de leurs réciproques et de leurs rapports deux à deux, ou, ce qui est la même chose, les carrés des rapports des quatre fonctions θ deux à deux.

On obtient les valeurs des constantes en faisant $z = 0$ dans la première des équations (42), la seconde des équations (43) et la troisième des équations (44). On trouve

$$(45)\quad H = \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}, \quad H_1 = \frac{\theta''_2(0)}{\theta_2(0)}, \quad H_2 = \frac{\theta''_3(0)}{\theta_3(0)}.$$

Les deux théorèmes précédents sont dus à M. Hermite; le dernier joue dans les questions d'intégration le même rôle que la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples; il permet d'exprimer l'intégrale d'une fonction doublement périodique quelconque à l'aide des fonctions $\log\theta_1(z-\alpha_h)$ et de leurs dérivées. On a, par exemple,

$$(46) \qquad \int_0^z \lambda^2(z)\,dz = \frac{1}{g^2k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}z - \mathrm{D}\log\theta(z)\right].$$

Les fonctions ϑ.

170. Les zéros des quatre fonctions θ, formées avec les deux constantes ω, ω', sont représentés par les formules

$$\text{zéros de } \theta_1, \quad z = m\omega + m'\omega',$$
$$\text{»} \quad \theta_2, \quad z = \frac{\omega}{2} + (m\omega + m'\omega'),$$
$$\text{»} \quad \theta, \quad z = \frac{\omega'}{2} + (m\omega + m'\omega'),$$
$$\text{»} \quad \theta_3, \quad z = \frac{\omega+\omega'}{2} + (m\omega + m'\omega'),$$

où m et m' désignent deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs (n° 74). Les zéros de chacune d'elles sont les sommets d'un réseau construit sur les périodes ω, ω'. Imaginons que l'on forme avec deux autres constantes ω_1, ω'_1 quatre nouvelles fonctions θ analogues aux précédentes. Pour que l'une des nouvelles fonctions ait les mêmes zéros que l'une des premières, il faut que les sommets des deux réseaux correspondants coïncident, et, par conséquent, que les deux systèmes de périodes (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) soient équivalents (n° 144); on doit donc avoir

$$(1) \qquad \omega_1 = a\omega + b\omega', \quad \omega'_1 = a'\omega + b'\omega',$$

les nombres entiers a, b, a', b' satisfaisant à la relation $ab' - ba' = 1$; nous prenons le déterminant égal à $+1$, afin que dans le rapport $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$

le coefficient de i soit positif, ce qui est nécessaire pour la formation des nouvelles fonctions θ (n° 73). On en déduit les formules inverses

$$(2) \qquad \omega = b'\omega_1 - b\omega'_1, \quad \omega' = -a'\omega_1 + a\omega'_1.$$

Lorsque cette condition est remplie, c'est-à-dire lorsque le système des deux périodes ω_1, ω'_1 est équivalent au système ω, ω', les quatre fonctions θ ont respectivement les mêmes zéros. Ceci est évident pour les deux fonctions désignées par $\theta_1(z)$; comme elles ont un zéro commun $z = 0$, tous les sommets des deux réseaux correspondants coïncident, et, par conséquent, les deux fonctions ont les mêmes zéros. Les trois autres fonctions jouissent de la même propriété; mais ce ne sont pas nécessairement les fonctions homologues qui ont les mêmes zéros; cela dépend du choix des nombres entiers a, b, a', b'. Remarquons d'abord, en vertu de la relation $ab' - ba' = 1$, que, de ces quatre nombres, deux au moins sont impairs, savoir a et b', ou b et a', et que les quatre ne peuvent être impairs. Remarquons ensuite que les nombres $a + a'$, $b + b'$ ne peuvent être tous les deux pairs; car les deux nombres a et b', par exemple, étant impairs, il faudrait que les deux autres a' et b le fussent aussi, ce qui est impossible. En outre, des trois nombres $a, a', a + a'$, deux sont impairs, un pair; de même, des trois nombres $b, b', b + b'$, deux sont impairs, un pair. Il résulte de là que les trois quantités

$$\frac{\omega_1}{2} = a\frac{\omega}{2} + b\frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega'_1}{2} = a'\frac{\omega}{2} + b'\frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2} = (a + a')\frac{\omega}{2} + (b + b')\frac{\omega'}{2}$$

sont respectivement égales aux quantités $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega + \omega'}{2}$, augmentées de multiples des périodes ω, ω', mais dans un ordre quelconque, et, par conséquent, que les trois fonctions $\theta_2, \theta, \theta_3$ dans les deux systèmes ont les mêmes zéros. Supposons, par exemple, que a et b' soient des nombres impairs, b et a' des nombres pairs, on aura

$$\frac{\omega_1}{2} \equiv \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega'_1}{2} \equiv \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2} \equiv \frac{\omega + \omega'}{2};$$

dans ce cas, les fonctions homologues ont les mêmes zéros. Mais si a

et b' étaient pairs, b et a' impairs, on aurait

$$\frac{\omega_1}{2} \equiv \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega'_1}{2} \equiv \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2} \equiv \frac{\omega + \omega'}{2};$$

la fonction θ_2 de chaque système aurait les mêmes zéros que la fonction θ de l'autre, les deux fonctions θ_3 ayant d'ailleurs les mêmes zéros.

Cela posé, désignons, d'une manière générale, par $\varphi(z)$ une fonction du premier système, et par $\psi(z)$ la fonction du second système qui a les mêmes zéros. Une fonction intermédiaire, c'est-à-dire satisfaisant aux relations (1) du n° **146**, par rapport aux périodes ω, ω', satisfait évidemment à des relations de même forme par rapport aux périodes équivalentes ω_1, ω'_1. Il résulte aussi de la formule (8) du n° **147**, qui représente toutes les fonctions de cette espèce, que le rapport de deux fonctions intermédiaires, qui ont les mêmes zéros, est une exponentielle de la forme Ce^{Az^2+Bz}. Ce rapport étant ici une fonction paire de z, le coefficient B est nul, et l'on a

$$\psi(z) = Ce^{Az^2}\varphi(z).$$

Déterminons maintenant la constante A. De cette relation on déduit

$$\begin{aligned}
&D\log\psi(z) = 2Az + D\log\varphi(z),\\
&D\log\psi(z+\omega_1) = 2A(z+\omega_1) + D\log\varphi(z+\omega_1),\\
&D\log\frac{\psi(z+\omega_1)}{\psi(z)} = 2A\omega_1 + D\log\frac{\varphi(z+\omega_1)}{\varphi(z)};
\end{aligned}$$

mais, en vertu des relations (10) et (12) du n° **75**, on a

$$D\log\frac{\psi(z+\omega_1)}{\psi(z)} = 0, \quad D\log\frac{\varphi(z+\omega_1)}{\varphi(z)} = -\frac{2b\pi i}{\omega};$$

on en conclut $A = \dfrac{b\pi i}{\omega\omega_1}$, et, par suite,

$$\psi(z) = Ce^{\frac{b\pi z^2 i}{\omega\omega_1}}\varphi(z). \tag{3}$$

171. Parmi les systèmes de périodes équivalents au système primitif (ω, ω'), nous considérerons en particulier le système $\omega_1 = -\omega'$, $\omega'_1 = \omega$, que l'on obtient en faisant $a = 0$, $b = -1$, $a' = 1$, $b' = 0$; on a alors

$$(4) \qquad \frac{\omega_1}{2} = \frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega'_1}{2} = \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2} = \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

Les deux fonctions θ_3 ont les mêmes zéros, ainsi que les deux fonctions θ_1; la fonction θ de chaque système a les mêmes zéros que la fonction θ_2 de l'autre. Nous désignerons par la lettre ϑ les nouvelles fonctions ainsi obtenues, et nous disposerons les indices de telle sorte que les fonctions θ et ϑ, qui ont les mêmes zéros, soient affectées du même indice. Si donc on appelle Θ_1 la fonction analogue à Θ, et formée avec les nouvelles constantes, savoir :

$$\Theta_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega'}(2nz + n^2\omega)} = e^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega\omega'}(z+n\omega)^2},$$

on posera, comme au n° **74**,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_3(z) &= \Theta_1(z), \\ \vartheta_2(z) &= \Theta_1\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \Theta_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right), \\ \vartheta(z) &= e^{\frac{\pi i}{\omega_1}\left(z + \frac{\omega'_1}{4}\right)} \Theta_1\left(z + \frac{\omega'_1}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i}{\omega'}\left(z + \frac{\omega}{4}\right)} \Theta_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right), \\ \vartheta_1(z) &= \frac{1}{i} e^{\frac{\pi i}{\omega_1}\left(z + \frac{\omega'_1}{4}\right)} \Theta_1\left(z + \frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}\right) = \frac{1}{i} e^{-\frac{\pi i}{\omega'}\left(z + \frac{\omega}{4}\right)} \Theta_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

On peut appliquer aux fonctions ϑ les formules et les relations établies pour les fonctions θ, en mettant $-\omega'$ et ω à la place de ω et ω', et en ayant soin de remplacer θ et θ_2 par ϑ_2 et ϑ. Si l'on appelle p la quantité $e^{\frac{\pi\omega'_1 i}{\omega_1}} = e^{-\frac{\pi\omega i}{\omega'}}$, analogue à la quantité q, et ayant comme celle-ci

son module plus petit que l'unité, on aura, d'après les formules (8) du n° 74,

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(z) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} p^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega'},\\
\vartheta_2(z) &= 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n p^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega'},\\
\vartheta(z) &= 2\sum_{n=1}^{n=\infty} p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi z}{\omega'},\\
\vartheta_1(z) &= -2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi z}{\omega'}.
\end{aligned}\right.$$

Dans les applications, la première période ω est réelle et positive, la seconde ω' imaginaire et de la forme $\omega''i$, ω'' étant une quantité réelle et positive; les quantités q et p qui entrent dans les séries sont réelles, positives et inférieures à l'unité; en outre la variable z est réelle; les formules (8) du n° 74 contiennent des sinus et des cosinus ordinaires, les formules précédentes des sinus et des cosinus hyperboliques.

172. Les relations (10) et (11) du n° 75 deviennent

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(z+\omega') &= \vartheta_3(z),\\
\vartheta_2(z+\omega') &= \vartheta_2(z),\\
\vartheta(z+\omega') &= -\vartheta(z),\\
\vartheta_1(z+\omega') &= -\vartheta_1(z);
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(z+\omega) &= \frac{1}{p}e^{\frac{2\pi zi}{\omega'}}\vartheta_3(z),\\
\vartheta_2(z+\omega) &= -\frac{1}{p}e^{\frac{2\pi zi}{\omega'}}\vartheta_2(z),\\
\vartheta(z+\omega) &= \frac{1}{p}e^{\frac{2\pi zi}{\omega'}}\vartheta(z),\\
\vartheta_1(z+\omega) &= -\frac{1}{p}e^{\frac{2\pi zi}{\omega'}}\vartheta_1(z).
\end{aligned}\right.$$

D'après le corollaire du n° 150, les fonctions ϑ sont, abstraction faite

d'un facteur constant, les seules qui satisfassent aux relations précédentes.

On a aussi

$$(9)\quad \begin{cases} \vartheta_3(z+m\omega) = p^{-m^2} e^{\frac{2m\pi zi}{\omega'}} \vartheta_3(z), \\ \vartheta_2(z+m\omega) = (-1)^m p^{-m^2} e^{\frac{2m\pi zi}{\omega'}} \vartheta_2(z), \\ \vartheta(z+m\omega) = p^{-m^2} e^{\frac{2m\pi zi}{\omega'}} \vartheta(z), \\ \vartheta_1(z+m\omega) = (-1)^m p^{-m^2} e^{\frac{2m\pi zi}{\omega'}} \vartheta_1(z); \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \vartheta_2(z), \\ \vartheta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \vartheta_3(z), \\ \vartheta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = \vartheta_1(z), \\ \vartheta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right) = -\vartheta(z); \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta(z), \\ \vartheta\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_3(z), \\ \vartheta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_2(z); \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_1(z), \\ \vartheta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{-1}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_3(z), \\ \vartheta_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta(z), \\ \vartheta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{p}} e^{\frac{\pi zi}{\omega'}} \vartheta_2(z). \end{cases}$$

173. En vertu de la relation (3) du n° **170**, les deux fonctions $\theta_3(z)$, $\vartheta_3(z)$, qui ont les mêmes zéros, satisfont à la relation

$$\vartheta_3(z) = \mathrm{C}e^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\,\theta_3(z).$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$, $z+\frac{\omega'}{2}$, $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$, on en déduit

$$(13)\qquad \frac{\vartheta(z)}{\theta(z)} = \frac{\vartheta_1(z)}{i\theta_1(z)} = \frac{\vartheta_2(z)}{\theta_2(z)} = \frac{\vartheta_3(z)}{\theta_3(z)} = \mathrm{C}e^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}.$$

Les formules (18) du n° **76**, qui définissent les fonctions elliptiques, deviennent

$$(14)\qquad \lambda(z) = \frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}, \quad \mu(z) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}, \quad \nu(z) = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}.$$

On en déduit

$$(15)\qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},$$

et l'on a

$$(16)\quad \vartheta_3(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} p^{n^2}, \quad \vartheta_2(0) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n p^{n^2}, \quad \vartheta(0) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}.$$

Le module k et le module complémentaire k' sont exprimés en fonction de p au lieu de l'être en fonction de q. Le multiplicateur g est donné par la formule

$$(17)\quad g = \frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\vartheta'_1(0)}{\vartheta(0)}, \quad \vartheta'_1(0) = -\frac{2\pi}{\omega'}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\,p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}.$$

Nous déterminerons plus tard la constante C. p320.

CHAPITRE IV.

SUITE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

Remarques sur les réseaux.

174. Considérons le réseau construit sur les périodes ω, ω', et dont les sommets correspondent aux valeurs $z = m\omega + m'\omega'$, m et m' étant des nombres entiers quelconques; si l'on a

$$\Omega = a\omega + b\omega', \quad \Omega' = a'\omega + b'\omega',$$

a, b, a', b' étant des nombres entiers tels que le déterminant $ab' - ba'$ soit différent de zéro, ce qui revient à supposer que les points Ω, Ω' ne sont pas en ligne droite avec l'origine, il est évident que les sommets du réseau construit sur les périodes Ω, Ω' coïncident avec certains sommets du premier réseau. Le rapport de l'aire du parallélogramme (Ω, Ω') à celle du parallélogramme (ω, ω') est égal au déterminant $\pm(ab' - ba')$.

On peut remplacer le système des deux périodes ω, ω' par un système équivalent ω_1, ω'_1, de manière que les deux formules précédentes se réduisent à la forme simple

$$\Omega = a_1\omega_1, \quad \Omega' = a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1;$$

car si l'on pose

$$\omega = m\omega_1 + n\omega'_1, \quad \omega' = m'\omega_1 + n'\omega'_1,$$

on a

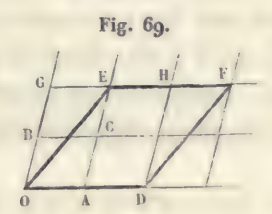
$$\Omega = (am + bm')\omega_1 + (an + bn')\omega'_1, \quad \Omega' = (a'm + b'm')\omega_1 + (a'n + b'n')\omega'_1.$$

On choisira deux nombres entiers n et n' premiers entre eux, satisfaisant à la condition $an + bn' = 0$, puis deux nombres entiers m et m'

satisfaisant à la condition $mn' - nm' = \pm 1$. On peut même supposer que les nombres entiers a_1 et b'_1 sont positifs, sans quoi on changerait les signes des périodes. La valeur absolue du déterminant, qui est ici $a_1 b'_1$, n'a pas changé.

Soient OACB (*fig.* 69) le parallélogramme (ω_1, ω'_1), ODFE le parallélogramme (Ω, Ω'); le parallélogramme ODHG, dont les sommets D et G

Fig. 69.



sont les points $z = a_1 \omega_1$, $z = b'_1 \omega'_1$, est l'assemblage de $a_1 b'_1$ parallélogrammes du premier réseau. Il y a donc, dans ce parallélogramme, $a_1 b'_1$ points homologues d'un point donné, par rapport aux périodes ω_1, ω'_1; mais les points du triangle DHF sont respectivement homologues de ceux du triangle OGE. On en conclut que, dans le parallélogramme ODFE, il y a aussi $a_1 b'_1$ points homologues d'un point donné.

175. Considérons maintenant deux réseaux (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) et supposons que, parmi les sommets de ces deux réseaux, plusieurs coïncident; si trois non en ligne droite coïncident, il y en aura une infinité, qui formeront un réseau, dont nous désignerons par Ω, Ω' un système de périodes élémentaires. On aura les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega = a\omega + b\omega' = a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \\ \Omega' = a'\omega + b'\omega' = a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1, \end{cases}$$

que l'on pourra réduire à la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega = a\omega = a_1\omega_1, \\ \Omega' = a'\omega + b'\omega' = a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1, \end{cases}$$

en transformant chacun des systèmes proposés en un système équivalent.

Les déterminants sont alors $N = ab'$, $N_1 = a_1 b'_1$. Cherchons les caractères auxquels on reconnaîtra que le réseau (Ω, Ω') comprend bien tous les sommets communs aux deux réseaux proposés. Il faut d'abord que les nombres entiers a et a_1 soient premiers entre eux; car, s'ils avaient un plus grand commun diviseur d, les sommets du réseau $\left(\frac{\Omega}{d}, \Omega'\right)$, qui est formé de parallélogrammes d fois plus petits que ceux du réseau (Ω, Ω'), seraient communs aux deux réseaux proposés. Cette condition étant remplie, supposons qu'il y ait, dans le parallélogramme (Ω, Ω'), un ou plusieurs sommets communs; on pourra choisir l'un d'eux Ω'', de manière que le réseau (Ω, Ω'') comprenne tous les sommets communs, et l'on aura

$$\Omega'' = a''\omega + b''\omega' = a''_1\omega_1 + b''_1\omega'_1,$$

$$\Omega' = m\Omega + n\Omega'' = (ma + na'')\omega + nb''\omega' = (ma_1 + na''_1)\omega_1 + nb''_1\omega'_1,$$

l'aire du parallélogramme (Ω, Ω') étant n fois celle du parallélogramme (Ω, Ω''). On en déduit

$$ma + na'' = a', \quad ma_1 + na''_1 = a'_1,$$
$$nb'' = b', \qquad nb''_1 = b'_1.$$

Les deux dernières relations montrent que n doit être un diviseur commun de b' et b'_1; elles donnent les deux nombres entiers b'' et b''_1. Les deux premières relations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$m(aa''_1 - a_1 a'') = a'a''_1 - a'_1 a'', \quad n(aa''_1 - a_1 a'') = aa'_1 - a_1 a'.$$

Le nombre $aa'_1 - a_1 a'$ doit être divisible par n; soit h le quotient; de l'équation $aa''_1 - a_1 a'' = h$, dans laquelle a et a_1 sont premiers entre eux, on déduira des valeurs de a'' et a''_1 de la forme $a'' = hg$, $a''_1 = hg_1$, les nombres g et g_1 satisfaisant à la relation $ag_1 - a_1 g = 1$; l'autre équation donnera ensuite $m = a'g_1 - a'_1 g$. On conclut de ce qui précède que, pour que le réseau (Ω, Ω') soit un réseau élémentaire des sommets communs aux deux réseaux proposés, il est nécessaire et il suffit que les deux nombres a et a_1 soient premiers entre eux, et que le plus grand commun diviseur des trois nombres b', b'_1, $aa'_1 - a_1 a'$ soit égal à l'unité.

176. Lorsque les deux réseaux (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) admettent un réseau de sommets communs (Ω, Ω'), on peut trouver un troisième réseau $(\varepsilon, \varepsilon')$, tel que les sommets des deux réseaux proposés appartiennent à ce troisième réseau. Nous supposerons, afin de simplifier, que les deux systèmes de périodes proposés ont été préalablement choisis de manière à réduire les relations (1) à la forme (2). Les sommets du réseau (ω, ω') appartenant au réseau $(\varepsilon, \varepsilon')$, on doit avoir

$$\omega = p\varepsilon + q\varepsilon', \quad \omega' = p'\varepsilon + q'\varepsilon',$$

p, q, p', q' étant des nombres entiers; mais on peut choisir les périodes $\varepsilon, \varepsilon'$, de manière à réduire ces relations à la forme

$$(3) \qquad \omega = p\varepsilon, \quad \omega' = p'\varepsilon + q'\varepsilon'.$$

A cause de la relation $a\omega = a_1\omega_1$, on aura aussi

$$(4) \qquad \omega_1 = p_1\varepsilon, \quad \omega'_1 = p'_1\varepsilon + q'_1\varepsilon'.$$

En substituant dans les relations (2), on obtient les relations

$$ap = a_1 p_1, \quad a'p + b'p' = a'_1 p_1 + b'_1 p'_1, \quad b'q' = b'_1 q'_1.$$

De la première, on déduit

$$p = a_1 h, \quad p_1 = ah,$$

h étant un nombre entier. Appelons δ le plus grand commun diviseur des nombres b', b'_1, et soient $b' = \delta b''$, $b'_1 = \delta b''_1$; la troisième donne

$$q' = b''_1 k, \quad q'_1 = b'' k,$$

k étant un nombre entier. La seconde devient

$$b''p' - b''_1 p'_1 = \frac{(aa'_1 - a_1 a')h}{\delta}.$$

Les deux nombres $aa'_1 - a_1 a'$ et δ étant premiers entre eux, on doit prendre pour h un multiple de δ. Soit $h = \delta h'$, la relation précédente se réduit à

$$b''p' - b''_1 p'_1 = (aa'_1 - a_1 a')h';$$

on en déduit pour p' et p'_1 des valeurs entières. Les déterminants des

formules (3) et (4) sont

$$pq' = a_1 b'_1 kh' = kh' N_1,$$
$$p_1 q'_1 = ab' kh' = kh' N.$$

Le parallélogramme $(\varepsilon, \varepsilon')$ sera le plus grand possible, si l'on fait $h' = 1$, $k = 1$; les déterminants sont alors respectivement égaux à N_1 et à N.

177. Théorème XIV. — *Deux fonctions méromorphes doublement périodiques, dont les réseaux ont un réseau de sommets communs, sont liées par une équation algébrique.*

Soient $u = f(z)$, $v = F(z)$ deux fonctions de z, méromorphes dans toute l'étendue du plan, doublement périodiques, d'ordres n et n_1, et ayant pour périodes, la première ω et ω', la seconde ω_1 et ω'_1. Nous supposons que les réseaux relatifs à ces deux fonctions ont un réseau (Ω, Ω') de sommets communs. L'aire du parallélogramme (Ω, Ω') est égale à N fois celle du parallélogramme (ω, ω'), et à N_1 fois celle du parallélogramme (ω_1, ω'_1). A une valeur de u, finie ou infinie, correspondent n points z dans chaque parallélogramme (ω, ω'), et, par conséquent, nN points dans le parallélogramme (Ω, Ω'). A cette valeur de u correspondent donc, dans toute l'étendue du plan, nN séries de valeurs de z de la forme $z_h + m\Omega + m'\Omega'$; mais aux valeurs de z d'une même série correspond une seule valeur de v. Ainsi, à chaque valeur de u, finie ou infinie, correspondent nN valeurs de v.

Si l'on figure la variable u par le mouvement d'un point sur la sphère, il est aisé de voir que la fonction v de u n'a, sur toute la sphère, pas d'autres points singuliers que des pôles ou des points critiques algébriques. Lorsque les n valeurs de z qui, dans un parallélogramme (ω, ω'), correspondent à une valeur u_1 attribuée à u, sont racines simples de l'équation $f(z) - u_1 = 0$, chacune d'elles est une fonction holomorphe de u dans le voisinage du point u_1; si aucune des nN valeurs de z situées dans le parallélogramme (Ω, Ω') ne coïncide avec un pôle de la fonction $F(z)$, les nN valeurs de v seront finies, et chacune d'elles sera une fonction holomorphe de z et par conséquent de u dans le voisinage du point u_1. Lorsque l'une de ces nN valeurs de z, que nous

désignerons par z_h, coïncide avec un pôle de la fonction $F(z)$, on a, d'une part,

$$z - z_h = (u - u_1)\varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction holomorphe de u dans le voisinage du point u_1 et qui ne s'annule pas pour $u = u_1$; d'autre part, puisque le point z_h est un pôle du degré p de la fonction $F(z)$,

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_h)^p},$$

$\psi(z)$ étant une fonction holomorphe de z dans le voisinage de la valeur z_h et qui ne s'annule pas pour $z = z_h$. On en déduit

$$v = \frac{\chi(u)}{(u - u_1)^p},$$

$\chi(u)$ étant une fonction holomorphe de u dans le voisinage du point u_1, et qui ne s'annule pas pour $u = u_1$. Ce point u_1 est un pôle du degré p de l'une des branches de la fonction v.

Supposons maintenant que l'équation $f(z) - u_1 = 0$ ait une racine z_1 du degré p; dans le voisinage du point u_1, l'équation admettra p racines peu différentes de z_1, et formant un système circulaire (n° 33). A ces p valeurs de z correspondent p valeurs de v peu différentes de la quantité $v_1 = F(z_1)$, et formant elles-mêmes un système circulaire. Chacune des N valeurs z_h de z, homologues de z_1 dans le parallélogramme (Ω, Ω'), donnera de même un groupe de p valeurs de v, peu différentes de la quantité $v_h = F(z_h)$, et formant un système circulaire. Si la valeur z_h coïncidait avec un pôle de la fonction $F(z)$, on poserait $v = \frac{1}{v'}$, et l'on aurait à considérer un groupe de p valeurs très-petites de v', formant aussi un système circulaire. Le point u_1 est donc un point critique algébrique pour les branches de la fonction v qui deviennent égales en ce point.

Les mêmes propriétés subsistent quand la variable u devient infinie; il suffit de poser $u = \frac{1}{u'}$ et de donner à la nouvelle variable u' des valeurs très-petites. Les n valeurs de z qui, dans le parallélogramme (ω, ω'),

correspondent à la valeur $u' = 0$ sont les pôles de la fonction $f(z)$; mais rien n'est changé dans le raisonnement : le point $u' = 0$, par rapport à la fonction v, est, ou un point ordinaire, ou un pôle, ou un point critique algébrique.

Nous venons de démontrer que v est une fonction de u, n'ayant, sur toute la sphère, aucun point singulier autre que des pôles et des points critiques algébriques; elle n'admet d'ailleurs, en chaque point, qu'un nombre limité de valeurs. On en conclut, d'après le théorème du n° 135, qu'elle est une fonction algébrique de u. L'équation algébrique qui lie les deux variables u et v, mise sous forme entière, est en général du degré $n\mathrm{N}$ par rapport à v, et du degré $n_1\mathrm{N}_1$ par rapport à u.

178. *Remarque.* — Il peut arriver que l'équation entre u et v s'abaisse à des degrés sous-multiples de $n_1\mathrm{N}_1$ et de $n\mathrm{N}$. Nous avons vu qu'à une valeur u_1 de u correspondent $n\mathrm{N}$ valeurs de z, abstraction faite des multiples de Ω et de Ω'; désignons-les par $z_1, z_2, \ldots$; les $n\mathrm{N}$ valeurs correspondantes de v, que nous appellerons $v_1, v_2, \ldots$, sont des fonctions holomorphes de u, excepté dans le voisinage des pôles ou des points critiques. La différence de deux valeurs de v est aussi une fonction holomorphe de u, avec les mêmes restrictions. Supposons que les k valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$ restent égales entre elles, lorsque la variable u se meut dans une petite étendue; chacune des fonctions $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \ldots, v_k - v_1$ étant nulle dans cette étendue, sera nulle dans tout le plan (n° 114), et par conséquent les k branches $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de la fonction v coïncident pour toutes les valeurs de u. On peut faire décrire à la variable u une courbe fermée, telle que la valeur z_1 se change en une quelconque z_{k+1} des valeurs de z n'appartenant pas au premier groupe $z_1, z_2, \ldots, z_k$; les autres valeurs de ce premier groupe se changeront en $z_{k+2}, z_{k+3}, \ldots, z_{2k}$. Les k branches $v_1, v_2, \ldots, v_k$ coïncident toujours pendant ce mouvement; on en conclut que les k branches $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{2k}$ de la fonction coïncident aussi. Ainsi les $n\mathrm{N}$ valeurs de v se partagent en groupes composés chacun de k valeurs égales entre elles, ce qui exige que le nombre k soit un diviseur de $n\mathrm{N}$.

Inversement, supposons qu'on donne à la variable v une valeur quelconque, v_1 par exemple; parmi les $n_1\mathrm{N}_1$ valeurs correspondantes de z se trouvent les k valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_k$ considérées précédemment et

auxquelles correspond la même valeur u_1 de u. Aucune des autres valeurs de z ne donne la même valeur de u; car, si à la valeur z_{k+1} correspondait aussi la valeur u_1, à cette valeur u_1 correspondraient plus de k valeurs de z donnant la même valeur v_1 de v. Il en résulte que les $n_1 N_1$ valeurs de u qui correspondent à une même valeur de v se partagent aussi en groupes composés chacun de k valeurs égales entre elles, ce qui exige que le nombre k soit un diviseur de $n_1 N_1$. L'équation s'abaissera donc au degré $\frac{nN}{k}$ par rapport à v, et au degré $\frac{n_1 N_1}{k}$ par rapport à u.

179. Théorème XV. — *Lorsque les deux fonctions sont paires, l'équation algébrique à laquelle elles satisfont s'abaisse à des degrés moitiés.*

Remarquons d'abord qu'une fonction doublement périodique paire est d'ordre pair; car, si l'on considère le parallélogramme élémentaire dont l'origine est le centre, les valeurs de z qui correspondent à une même valeur de u, étant égales deux à deux et de signes contraires, seront en nombre pair dans ce parallélogramme. Nous avons formé les réseaux avec les points homologues de l'origine. Concevons maintenant que l'on forme les réseaux avec les points homologues du point $z_0 = -\frac{\Omega + \Omega'}{2}$; alors le centre du premier parallélogramme (Ω, Ω') coïncidera avec l'origine. A une valeur de u correspondent n points z dans chaque parallélogramme (ω, ω') et par conséquent nN dans le parallélogramme (Ω, Ω'), qui a pour centre l'origine; ces points étant deux à deux symétriques par rapport à l'origine, on n'a que $\frac{nN}{2}$ valeurs de v. De même, à chaque valeur de v correspondent $\frac{n_1 N_1}{2}$ valeurs de u. Ainsi l'équation algébrique est du degré $\frac{nN}{2}$ par rapport à v et du degré $\frac{n_1 N_1}{2}$ par rapport à u.

180. Théorème XVI. — *Deux fonctions méromorphes paires et doublement périodiques du second ordre, dont les réseaux ont un réseau de sommets communs, sont liées par une équation algébrique dont chaque membre ne contient que l'une des variables et est une fraction rationnelle de cette variable.*

Les deux réseaux (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) ayant un réseau (Ω, Ω') de sommets communs, il existe plusieurs réseaux $(\varepsilon, \varepsilon')$ dont les sommets des deux réseaux proposés font partie (n° 176). Considérons le plus grand d'entre eux; les aires des parallélogrammes (ω, ω'), (ω_1, ω'_1) sont égales respectivement à N_1 fois et à N fois celle du parallélogramme $(\varepsilon, \varepsilon')$. Désignons par w une fonction méromorphe paire, admettant les deux périodes ε et ε', et du second ordre. Les réseaux (ω, ω'), $(\varepsilon, \varepsilon')$, relatifs aux fonctions u et w, ont pour sommets communs précisément ceux du réseau (ω, ω'). Il résulte du théorème précédent que l'équation entre w et u est du premier degré en w et du degré N_1 en u; on en conclut que w est une fraction rationnelle en u du degré N_1, et l'on a $w = \frac{U}{U_1}$, U et U_1 étant des polynômes entiers en u du degré N_1. De même, w est une fraction rationnelle en v du degré N et l'on a $w = \frac{V}{V_1}$, V et V_1 étant des polynômes entiers en v du degré N. L'équation cherchée est donc de la forme

$$(5) \qquad \frac{U}{U_1} = \frac{V}{V_1}.$$

Remarque. — Nous avons supposé que les fonctions u et v du second ordre sont paires. Remarquons que toute fonction doublement périodique du second ordre peut être rendue paire par l'addition d'une constante à la variable. Soient α et β les deux infinis de la fonction $u = f(z)$, on a

$$f(\alpha + \beta - z) = f(z),$$

et par suite

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - z\right) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + z\right).$$

En désignant par α_1 et β_1 les deux infinis de la fonction $v = F(z)$, on a de même

$$F\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} - z\right) = F\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + z\right).$$

La relation entre les deux fonctions paires $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + z\right)$, $F\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} + z\right)$ a la forme indiquée précédemment. Si l'on remplace ensuite z

par $z - \frac{\alpha + \beta}{2}$, la relation aura lieu entre les deux fonctions $f(z)$, $F(z+h)$, la lettre h désignant la constante $\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

181. Théorème XVII. — *Une fonction doublement périodique et sa dérivée sont liées par une équation algébrique.*

La fonction $u = f(z)$ et sa dérivée $u' = f'(z)$ ont les mêmes périodes ω, ω', et, par conséquent, le même parallélogramme élémentaire; si n est l'ordre de la fonction proposée, nous savons (n° 151) que l'ordre n' de la dérivée peut varier de $n+1$ à $2n$. Les deux fonctions u et u' sont donc liées par une équation algébrique

$$F(u', u) = 0, \tag{6}$$

dont il est facile de déterminer le degré.

La fonction inverse est représentée par l'intégrale définie

$$z - z_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{u'}\, du, \tag{7}$$

dans laquelle u' est une fonction algébrique de u donnée par l'équation (6). Cette intégrale a été étudiée dans le Chapitre IV du Livre III; nous avons vu qu'à chaque couple de valeurs de u et u' correspond une valeur de z augmentée de multiples des périodes. Ces périodes sont les valeurs de l'intégrale définie relatives aux cycles, c'est-à-dire aux courbes fermées qui ramènent le même couple (u, u'); ici les périodes se réduisent à deux. Puisque les valeurs de z qui correspondent à un même couple (u, u') diffèrent entre elles de multiples des périodes, il est impossible qu'en deux points z situés dans un même parallélogramme élémentaire, la fonction u et sa dérivée u' aient respectivement les mêmes valeurs. On en conclut que la dérivée u' acquiert n valeurs différentes aux n points z qui, dans un parallélogramme élémentaire, correspondent à une valeur donnée de u, et que, de même, la fonction u acquiert n' valeurs différentes aux n' points qui correspondent à une valeur donnée de u'. L'équation (6) est donc du degré n par rapport à u' et du degré n' par rapport à u.

La dérivée u' ne devenant infinie pour aucune valeur finie de u, le coefficient de u'^n est constant et l'équation (6) se met sous la forme

$$(8) \qquad u'^n + U_1 u'^{n-1} + U_2 u'^{n-2} + \ldots + U_n = 0,$$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ désignant des polynômes entiers en u, dont les degrés ne peuvent surpasser n'. La somme des n valeurs de $\frac{dz}{du}$ ou de $\frac{1}{u'}$, qui correspondent à une même valeur de u, étant nulle (n° **164**), le polynôme U_{n-1} est nul.

Si l'on pose

$$u = \frac{1}{v}, \quad v' = \frac{dv}{dz}, \quad \text{d'où} \quad u' = -\frac{v'}{v^2},$$

l'équation (8) devient

$$(9) \qquad v'^n - v^2 U_1 v'^{n-1} + v^4 U_2 v'^{n-2} - \ldots \pm v^{2n} U_n = 0;$$

cette relation entre la fonction doublement périodique v et sa dérivée v' devant avoir pour coefficients des polynômes entiers en v, il est nécessaire que les polynômes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, qui entrent dans la première équation, soient au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré,..., le dernier du degré $2n$.

Le théorème du n° **158** est un cas particulier du précédent.

182. Théorème XVIII. — *Étant donnée une fonction méromorphe doublement périodique $u = f(z)$, de l'ordre n, aux périodes élémentaires ω, ω', toute autre fonction méromorphe qui admet ces deux périodes s'exprime rationnellement au moyen de la première fonction et de sa dérivée.*

Nous avons vu que la fonction u et sa dérivée u' sont liées par une équation algébrique

$$(6) \qquad F(u', u) = 0,$$

du degré n par rapport à u, et que, aux n points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui, dans un même parallélogramme élémentaire (ω, ω'), correspondent à une valeur donnée de u, la dérivée u' acquiert n valeurs différentes u'_1, $u'_2, \ldots, u'_n$, qui sont les n racines de l'équation (6). Nous savons aussi

qu'une autre fonction méromorphe v de z, qui admet les périodes ω, ω', est liée à u par une équation algébrique, qui est, en général, du degré n par rapport à v. Désignons par $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les valeurs de v aux points $z_1, z_2, \ldots, z_n$; ces valeurs correspondent respectivement aux racines $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ de l'équation (6), de sorte qu'à tout système de valeurs (u, u') correspond une valeur déterminée de v et une seule. Les fonctions vu', $vu'^2, \ldots, vu'^{n-1}$ jouissent de la même propriété; à chaque couple (u, u') correspond une seule valeur de chacune de ces fonctions. Les sommes

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 + v_2 + \ldots + v_n = P_0, \\ v_1 u'_1 + v_2 u'_2 + \ldots + v_n u'_n = P_1, \\ v_1 u'^2_1 + v_2 u'^2_2 + \ldots + v_n u'^2_n = P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_1 u'^{n-1}_1 + v_2 u'^{n-1}_2 + \ldots + v_n u'^{n-1}_n = P_{n-1}, \end{array}\right.$$

n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de u, sont des fonctions méromorphes de u sur toute la sphère : elles sont donc égales à des fractions rationnelles de u (n° 129); nous les avons représentées par $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$. Multiplions les deux membres des équations (10) respectivement par $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, 1$, ajoutons les résultats, puis égalons à zéro les coefficients de $v_2, v_3, \ldots, v_n$, ce qui donne le système des $n-1$ équations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} u'^{n-1}_2 + A_1 u'^{n-2}_2 + A_2 u'^{n-3}_2 + \ldots + A_{n-2} u'_2 + A_{n-1} = 0, \\ u'^{n-1}_3 + A_1 u'^{n-2}_3 + A_2 u'^{n-3}_3 + \ldots + A_{n-2} u'_3 + A_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u'^{n-1}_n + A_1 u'^{n-2}_n + A_2 u'^{n-3}_n + \ldots + A_{n-2} u'_n + A_{n-1} = 0, \end{array}\right.$$

l'équation résultante se réduira à

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 (u'^{n-1}_1 + A_1 u'^{n-2}_1 + A_2 u'^{n-3}_1 + \ldots + A_{n-2} u'_1 + A_{n-1}) \\ \qquad = P_{n-1} + A_1 P_{n-2} + \ldots + A_2 P_{n-3} + A_{n-2} P_1 + A_{n-1}. \end{array}\right.$$

Les équations (11) montrent que les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sont les coefficients de l'équation du degré $n-1$, qui admet pour racines u'_2, $u'_3, \ldots, u'_n$; on obtiendra cette équation en divisant par $u' - u'_1$ le

premier membre de l'équation (6), ordonné par rapport aux puissances décroissantes de u'; les coefficients du quotient, qui sont des polynômes entiers en u et u'_1, donneront $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. De l'équation (12) on déduira ensuite l'expression de v_1 par une fraction rationnelle en u et u'_1.

Ce théorème comprend celui de M. Liouville (nº 161) comme cas particulier. La démonstration exige que les périodes ω, ω' forment bien un système de périodes élémentaires de la fonction u; mais cette condition n'est pas nécessaire pour la fonction v.

183. Théorème XIX. — *Lorsque les réseaux de deux fonctions méromorphes doublement périodiques u et v ont un réseau de sommets communs, dont le parallélogramme* (Ω, Ω') *contient* N *fois le parallélogramme élémentaire* (ω, ω') *de la fonction u, la fonction v est racine d'une équation algébrique du degré* N, *ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de u et de sa dérivée u'.*

A chaque couple (u, u') correspond un point z dans le parallélogramme (ω, ω'), par conséquent N points dans le parallélogramme (Ω, Ω') et, par suite, N valeurs de v. Toute fonction symétrique et entière de ces N valeurs de v est une fonction méromorphe de z, admettant les deux périodes ω et ω'; en vertu du théorème précédent, elle s'exprime rationnellement au moyen de u et de u'. On en conclut que v est racine d'une équation du degré N, ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de u et u'. De cette manière, la résolution de l'équation entre u et v, et qui est du degré nN par rapport à l'inconnue v (nº 177), est ramenée à celle de deux équations, la première du degré n en u', la seconde du degré N en v.

Dans nos premières recherches (*Journal de l'École Polytechnique*, 1856), nous avions indiqué seulement la relation algébrique qui a lieu entre deux fonctions qui admettent les mêmes périodes. La considération du réseau formé par les sommets communs à deux réseaux proposés nous a permis d'établir les théorèmes qui composent ce Chapitre. La relation algébrique qui existe entre une fonction doublement périodique et sa dérivée a été remarquée par M. Méray vers la même époque.

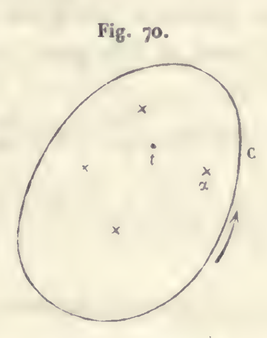
CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SOMMES.

Méthode générale pour le développement d'une fonction en une somme d'une infinité de termes rationnels.

184. Voici la méthode que Cauchy a déduite des propriétés des intégrales définies. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan. Considérons d'abord la partie du plan enveloppée par une courbe

Fig. 70.



fermée C (*fig.* 70), et à l'intérieur marquons un point quelconque t. La fonction $\frac{f(z)}{z-t}$ admet comme pôles ceux de $f(z)$ et en outre le point t. D'après le théorème du n° **120**, l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz$$

relative à la courbe C est égale au résidu relatif au point t et à la somme des résidus relatifs aux pôles α de la fonction $f(z)$ situés à l'intérieur de la courbe C. Le premier résidu étant égal à $f(t)$, on a

$$(1) \qquad f(t)+\sum \mathcal{E}_{(\alpha)}\frac{f(z)}{z-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-t}\,dz.$$

Concevons maintenant que la courbe C s'étende indéfiniment dans tous les sens, èt qu'elle soit choisie de telle sorte que le module de la fonction $f(z)$ sur cette courbe reste moindre qu'une quantité finie M, si c'est possible. Puisque

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-1} = \frac{1}{z}\left[1+\frac{t}{z}(1+\varepsilon)\right],$$

ε tendant vers zéro, quand z augmente indéfiniment, on a

$$\frac{f(z)}{z-t} = \frac{f(z)}{z} + \frac{tf(z)(1+\varepsilon)}{z^2},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-t}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z}dz + \frac{t}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)(1+\varepsilon)}{z^2}dz.$$

Il est aisé de voir que la dernière intégrale tend vers zéro, quand la courbe C s'étend à l'infini; car, si l'on pose $z = re^{\theta i}$, il vient

$$dz = e^{\theta i}dr + ire^{\theta i}d\theta, \quad \frac{dz}{z^2} = e^{-\theta i}\frac{dr}{r^2} + ie^{-\theta i}\frac{d\theta}{r},$$

$$\int_{(C)} \frac{f(z)(1+\varepsilon)}{z^2}dz = \int_{(C)} f(z)(1+\varepsilon)e^{-\theta i}\frac{dr}{r^2} + i\int_0^{2\pi} f(z)(1+\varepsilon)e^{-\theta i}\frac{d\theta}{r}.$$

Si l'on désigne par ε_1 le maximum du module de ε et par r_1 le minimum de r sur la courbe, le module du dernier terme est moindre que $\frac{2\pi M(1+\varepsilon_1)}{r_1}$, et, par conséquent, ce terme tend vers zéro, quand r_1 augmente indéfiniment. Supposons que la courbe C soit composée d'un nombre fini d'arcs tels que sur chacun d'eux le rayon r aille en augmentant ou en diminuant; la partie qui, dans la première intégrale du second membre, se rapporte à l'un de ces arcs, sur lequel r croît par exemple de r' à r'', a un module moindre que

$$M(1+\varepsilon_1)\int_{r'}^{r''}\frac{dr}{r^2} = M(1+\varepsilon_1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right);$$

cette intégrale tend donc aussi vers zéro. Ainsi nous pouvons réduire

l'intégrale (2) à sa première partie

(3) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z}\,dz.$$

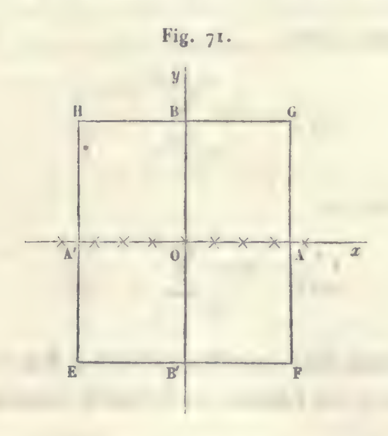
Lorsque la fonction $f(z)$ est impaire, si l'on choisit la courbe C de manière qu'elle ait pour centre l'origine, l'intégrale (3), ayant ses termes deux à deux égaux et de signes contraires, est identiquement nulle. Dans ce cas, l'intégrale (2) tend donc vers zéro, quand la courbe s'étend à l'infini, et l'équation (1) se réduit à

(4) $$f(t) = \lim \sum \mathcal{E}_{(\alpha)}\frac{f(z)}{t-z}.$$

Développement de $\frac{1}{\sin z}$ *et de* $\frac{1}{\cos z}$.

185. Les pôles de la fonction $\frac{1}{\sin z}$ sont distribués uniformément sur Ox (*fig.* 71). Prenons sur cet axe des longueurs $OA = OA' = m'\pi + \frac{\pi}{2}$ et sur l'axe Oy des longueurs $OB = OB' = y_1$; par les points A et A' menons des parallèles à Oy et par les points B et B' des parallèles à Ox, de

Fig. 71.



manière à former le rectangle EFGH. Les pôles situés dans ce rectangle sont représentés par la formule $\alpha = m\pi$, m variant de $-m'$ à $+m'$.

Nous intégrerons suivant le contour du rectangle et nous ferons ensuite augmenter indéfiniment le nombre entier m' et la longueur y_1, afin d'étendre à l'infini le contour du rectangle. Sur les côtés FG, HE, on a $z = \pm\left(m'\pi + \frac{\pi}{2}\right) + yi$, et par suite

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{(-1)^{m'}}{\cos yi} = (-1)^{m'}\frac{2}{e^y + e^{-y}} = (-1)^{m'}\frac{2}{2 + \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right)^2};$$

le module de $\frac{1}{\sin z}$ est plus petit que l'unité. Sur les côtés GH, EF, on a $z = x \pm y_1 i$,

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{\mp y_1 + xi} - e^{\pm y_1 - xi}};$$

le module de $\frac{1}{\sin z}$ est infiniment petit. On peut donc réduire l'intégrale (2) à sa première partie (3). D'autre part, la fonction $\frac{1}{\sin z}$ étant impaire, cette première partie est identiquement nulle. Ainsi l'intégrale définie tend vers zéro.

Le résidu relatif à l'un des pôles $\alpha = m\pi$ est

$$\frac{1}{t - m\pi}\mathcal{E}\frac{1}{\sin z} = \frac{(-1)^m}{t - m\pi}.$$

L'équation (4) devient donc

$$\frac{1}{\sin t} = \lim \sum_{m=-m'}^{m=+m'} \frac{(-1)^m}{t - m\pi},$$

et, en remplaçant t par z,

(5) $$\frac{1}{\sin z} = \lim \sum_{m=-m'}^{m=+m'} \frac{(-1)^m}{z - m\pi}.$$

En groupant les termes qui correspondent à des valeurs de m égales et de signes contraires, on obtient la formule connue

(6) $$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{z^2 - m^2\pi^2}.$$

Si dans l'équation (5) on remplace z par $z + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$(7)\qquad \frac{1}{\cos z} = \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'+1} \frac{(-1)^m}{z - (2m-1)\frac{\pi}{2}}.$$

Nous avons ajouté un terme infiniment petit à la droite de la série, celui qui correspond à $m = m' + 1$, afin d'avoir autant de termes d'un côté que de l'autre. Le groupement des termes conduit à l'expression

$$(8)\qquad \frac{1}{\cos z} = \pi \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)}{z^2 - (2m-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}.$$

Développement de cot z *et de* tang z.

186. Les pôles de la fonction impaire $\cot z$ sont les mêmes que ceux de $\frac{1}{\sin z}$; on intégrera suivant le même rectangle. On reconnaît aisément que sur les côtés FG, HE le module de $\cot z$ est plus petit que 1, et que sur les deux autres côtés il est très-voisin de 1. On peut donc réduire l'intégrale à sa première partie qui est identiquement nulle. Le résidu relatif au pôle $\alpha = m\pi$ étant

$$\frac{1}{t - m\pi} \mathcal{E} \cot z = \frac{1}{t - m\pi},$$

l'équation (4) devient

$$\cot t = \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{t - m\pi},$$

ou

$$(9)\qquad \cot z = \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{1}{z - m\pi} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{z^2 - m^2\pi^2}.$$

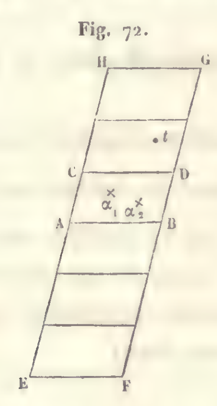
En remplaçant z par $z+\frac{\pi}{2}$ et ajoutant un terme infiniment petit, on en déduit

$$(10)\qquad \operatorname{tang} z = -\lim \sum_{m=-m'}^{m=m'+1} \frac{1}{z-(2m-1)\frac{\pi}{2}} = 2z \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m-1)^2\frac{\pi^2}{4}-z^2}.$$

Développement d'une fonction doublement périodique en une somme d'une infinité de termes simplement périodiques.

187. Une méthode analogue à celle de Cauchy pour le développement en sommes de termes rationnels nous permettra de traiter la question. Considérons d'abord une fonction de l'ordre $2n$, aux périodes 2ω, ω', satisfaisant à la relation $f(z+\omega)=-f(z)$, et ayant n infinis α_h dans le parallélogramme ABDC (*fig.* 72), dont le sommet A est un point arbi-

Fig. 72.



traire z_0 et les deux sommets B et C les points $z_0+\omega$, $z_0+\omega'$. Formons le parallélogramme EFGH, dont les sommets E et H sont les points $z_0-m'\omega'$, $z_0+m'\omega'$, et les sommets F et G les points $z_0+\omega-m'\omega'$, $z_0+\omega+m'\omega'$; ce parallélogramme est la réunion de $2m'$ parallélogrammes égaux au premier. Les infinis situés dans le parallélogramme EFGH sont représentés par la formule $\alpha=\alpha_h+m\omega'$, m variant de $-m'$ à $m'-1$. Marquons un point quelconque t à l'intérieur du grand parallélogramme. La fonction

$$\frac{f(z)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-t)}$$

admet la période ω; ses pôles sont le point t et les points $\alpha = \alpha_h + m\omega'$. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-t)}\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme EFGH, est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles situés dans ce parallélogramme. Les deux côtés FG, HE donnent des résultats égaux et de signes contraires; sur les côtés EF et GH, la fonction $f(z)$ ayant une valeur finie, et le module du dénominateur devenant infiniment grand avec m', l'intégrale définie a une valeur très-petite. Ainsi, quand m' augmente indéfiniment, l'intégrale définie tend vers zéro, et par conséquent la somme des résidus est nulle. Le résidu relatif au point t étant $\frac{\omega}{\pi}f(t)$, on a l'équation

$$f(t) = \frac{\pi}{\omega}\lim\sum \mathcal{E}_{(\alpha)}\frac{f(z)}{\sin\frac{\pi}{\omega}(t-z)}. \tag{11}$$

Si la fonction proposée n'a que des infinis simples, l'équation précédente devient

$$f(t) = \frac{\pi}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{A_h}{\sin\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha_h-m\omega')},$$

A_h désignant le résidu de $f(z)$ relatif à α_h. La série est convergente dans les deux sens. Cette égalité est démontrée pour tous les points t situés dans la partie du plan comprise entre les parallèles indéfinies EH, FG; les deux membres changeant de signe quand on remplace t par $t+\omega$, l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de t. Ainsi l'on a, dans toute l'étendue du plan,

$$f(z) = \frac{\pi}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{A_h}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-\alpha_h-m\omega')}. \tag{12}$$

Supposons que la fonction proposée ait dans le parallélogramme ABDC

un infini multiple α_h du degré p; l'infini $\alpha = \alpha_h + m\omega'$ sera du même degré. Posons $z = \alpha + z'$, nous aurons à chercher le résidu de la fonction

$$\mathcal{E}\, f(\alpha_h + z')\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha - z').$$

Si l'on développe en série, il vient

$$f(\alpha_h + z') = \frac{A_p^h}{z'^p} + \frac{A_{p-1}^h}{z'^{p-1}} + \ldots + \frac{A_1^h}{z'} + \ldots,$$

$$\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha - z') = \text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha) - \frac{z'}{1}\,D_t\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{z'^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}\,D_t^{p-1}\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha) + \ldots,$$

et le résidu cherché est

$$A_1^h\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha) - \frac{A_2^h}{1}\,D_t\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha) + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\,D_t^{p-1}\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(t - \alpha).$$

On obtient ainsi l'équation

$$(13)\quad f(z) = \frac{\pi}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_h\Big[A_1^h\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(z - \alpha_h - m\omega') - \frac{A_2^h}{1}\,D_z\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(z - \alpha_h - m\omega')$$
$$+ \ldots + (-1)^{p-1}\frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)}\,D_z^{p-1}\,\text{coséc}\,\frac{\pi}{\omega}(z - \alpha_h - m\omega')\Big].$$

188. Considérons maintenant une fonction doublement périodique quelconque $f(z)$, aux périodes ω, ω', et ayant n infinis α_h dans le parallélogramme ABDC, dont nous nous sommes servis dans le numéro précédent. La fonction

$$\frac{f(z)}{\text{tang}\,\frac{\pi}{\omega}(z - t)}$$

admet la période ω. L'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z-t)}\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme EFGH, est égale à la somme des résidus de la fonction pour les pôles situés dans le parallélogramme, c'est-à-dire pour le point t et les points $\alpha = \alpha_h + m\omega'$, m variant de $-m'$ à $m'-1$. Les côtés FG, HE donnent des résultats égaux et de signes contraires. Si l'on désigne par z un point de la droite AB, les points homologues de GH et de EF seront $z+m'\omega'$, $z-m'\omega'$, et les parties de l'intégrale relatives à ces deux côtés seront

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} f(z)\left[\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z-t-m'\omega')} - \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z-t+m'\omega')}\right]dz.$$

Lorsque m' augmente indéfiniment, la première tangente tend vers $-i$, la seconde vers i, de sorte que l'intégrale définie tend vers une limite égale à l'intégrale rectiligne

$$H = \frac{1}{\pi}\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(z)\,dz,$$

suivant la droite AB. Le résidu de la fonction relatif au point t étant $\frac{\omega}{\pi}f(t)$, on a l'équation

$$(14)\qquad f(t) = \frac{\pi H}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}\lim\sum \mathcal{E}_{(\alpha)}\frac{f(z)}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(t-z)}.$$

Si la fonction n'a que des infinis simples, l'équation précédente devient

$$(15)\qquad f(t) = \frac{\pi H}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{A_h}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha_h-m\omega')},$$

A_h désignant le résidu de $f(z)$ relatif à α_h. La série est convergente dans les deux sens, à cause de la relation $\sum_{h=1}^{h=n} A_h = 0$ (n° 148); car on a

$$\sum_{h=1}^{h=n} A_h \cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha_h - m\omega') = \sum_{h=1}^{h=n} A_h \left[\cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha_h - m\omega') - \cot\frac{\pi}{\omega}(t-m\omega')\right]$$
$$= \sum_{h=1}^{h=n} \frac{A_h \sin\frac{\pi\alpha_h}{\omega}}{\sin\frac{\pi}{\omega}(t-m\omega')\sin\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha_h-m\omega')}.$$

Les deux membres de l'équation (15) admettant la période ω, l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de t.

Supposons que la fonction $f(z)$ ait dans le parallélogramme ABDC un infini multiple α_h du degré p; l'infini $\alpha = \alpha_h + m\omega'$ sera du même degré. Posons $z = \alpha + z'$, nous aurons

$$\mathcal{E}_{(\alpha)} f(z)\cot\frac{\pi}{\omega}(t-z) = \mathcal{E} f(\alpha_h + z')\cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha-z').$$

Si l'on développe en série, il vient

$$f(\alpha_h + z') = \frac{A_p^h}{z'^p} + \frac{A_{p-1}^h}{z'^{p-1}} + \ldots + \frac{A_1^h}{z'} + \ldots,$$

$$\cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha-z') = \cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha) - \frac{z'}{1} D_t \cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{z'^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} D_t^{p-1}\cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha) + \ldots,$$

et l'on aura le résidu cherché

$$A_1^h \cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha) - \frac{A_2^h}{1} D_t \cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha) + (-1)^{p-1}\frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)} D_t^{p-1}\cot\frac{\pi}{\omega}(t-\alpha).$$

On obtient ainsi la formule

$$(16)\ f(z)=\frac{\pi H}{\omega}+\frac{\pi}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{h}\left[A_1^h\cot\frac{\pi}{\omega}(z-\alpha_h-m\omega')-\frac{A_2^h}{1}D_z\cot\frac{\pi}{\omega}(z-\alpha_h-m\omega')\right.$$
$$\left.+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{A_p^h}{1.2\ldots(p-1)}D_z^{p-1}\cot\frac{\pi}{\omega}(z-\alpha_h-m\omega')\right].$$

Développement des fonctions elliptiques.

189. Considérons les rapports des quatre fonctions θ deux à deux; de ces douze rapports, huit satisfont à la relation $f(z+\omega)=-f(z)$, les quatre autres à la relation $f(z+\omega)=f(z)$. Nous développerons les premiers par la méthode du n° 185.

Commençons par les deux fonctions $\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}$, $\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}$; formons un parallélogramme EFGH ayant pour centre l'origine et pour sommets les points $\pm\frac{\omega}{2}\pm(2m'+1)\frac{\omega'}{2}$; les infinis de ces deux fonctions, ou les zéros de $\theta_1(z)$, situés dans ce parallélogramme, sont représentés par la formule $\alpha=m\omega'$, m variant de $-m'$ à $+m'$; tous ces infinis sont simples; d'après les formules (12) du n° 75, le résidu de la fonction $\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}$ relatif à l'infini $m\omega'$ est $\frac{\theta(0)}{\theta_1'(0)}$; celui de la fonction $\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}$ est $(-1)^m\frac{\theta_3(0)}{\theta_1'(0)}$. On a donc

$$(17)\qquad \frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}=\frac{\pi}{\omega}\frac{\theta(0)}{\theta_1'(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-m\omega')},$$

$$(18)\qquad \frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}=\frac{\pi}{\omega}\frac{\theta_3(0)}{\theta_1'(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-m\omega')}.$$

En remplaçant z par l'une des quantités $z+\frac{\omega}{2}$, $z+\frac{\omega'}{2}$, $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$,

on en déduit

$$(19)\qquad \frac{\theta_3(z)}{\theta_2(z)} = \frac{\pi}{\omega}\frac{\theta(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')},$$

$$(20)\qquad \frac{\theta(z)}{\theta_2(z)} = \frac{\pi}{\omega}\frac{\theta_3(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')},$$

$$(21)\qquad \frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi}{\omega}\frac{\theta(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(22)\qquad \frac{\theta_2(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi i}{\omega}\frac{\theta_3(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\sin\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(23)\qquad \frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)} = \frac{\pi}{\omega}\frac{\theta(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(24)\qquad \frac{\theta_1(z)}{\theta_3(z)} = -\frac{\pi i}{\omega}\frac{\theta_3(0)}{\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]}.$$

Pour développer la fonction $\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}$, qui admet la période ω, nous appliquerons la méthode du n° 186, en conservant le parallélogramme précédent. Nous remarquons qu'aux points homologues des côtés opposés EF, GH, la différence des valeurs de z étant égale à $(2m'+1)\omega'$, la fonction $f(z)$ acquiert des valeurs égales et de signes contraires; les valeurs de la tangente sur ces côtés étant à peu près $\mp i$, l'intégrale définie relative à ces deux côtés est infiniment petite; ainsi l'intégrale définie relative au contour du parallélogramme a pour limite zéro, et l'on a l'équation

$$(25)\qquad \frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)} = \frac{\pi}{\omega}\frac{\theta_2(0)}{\theta'_1(0)} \lim \sum_{m=-m'}^{m=-m'} \frac{(-1)^m}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')}.$$

On en déduit

$$(26)\qquad \frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)} = \frac{\pi}{\omega}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \operatorname{tang} \frac{\pi}{\omega}(z - m\omega'),$$

$$(27)\qquad \frac{\theta_3(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi i}{\omega}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(28)\qquad \frac{\theta(z)}{\theta_3(z)} = -\frac{\pi i}{\omega}\,\frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} (-1)^m \operatorname{tang} \frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right].$$

On obtient les constantes en remarquant que $\lambda'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\theta_1'(0)}{\theta(0)}$; d'où

$$(29)\qquad \frac{\theta(0)}{\theta_1'(0)} = \frac{1}{g\sqrt{k}},\quad \frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} = \frac{1}{g\sqrt{k'}},\quad \frac{\theta_3(0)}{\theta_1'(0)} = \frac{1}{g\sqrt{kk'}}.$$

Ces rapports donnent les développements des fonctions elliptiques

$$(30)\qquad \lambda(z) = \frac{\pi}{g\omega k} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(31)\qquad \mu(z) = \frac{\pi i}{g\omega k} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\sin \frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

$$(32)\qquad \nu(z) = \frac{\pi i}{g\omega} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'} \frac{(-1)^m}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]}.$$

Si l'on groupe les termes deux à deux, les séries (30) et (31) deviennent

$$(33)\qquad \lambda(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k} \sin \frac{\pi z}{\omega} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}(1 + q^{2m-1})}{1 - 2q^{2m-1}\cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}},$$

$$(34)\qquad \mu(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k} \cos \frac{\pi z}{\omega} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m-1} q^{m-1}(1 - q^{2m-1})}{1 - 2q^{2m-1}\cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}}.$$

La série (32) n'est pas convergente dans les deux sens; si de $\nu(0)$ on retranche $\nu(z)$, on obtient une série jouissant de cette propriété

$$(35)\quad 1-\nu(z)=\frac{\pi i}{g\omega}\sin\frac{\pi z}{\omega}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{\sin\frac{(2m-1)\pi\omega'}{2\omega}\sin\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

ou plus simplement

$$(36)\quad 1-\nu(z)=\frac{8\pi}{g\omega}\sin^2\frac{\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}q^{2m-1}\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}}{1-2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2m-1)}}.$$

Second mode de développement.

190. Des développements des rapports des fonctions θ, on peut déduire immédiatement ceux des rapports des fonctions ϑ deux à deux; il suffit, comme nous l'avons remarqué au n° **171**, de remplacer ω et ω' par $-\omega'$ et ω, q par p, θ et θ_2 par ϑ_2 et ϑ, θ_1 et θ_3 par ϑ_1 et ϑ_3. Ainsi les équations (26), (20), (19) se transforment en les suivantes :

$$(37)\quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}=\frac{\pi}{\omega'}\frac{\vartheta(0)}{\vartheta'_1(0)}\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}(-1)^m\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega),$$

$$(38)\quad \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta(z)}=\frac{\pi}{-\omega'}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)},$$

$$(39)\quad \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta(z)}=\frac{\pi}{-\omega'}\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)}.$$

On modifie la formule (37) en y faisant $z=0$ et retranchant le résultat; ce qui donne

$$(40)\quad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}=\frac{\pi}{\omega'}\frac{\vartheta(0)}{\vartheta'_1(0)}\sin\frac{\pi z}{\omega'}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\cos\frac{m\pi\omega}{\omega'}\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)}.$$

Les constantes ont pour valeurs

$$(41)\qquad \frac{\vartheta(0)}{\vartheta'_1(0)}=\frac{1}{ig\sqrt{k}},\quad \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta'_1(0)}=\frac{1}{ig\sqrt{k'}},\quad \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta'_1(0)}=\frac{1}{ig\sqrt{kk'}}.$$

On en déduit d'autres expressions des fonctions elliptiques

$$(42)\qquad \lambda(z)=-\frac{\pi}{g\omega' k}\sin\frac{\pi z}{\omega'}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\cos\frac{m\pi\omega'}{\omega}\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)},$$

$$(43)\qquad \mu(z)=\frac{\pi i}{g\omega' k}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)},$$

$$(44)\qquad \nu(z)=\frac{\pi i}{g\omega'}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)}.$$

Développement des fonctions $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\vartheta}$.

191. Les méthodes précédentes peuvent être appliquées au développement des fonctions $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\vartheta}$. La fonction

$$\frac{\frac{1}{\theta_1(z)}}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-t)}$$

admettant la période ω et devenant infiniment petite sur les côtés EF, GH du parallélogramme employé dans les deux numéros précédents, l'intégrale définie a pour limite zéro. Pour avoir le résidu relatif au point $\alpha=m\omega'$, on posera $z=m\omega'+z'$, d'où

$$\frac{1}{\theta_1(z)}=(-1)^m q^{m^2} e^{\frac{2m\pi z' i}{\omega}}\frac{1}{\theta_1(z')};$$

le résidu cherché est

$$\frac{1}{\theta'_1(0)}\,\frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin\frac{\pi}{\omega}(m\omega'-t)}.$$

On a donc l'équation

$$(45)\qquad \frac{1}{\theta_1(z)} = \frac{\pi}{\omega\theta_1'(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')}.$$

Si l'on remplace z par $z + \frac{\omega}{2}$, il vient

$$(46)\qquad \frac{1}{\theta_2(z)} = \frac{\pi}{\omega\theta_1'(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\cos\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')}.$$

Pour développer la fonction $\frac{1}{\theta(z)}$, nous considérerons un parallélogramme EFGH ayant pour sommets les points $\pm\frac{\omega}{2} \pm m'\omega'$. La fonction

$$\frac{\frac{1}{\theta(z)}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z - t)}$$

admet la période ω, et a pour pôles dans le parallélogramme, outre le point t, les points $\alpha = (2m-1)\frac{\omega'}{2}$, m variant de $-(m'-1)$ à m'. Cette fonction ayant une valeur infiniment petite sur les côtés EF, GH, parce que $\theta(z)$ est infiniment grande, l'intégrale définie a encore pour limite zéro, et l'on obtient l'équation

$$(47)\qquad \frac{1}{\theta(z)} = -\frac{\pi i}{\omega\theta_1'(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^{m-1} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \cot\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right],$$

d'où l'on déduit

$$(48)\qquad \frac{1}{\theta_3(z)} = \frac{\pi i}{\omega\theta_1'(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^{m-1} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right].$$

Si l'on groupe les termes deux à deux, ces séries deviennent

$$(49)\quad \frac{1}{\theta_1(z)} = \frac{\pi}{\omega\theta'_1(0)}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi z}{\omega}} + 4\sin\frac{\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{m(m+1)}(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4m}}\right],$$

$$(50)\quad \frac{1}{\theta_2(z)} = \frac{\pi}{\omega\theta'_1(0)}\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi z}{\omega}} + 4\cos\frac{\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{m(m+1)}(1+q^{2m})}{1+2q^{2m}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4m}}\right],$$

$$(51)\quad \frac{1}{\theta(z)} = \frac{2\pi}{\omega\theta'_1(0)}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\left[1-q^{2(2m-1)}\right]}{1-2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2m-1)}},$$

$$(52)\quad \frac{1}{\theta_3(z)} = \frac{2\pi}{\omega\theta'_1(0)}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\left[1-q^{2(m-1)}\right]}{1+2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2m-1)}}.$$

Des formules (45), (46), (47), (48), on déduit, par la transformation habituelle,

$$(53)\quad \frac{1}{\vartheta_1(z)} = \frac{\pi}{\omega'\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m p^{m^2}}{\sin\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)},$$

$$(54)\quad \frac{1}{\vartheta(z)} = \frac{-\pi}{\omega'\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{(-1)^m p^{m^2}}{\cos\frac{\pi}{\omega'}(z-m\omega)},$$

$$(55)\quad \frac{1}{\vartheta_2(z)} = \frac{-\pi i}{\omega'\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}(-1)^{m-1}p^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\cot\frac{\pi}{\omega'}\left[z-(2m-1)\frac{\omega}{2}\right],$$

$$(56)\quad \frac{1}{\vartheta_3(z)} = \frac{\pi i}{\omega'\vartheta'_1(0)}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}(-1)^{m-1}p^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega'}\left[z-(2m-1)\frac{\omega}{2}\right].$$

Développement des fonctions D log $\theta(z)$.

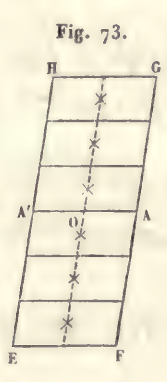
192. Les quatre fonctions D log $\theta(z)$ sont impaires et admettent la période ω. Nous les développerons par la méthode du n° **187**. Occu-

pons-nous d'abord de la fonction $D\log\theta(z)$. Considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{D\log\theta(z)}{\tang\frac{\pi}{\omega}(z-t)}\,dz$$

relative au contour du parallélogramme EFGH (*fig.* 73), qui a pour centre l'origine et pour sommets les points $\pm\frac{\omega}{2}\pm m'\omega'$; les infinis situés

Fig. 73.



dans ce parallélogramme sont le point t et les points $\alpha=(2m+1)\frac{\omega'}{2}$, m variant de $-m'$ à $m'-1$. Les parties de l'intégrale relatives aux côtés opposés FG, HE sont égales et de signes contraires. Si l'on désigne par z un point quelconque de la droite A'A, menée par l'origine dans la direction ω, les points homologues des côtés EF, GH sont $z-m'\omega'$, $z+m'\omega'$, et l'on a

$$D\log\theta(z-m'\omega')=\frac{2m'\pi i}{\omega}+D\log\theta(z),$$

$$D\log\theta(z+m'\omega')=-\frac{2m'\pi i}{\omega}+D\log\theta(z);$$

l'intégrale sur ces deux côtés est donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} D\log\theta(z)\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(z-t-m'\omega')-\cot\frac{\pi}{\omega}(z-t+m'\omega')\right]dz$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} m'\left[\cot\frac{\pi}{\omega}(z-t-m'\omega')+\cot\frac{\pi}{\omega}(z-t+m'\omega')\right]dz.$$

La seconde partie, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{2}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \frac{m' \sin\frac{2\pi}{\omega}(z-t)}{\cos\frac{2m'\pi\omega'}{\omega}+\cos\frac{2\pi}{\omega}(z-t)}\,dz,$$

tend vers zéro, quand m' augmente indéfiniment. Les deux cotangentes tendant respectivement vers $+i$ et $-i$, la première partie se réduit à l'intégrale rectiligne

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \mathrm{D}\log\theta(z)\,dx,$$

qui est nulle, puisque la fonction $\mathrm{D}\log\theta(z)$ est impaire. L'intégrale définie relative au contour du parallélogramme tend donc vers zéro, et la somme des résidus est nulle.

Le résidu relatif au point t est $\frac{\omega}{\pi}\mathrm{D}\log\theta(t)$; celui relatif au point $\alpha=(2m+1)\frac{\omega'}{2}$ est

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[(2m+1)\frac{\omega'}{2}-t\right]}\,\mathcal{E}_{(\alpha)}\mathrm{D}\log\theta(z);$$

mais d'après le lemme du n° 121, le résidu de la fonction $\mathrm{D}\log\theta(z)$ est égal au degré du zéro de la fonction $\theta(z)$, c'est-à-dire à l'unité. On a donc

$$(57)\qquad \mathrm{D}\log\theta(z)=\frac{\pi}{\omega}\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'-1}\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2m+1)\frac{\omega'}{2}\right]},$$

et, en groupant les termes deux à deux,

$$(58)\qquad \mathrm{D}\log\theta(z)=\frac{4\pi}{\omega}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1-2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2m-1)}}.$$

En remplaçant z par $z + \frac{\omega}{2}$, on en déduit

$$(59)\qquad D\log\theta_3(z) = \frac{-\pi}{\omega} \lim \sum_{m=-m'}^{m=m'-1} \operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m+1)\frac{\omega'}{2}\right],$$

$$(60)\qquad D\log\theta_3(z) = \frac{-4\pi}{\omega}\sin\frac{2\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1 + 2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}}.$$

Si dans l'équation (57) on remplace z par $z + \frac{\omega'}{2}$, on obtient l'expression

$$D\log\theta_1(z) = \frac{\pi}{\omega}\left[i + \lim\sum_{m=-m'}^{m=m'-1}\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')}\right],$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(61)\qquad D\log\theta_1(z) = \frac{\pi}{\omega}\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega')};$$

car le terme ajouté à la somme, celui qui correspond à $m = m'$, a pour limite i; si l'on groupe les termes deux à deux, il vient

$$(62)\qquad D\log\theta_1(z) = \frac{\pi}{\omega}\left[\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}} + 4\sin\frac{2\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1 - 2q^{2m}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}}\right].$$

En remplaçant z par $z + \frac{\omega}{2}$, on en déduit enfin

$$(63)\qquad D\log\theta_2(z) = -\frac{\pi}{\omega}\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'}\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z - m\omega'),$$

$$(64)\qquad D\log\theta_2(z) = -\frac{\pi}{\omega}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} + 4\sin\frac{2\pi z}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1 + 2q^{2m}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}}\right].$$

Des formules précédentes on déduirait immédiatement celles qui se rapportent au développement des quatre fonctions $D\log\vartheta(z)$.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN PRODUITS.

Propriétés des produits d'un nombre infini de facteurs.

193. Théorème I. — *Pour que le produit*

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots,$$

dans lequel a_1, a_2, a_3,... sont des quantités réelles et positives, soit convergent, il est nécessaire et il suffit que la série

$$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

soit convergente.

Cette condition est nécessaire; car le produit P_n des n premiers facteurs du produit est plus grand que la somme S_n des n premiers termes de la série; si la série était divergente, la somme S_n augmenterait à l'infini et à plus forte raison le produit P_n.

Elle est suffisante; car on a

$$1+a_1<e^{a_1},\quad 1+a_2<e^{a_2},\ldots,$$

et par suite

$$P_n<e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}<e^{S},$$

S étant la limite de S_n; le produit P_n augmentant avec n et restant moindre qu'une quantité déterminée e^{S}, tend vers une limite P.

194. Théorème II. — *Soient a_1, a_2,... les modules des quantités imaginaires u_1, u_2,...; si le produit des facteurs réels*

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$$

est convergent, le produit des facteurs imaginaires

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots$$

est aussi convergent.

Nous remarquons d'abord que le module d'un facteur imaginaire $1+u_n$ est moindre que le facteur réel correspondant $1+a_n$, de sorte que, si l'on désigne par P_n le produit des n premiers facteurs du premier produit et par Q_n le produit des n premiers facteurs du second, le module de Q_n est plus petit que P_n et, par conséquent, plus petit que P; ce module conserve donc une valeur finie.

Démontrons maintenant que le produit Q_n est convergent. On a

$$\begin{aligned}\frac{Q_{n+p}}{Q_n}-1&=(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+p})-1\\&=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}+u_{n+1}u_{n+2}+\ldots,\\\frac{P_{n+p}}{P_n}-1&=(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\ldots(1+a_{n+p})-1\\&=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}+a_{n+1}a_{n+2}+\ldots;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\text{mod.}\left(\frac{Q_{n+p}}{Q_n}-1\right)<\frac{P_{n+p}}{P_n}-1,$$

ou

$$\text{mod.}\,\frac{Q_{n+p}-Q_n}{Q_n}<\frac{P_{n+p}-P_n}{P_n},$$

$$\text{mod.}\,(Q_{n+p}-Q_n)<\text{mod.}\,Q_n\times\frac{P_{n+p}-P_n}{P_n}<P_{n+p}-P_n<P-P_n.$$

On peut prendre n assez grand pour que la différence $P-P_n$ soit moindre qu'une quantité donnée α; alors on aura, quel que soit p,

$$\text{mod.}\,(Q_{n+p}-Q_n)<\alpha.$$

Concevons les points qui dans le plan représentent les quantités Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, ...; tous ces points seront compris dans le cercle décrit du point Q_n comme centre avec un rayon égal à α. On déterminera ensuite un nombre n' plus grand que n, tel que les points $Q_{n'}$, $Q_{n'+1}$, ... soient compris dans un cercle décrit du point $Q_{n'}$ comme centre avec un

rayon α' plus petit que α; le centre du second cercle étant situé à l'intérieur du premier, et le rayon plus petit, ce second cercle sera situé tout entier dans le premier, ou une partie en dedans, une partie en dehors; dans ce dernier cas, on ne gardera que la partie commune aux deux cercles; c'est dans cette partie commune que sont situés les points $Q_{n'}$, $Q_{n'+1}$,.... En continuant de cette manière, on voit que les produits tendent vers un point bien déterminé Q, ce qui rend la convergence évidente.

195. Théorème III. — *Soient a_1, a_2,... les modules de u_1, u_2,...; si la série*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

est convergente, le produit

$$(1 + u_1 z)(1 + u_2 z)(1 + u_3 z)\ldots$$

est convergent, quelle que soit la valeur de la variable z.

Désignons par r le module de z; si la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

est convergente, la série

$$a_1 r + a_2 r + a_3 r + \ldots$$

est aussi convergente, quel que soit le module r; le produit des facteurs réels

$$(1 + a_1 r)(1 + a_2 r)(1 + a_3 r)\ldots$$

est donc convergent, et par conséquent le produit des facteurs imaginaires

$$(1 + u_1 z)(1 + u_2 z)(1 + u_3 z)\ldots.$$

196. Théorème IV. — *Lorsque la série*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

est convergente, le produit

$$(1) \qquad (1 + u_1 z)(1 + u_2 z)(1 + u_3 z)\ldots$$

définit une fonction holomorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Nous savons déjà que le produit est convergent pour toutes les valeurs de z. Considérons maintenant le produit des n facteurs réels

$$P_n = (1 + a_1 r)(1 + a_2 r)\ldots(1 + a_n r),$$

et concevons ce produit effectué et ordonné par rapport aux puissances croissantes de r; si nous appelons $s_1^{(n)}$ la somme des n quantités a_1, $a_2, \ldots, a_n$, $s_2^{(n)}$ la somme des produits de ces n quantités deux à deux, $s_3^{(n)}$ la somme des produits trois à trois, etc., nous aurons

$$P_n = 1 + s_1^{(n)} r + s_2^{(n)} r^2 + \ldots + s_m^{(n)} r^m + \ldots + s_n^{(n)} r^n.$$

Un terme quelconque $s_m^{(n)} r^m$ étant plus petit que P_n ou que sa limite P, et croissant avec n, tend vers une limite finie $s_m r^m$, quand n augmente indéfiniment; ainsi la somme $s_m^{(n)}$ des produits m à m des n premiers termes de la série convergente

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

tend vers une limite s_m, quand n augmente indéfiniment; mais on a

$$P_n > 1 + s_1^{(n)} r + s_2^{(n)} r^2 + \ldots + s_m^{(n)} r^m;$$

si, laissant m fixe, on fait croître n indéfiniment, on en déduit

$$P > 1 + s_1 r + s_2 r^2 + \ldots + s_m r^m.$$

Puisque la somme S_m des m premiers termes de la série

$$(2) \qquad 1 + s_1 r + s_2 r^2 + s_3 r^3 + \ldots$$

est moindre que la quantité finie P, on en conclut que cette somme tend vers une limite S inférieure ou égale à P, quand m augmente indéfiniment, et par conséquent que la série (2) est convergente.

D'autre part, chacun des termes du produit

$$P_n = 1 + s_1^{(n)} r + s_2^{(n)} r^2 + \ldots + s_n^{(n)} r^n$$

étant moindre que le terme correspondant de la somme

$$S_n = 1 + s_1 r + s_2 r^2 + \ldots + s_n r^n,$$

la somme S_n est plus grande que P_n et par suite sa limite S est supérieure ou égale à P; cette limite S est donc égale à P.

Considérons de même le produit

$$Q_n = (1 + u_1 z)(1 + u_2 z)\ldots(1 + u_n z)$$

des n facteurs imaginaires; concevons ce produit effectué et ordonné par rapport aux puissances croissantes de z, et représentons-le par

$$Q_n = 1 + \sigma_1^{(n)} z + \sigma_2^{(n)} z^2 + \ldots + \sigma_m^{(n)} z^m + \ldots + \sigma_n^{(n)} z^n.$$

Un coefficient quelconque $\sigma_m^{(n)}$ est une somme de termes imaginaires qui ont pour modules les termes correspondants de $s_m^{(n)}$; quand n augmente indéfiniment, la somme $s_m^{(n)}$ tendant vers une limite s_m, la somme $\sigma_m^{(n)}$ tend elle-même vers une limite σ_m. La série

$$(3) \qquad 1 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 + \sigma_3 z^3 + \ldots,$$

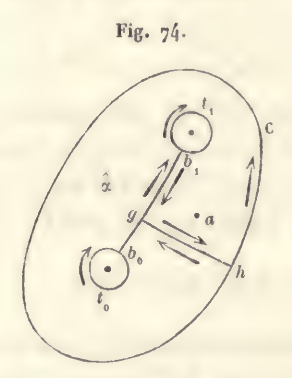
ayant les modules de ses termes moindres que les termes correspondants de la série (2), est convergente. La somme Σ_n des n premiers termes de cette série contient tous les termes de Q_n; d'ailleurs les termes de la différence $\Sigma_n - Q_n$ ont pour modules les termes correspondants de la différence $S_n - P_n$; il en résulte que le module de $\Sigma_n - Q_n$ est moindre que $S_n - P_n$, et par conséquent tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; on en conclut que Σ_n tend vers une limite égale à Q. Ainsi la fonction définie par le produit (1) est développée en une série convergente (3), ordonnée suivant les puissances croissantes de z; c'est donc une fonction holomorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Méthode générale pour le développement d'une fonction en un produit d'une infinité de facteurs rationnels.

197. Cauchy a déduit aussi de la considération des intégrales définies une méthode pour effectuer ce genre de développement; nous allons exposer cette méthode en lui donnant une forme plus précise. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans la partie du plan enveloppée par la courbe C (*fig.* 74). Désignons par a et α les zéros et

les infinis de la fonction dans cette partie du plan, par n et p leurs degrés, et supposons que la courbe C ne passe par aucun de ces points. Nous savons (nº 121) que la fonction $\mathrm{D}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ admet comme pôles simples les zéros et les infinis de la fonction $f(z)$. Marquons dans la partie du plan considérée deux points t_0 et t_1, distincts des points a et α; unissons-les par une ligne $b_0 b_1$ située aussi dans

Fig. 74.



cette partie du plan et ne passant par aucun des points a et α; à l'aide de cette ligne et de deux cercles infiniment petits ayant pour centres les points t_0 et t_1, nous formerons une courbe fermée ou un lacet enveloppant les deux points. La fonction $\log\frac{z-t_1}{z-t_0}$ éprouve un accroissement égal à $+2\pi i$, quand la variable z tourne autour du point t_1 dans le sens positif, et un accroissement égal à $-2\pi i$, quand la variable z tourne autour du point t_0, aussi dans le sens positif. Il en résulte que, si l'on astreint la variable z à ne pas franchir la coupure $t_0 t_1$, la fonction $\log\frac{z-t_1}{z-t_0}$ est monotrope dans toute l'étendue du plan; c'est donc une fonction holomorphe dans la partie du plan comprise entre le lacet $(t_0 t_1)$ et la courbe C.

A l'aide d'une autre coupure gh, on peut regarder cette aire comme enveloppée par une ligne fermée, composée du lacet $(t_0 t_1)$ de la coupure gh et de la courbe C. La fonction

$$\mathrm{F}(z) = \log\frac{z-t_1}{z-t_0}\,\mathrm{D}\log f(z)$$

étant méromorphe dans cette partie du plan, à contour simple, l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz,$$

relative au contour de l'aire, est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles a et α situés dans cette aire. La transversale gh, étant parcourue deux fois dans des sens contraires, avec une même valeur de la fonction $F(z)$, donne un résultat nul. Évaluons la partie relative au lacet $(t_0 t_1)$; nous remarquons d'abord que les petits cercles donnent des quantités infiniment petites; car, si l'on pose $z = t_0 + re^{\theta i}$, on a $dz = ire^{\theta i}\,d\theta$,

$$\log(z - t_0) = \log r + \theta i,$$
$$\log(z - t_0)\,dz = ie^{\theta i}(r\log r + ir\theta)\,d\theta;$$

mais $r\log r$ tend vers zéro, quand le rayon r du petit cercle diminue indéfiniment. L'intégrale relative au lacet se réduit donc à l'intégrale suivant la ligne $b_0 b_1$, aller et retour : à l'aller, un élément de l'intégrale est

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(z)}{f(z)}\log\frac{z-t_1}{z-t_0}\,dz;$$

au retour, $\log\frac{z-t_1}{z-t_0}$ ayant éprouvé un accroissement égal à $-2\pi i$ par le mouvement sur le petit cercle (t_1) en sens négatif, et dz ayant changé de signe, on obtient l'élément correspondant

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(z)}{f(z)}\left(\log\frac{z-t_1}{z-t_0} - 2\pi i\right)dz;$$

la somme des deux éléments est

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \mathrm{D}\log f(z)\,dz.$$

Ainsi la partie relative au lacet $(t_0 t_1)$ se réduit à l'intégrale

$$\int \mathrm{D}\log f(z)\,dz$$

suivant la ligne $t_0 t_1$ décrite de t_0 à t_1; mais cette intégrale est égale à

la valeur que prend la fonction $\log\frac{f(z)}{f(t_0)}$ au point t_1, quand la variable z décrit la ligne t_0t_1, la fonction ayant en t_0 la valeur initiale zéro; nous désignerons cette valeur de la fonction au point t_1 par $\log\frac{f(t_1)}{f(t_0)}$. D'après cela, l'intégrale définie relative au contour entier de l'aire a pour expression

$$\log\frac{f(t_1)}{f(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(z)\,dz.$$

Pour avoir les résidus relatifs aux points a et α, qui sont des pôles simples de $F(z)$, il faut multiplier les quantités

$$\log\frac{a-t_1}{a-t_0}, \quad \log\frac{\alpha-t_1}{\alpha-t_0}$$

respectivement par les résidus de la fonction $D\log f(z)$, c'est-à-dire par n et $-p$ (n° 121). On obtient ainsi l'équation

$$\log\frac{f(t_1)}{f(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(z)\,dz = \sum n\log\frac{a-t_1}{a-t_0} - \sum p\log\frac{\alpha-t_1}{\alpha-t_0},$$

ou

$$(4) \qquad \log\frac{f(t_1)}{f(t_0)} = \sum n\log\frac{a-t_1}{a-t_0} - \sum p\log\frac{\alpha-t_1}{\alpha-t_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(z)\,dz.$$

On en déduit la formule

$$(5) \qquad \frac{f(t_1)}{f(t_0)} = \frac{\prod\left(\frac{a-t_1}{a-t_0}\right)^n}{\prod\left(\frac{\alpha-t_1}{\alpha-t_0}\right)^p} e^{-\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(z)\,dz},$$

qui a été trouvée par Cauchy.

198. Concevons maintenant que la courbe C s'étende à l'infini dans tous les sens, et qu'elle soit choisie de telle sorte que le module de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ reste moindre qu'une quantité finie M sur cette courbe, si cela est possible. Grâce à la restriction que nous avons imposée à la variable z de ne pas franchir le lacet (t_0t_1), la fonction $\log\frac{z-t_1}{z-t_0}$,

comme nous l'avons dit, reste monotrope dans toute l'étendue du plan; mais on peut prendre, en un point choisi à volonté, l'une quelconque des déterminations du logarithme; une fois la valeur du logarithme assignée en un point, tous les logarithmes qui entrent dans le second membre de l'équation (4) ont des valeurs parfaitement déterminées. Parmi les déterminations du logarithme, nous prendrons celle qui se réduit à zéro, quand z devient infini. On a, dans ce cas,

$$\log \frac{z-t_1}{z-t_0} = \log \frac{1-\frac{t_1}{z}}{1-\frac{t_0}{z}} = -\frac{t_1-t_0}{z} - \frac{(t_1^2-t_0^2)(1+\varepsilon)}{2z^2},$$

ε tendant vers zéro, quand z augmente indéfiniment. On en déduit

$$(6) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(z)\,dz = \frac{t_1-t_0}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z} + \frac{t_1^2-t_0^2}{4\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}(1+\varepsilon)\frac{dz}{z^2}.$$

La seconde partie tendant vers zéro (n° 184), on peut réduire l'intégrale (6) à sa première partie

$$(7) \qquad \frac{t_1-t_0}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z}.$$

Lorsque la fonction $f(z)$ est impaire, sa dérivée $f'(z)$ est paire; lorsque la fonction est paire, sa dérivée est impaire; dans ces deux cas, le quotient $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est une fonction impaire. Si la courbe C a pour centre l'origine, l'intégrale (7), ayant ses éléments égaux deux à deux et de signes contraires, est identiquement nulle, et la formule (5) se réduit à

$$\frac{f(t_1)}{f(t_0)} = \lim \frac{\prod \left(\frac{a-t_1}{a-t_0}\right)^n}{\prod \left(\frac{\alpha-t_1}{\alpha-t_0}\right)^p},$$

ou, en remplaçant t_0 et t_1 par z_0 et z,

$$(8) \qquad \frac{f(z)}{f(z_0)} = \lim \frac{\prod \left(\frac{a-z}{a-z_0}\right)^n}{\prod \left(\frac{\alpha-z}{\alpha-z_0}\right)^p}.$$

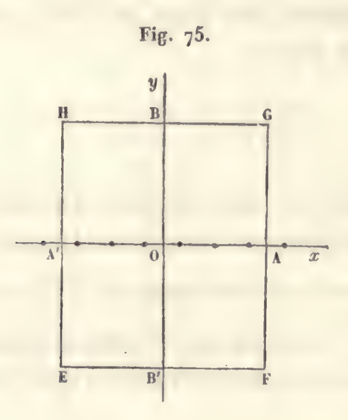
Lorsque la fonction $f(z)$ n'est ni nulle ni infinie à l'origine, on peut faire $z_0 = 0$, et la formule précédente devient

$$(9) \qquad \frac{f(z)}{f(0)} = \lim \frac{\prod \left(1 - \frac{z}{a}\right)^n}{\prod \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^p}.$$

Développement de $\cos z$.

199. La fonction $\cos z$ admet les racines simples $a = (2m+1)\frac{\pi}{2}$, distribuées uniformément sur l'axe Ox, et n'a pas de pôles. Portant sur l'axe Ox (*fig.* 75) des longueurs OA, OA' égales à $m'\pi$, et sur l'axe Oy

Fig. 75.



des longueurs OB, OB' égales à y_1, nous formerons le rectangle EFGH, suivant lequel nous effectuerons l'intégration. Pour avoir tous les zéros compris dans ce rectangle, on fera varier m de $-m'$ à $m'-1$. Le module de $\frac{f'(z)}{f(z)} = -\tang z$ étant plus petit que 1 sur les côtés FG, HE, et très-voisin de 1 sur les côtés EF, GH, on peut réduire l'intégrale (6) à sa première partie (7). D'ailleurs, la fonction proposée $\cos z$ étant paire, cette première partie est identiquement nulle. On a donc, d'après

la formule (9),

$$(10) \qquad \cos z = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\pi}{2}} \right],$$

et, en groupant les facteurs deux à deux,

$$(11) \qquad \cos z = \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2m-1)^2\pi^2} \right].$$

Développement de $\sin z$.

200. On effectuera d'une manière analogue le développement de la fonction paire $\frac{\sin z}{z}$, qui admet les racines $a = m\pi$, à l'exception de $a = 0$. On formera le rectangle en portant sur l'axe Ox des longueurs OA, OA' égales à $m'\pi + \frac{\pi}{2}$, et l'on fera varier m de $-m'$ à $+m'$, en exceptant $m = 0$. Le module de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)} = \cot z - \frac{1}{z}$ ayant une valeur voisine de 1 sur le contour du rectangle, on réduira l'intégrale (6) à sa première partie (7), qui est identiquement nulle. On a donc

$$(12) \qquad \frac{\sin z}{z} = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'} \left(1 - \frac{z}{m\pi} \right),$$

$$(13) \qquad \sin z = z \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2} \right).$$

Remarques. — Si l'on développe ce dernier produit suivant les puissances croissantes de z (nº 196), on a

$$\sin z = z - s_1 z^3 + s_2 z^5 - s_3 z^7 + \ldots,$$

en désignant par s_1 la somme des quantités $\frac{1}{1^2\pi^2}, \frac{1}{2^2\pi^2}, \frac{1}{3^2\pi^2}, \ldots,$ par s_2

la somme des produits de ces quantités deux à deux, etc.; mais cette série doit être identique à la série

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de z, on obtient diverses relations, parmi lesquelles se trouve la suivante :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

La formule (11) donne lieu à des relations analogues; ainsi l'on a

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.$$

Développement des fonctions θ en produits.

201. Nous avons obtenu (n° **192**) l'expression

$$\mathrm{D}\log\theta_3(z) = -\frac{\pi}{\omega}\lim\sum_{m=-m'}^{m=m'-1}\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2m+1)\frac{\omega'}{2}\right].$$

La série n'est pas convergente dans les deux sens; mais si l'on groupe les termes deux à deux, on obtient une série convergente

$$\mathrm{D}\log\theta_3(z) = -\frac{\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left\{\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2m-1)\frac{\omega'}{2}\right] + \operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}\left[z+(2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]\right\}.$$

Supposons qu'après avoir multiplié les deux membres par dz, on intègre, en faisant marcher la variable z sur une courbe allant de l'origine à un point quelconque z du plan, et ne passant par aucune des racines de la fonction $\theta_3(z)$. Comme on peut prendre m assez grand pour que le module de la somme des termes de la série, à partir du terme de rang m, soit moindre qu'une quantité donnée sur toute

la courbe, on aura, d'après le théorème du n° 81,

$$\log\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \log \frac{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z+(2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]}{\cos^2(2m-1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}},$$

$$\log\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \log\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega}}{\cos^2(2m-1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}\right],$$

chacun des logarithmes se réduisant à zéro pour $z=0$. On en déduit

$$(14)\qquad \theta_3(z) = \theta_3(0)\prod_{m=1}^{m=\infty}\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega}}{\cos^2(2m-1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}\right],$$

et, en remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$,

$$(15)\qquad \theta(z) = \theta_3(0)\prod_{m=1}^{m=\infty}\left[1-\frac{\cos^2\frac{\pi z}{\omega}}{\cos^2(2m-1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}\right].$$

L'équation (63) du n° 192 donne de même

$$D\log\theta_2(z) = -\frac{\pi}{\omega}\left\{\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z-m\omega')+\operatorname{tang}\frac{\pi}{\omega}(z+m\omega')\right]\right\};$$

en intégrant suivant une courbe partant de l'origine et ne passant par aucune des racines de la fonction $\theta_2(z)$, on a

$$\log\frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)} = \log\cos\frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty}\log\frac{\cos\frac{\pi}{\omega}(z-m\omega')\cos\frac{\pi}{\omega}(z+m\omega')}{\cos^2 m\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

$$\log\frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)} = \log\cos\frac{\pi z}{\omega} + \sum_{m=1}^{m=\infty}\log\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi z}{\omega}}{\cos^2 m\frac{\pi\omega'}{\omega}}\right),$$

chaque logarithme s'annulant pour $z = 0$. On en déduit

$$(16)\qquad \theta_2(z) = \theta_2(0)\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\dfrac{\pi z}{\omega}}{\cos^2 m\dfrac{\pi\omega'}{\omega}}\right),$$

et, en remplaçant z par $z + \frac{\omega}{2}$,

$$(17)\qquad \theta_1(z) = \theta_2(0)\sin\frac{\pi z}{\omega}\prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{\cos^2\dfrac{\pi z}{\omega}}{\cos^2 m\dfrac{\pi\omega'}{\omega}}\right).$$

202. La forme de ces expressions peut être modifiée par l'introduction de la quantité q. Elles deviennent

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta_3(z) &= \theta_3(0)\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{1 + 2q^{2m-1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}}{(1+q^{2m-1})^2},\\
\theta\,(z) &= \theta_3(0)\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{1 - 2q^{2m-1}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}}{(1+q^{2m-1})^2},\\
\theta_2(z) &= \theta_2(0)\cos\frac{\pi z}{\omega}\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{1 + 2q^{2m}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}}{(1+q^{2m})^2},\\
\theta_1(z) &= \theta_2(0)\sin\frac{\pi z}{\omega}\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{1 - 2q^{2m}\cos\dfrac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}}{(1+q^{2m})^2}.
\end{aligned}\right.$$

Les deux constantes $\theta_3(0)$, $\theta_2(0)$ ne dépendent que de la quantité q, et, par conséquent, que du rapport des périodes (n° **77**). On les ramène l'une à l'autre en faisant $z = \frac{\omega'}{2}$ dans la première de ces équations, ce qui donne

$$\theta_2(0) = \theta_3(0)\sqrt[4]{q}\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{[1+q^{2(m-1)}](1+q^{2m})}{(1+q^{2m-1})^4} = 2\,\theta_3(0)\sqrt[4]{q}\prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{(1+q^{2m})^2}{(1+q^{2m-1})^2}.$$

Si donc on pose

$$(19) \qquad \varphi(q) = \theta_3(0) \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(1+q^{2m-1})^2},$$

on obtient les expressions suivantes des quatre fonctions θ :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_3(z) &= \varphi(q) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 + 2q^{2m-1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right], \\ \theta(z) &= \varphi(q) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - 2q^{2m-1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right], \\ \theta_2(z) &= 2\sqrt[4]{q}\,\varphi(q) \cos \frac{\pi z}{\omega} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 + 2q^{2m} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}\right], \\ \theta_1(z) &= 2\sqrt[4]{q}\,\varphi(q) \sin \frac{\pi z}{\omega} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - 2q^{2m} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4m}\right]. \end{aligned} \right.$$

203. Voici comment Jacobi est parvenu à exprimer $\varphi(q)$ par un produit. La comparaison de la seconde des équations précédentes et de la seconde des équations (8) du n° 74 donne l'égalité

$$\varphi(q) = \frac{1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos \frac{2m\pi z}{\omega}}{\prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - 2q^{2m-1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right]}.$$

Le second membre doit être indépendant de z; si l'on y fait successivement $z = 0$ et $z = \frac{\omega}{4}$, on a

$$(21) \qquad \varphi(q) = \frac{1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2}}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m-1})^2} = \frac{1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{4m^2}}{\prod_{m=1}^{m=\infty} [1 + q^{2(2m-1)}]};$$

on obtient le second numérateur en remarquant que les termes qui correspondent à des valeurs impaires de m sont nuls, de sorte qu'il suffit de donner à m des valeurs paires. Remplaçons q par q^4, il vient

$$\varphi(q^4) = \frac{1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{4m^2}}{\prod_{m=1}^{m=\infty} [1 - q^{4(2m-1)}]^2},$$

d'où

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{[1 - q^{4(2m-1)}]^2}{1 + q^{2(2m-1)}} = \prod_{m=1}^{m=\infty} [1 - q^{2(2m-1)}][1 - q^{4(2m-1)}].$$

Cette dernière expression peut être transformée; le facteur $1 - q^{4m}$ étant de la forme $1 - q^{4 \cdot 2m'}$ ou $1 - q^{4(2m'-1)}$, suivant que m est pair ou impair, et m' variant de 1 à ∞, on a

$$\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4m}) = \prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4 \cdot 2m})[1 - q^{4(2m-1)}],$$

d'où

$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q^4)} = \frac{\prod_{m=1}^{m=\infty} [1 - q^{2(2m-1)}](1 - q^{2 \cdot 2m})}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4 \cdot 2m})} = \frac{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m})}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4 \cdot 2m})},$$

(22) $$\frac{\varphi(q)}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m})} = \frac{\varphi(q^4)}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4 \cdot 2m})}.$$

Ainsi le premier membre de cette dernière équation ne change pas quand on y remplace q par q^4. En remplaçant plusieurs fois successivement q par q^4, on a

$$\frac{\varphi(q)}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m})} = \frac{\varphi(q^{4^n})}{\prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{4^n \cdot 2m})};$$

mais quand n augmente indéfiniment, le second membre se réduit à $\varphi(0)$, c'est-à-dire à 1. On a donc

$$\varphi(q) = \prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m}). \tag{23}$$

Développement des fonctions ϑ en produits.

204. Les formules que nous venons de trouver pour exprimer les fonctions θ peuvent être appliquées immédiatement aux fonctions ϑ.

Si l'on pose

$$\varphi(p) = \prod_{m=1}^{m=\infty} (1 - p^{2m}), \tag{24}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_3(z) &= \varphi(p) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 + 2p^{2m-1} \cos\frac{2\pi z}{\omega'} + p^{2(2m-1)}\right],\\
\vartheta_2(z) &= \varphi(p) \prod_{m=1}^{m=\infty} \left[1 - 2p^{2m-1} \cos\frac{2\pi z}{\omega'} + p^{2(2m-1)}\right],\\
\vartheta(z) &= \quad 2\sqrt[4]{p}\,\varphi(p) \cos\frac{\pi z}{\omega'} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 + 2p^{2m} \cos\frac{2\pi z}{\omega'} + p^{4m}\right),\\
\vartheta_1(z) &= -2\sqrt[4]{p}\,\varphi(p) \sin\frac{\pi z}{\omega'} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - 2p^{2m} \cos\frac{2\pi z}{\omega'} + p^{4m}\right).
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dans les applications où la première période ω est réelle, la seconde ω' imaginaire et de la forme $\omega'' i$, et la variable z réelle, les formules (20) renferment des sinus et cosinus ordinaires, les formules (25) des sinus et cosinus hyperboliques.

Expressions du module et du multiplicateur en produits.

205. Nous avons déterminé le module k et le module complémentaire k', ainsi que le multiplicateur g, par des sommes, à l'aide de q ou

de p (n°s 77, 159 et 173); nous pouvons aussi les déterminer par des produits. On a d'abord, en vertu des formules (20) et (25),

$$(26)\quad \begin{cases} \theta_3(0) = \varphi(q) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 + q^{2m-1})^2, \\ \theta\,(0) = \varphi(q) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 - q^{2m-1})^2, \\ \theta_2(0) = 2\sqrt[4]{q}\,\varphi(q) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 + q^{2m})^2; \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \vartheta_3(0) = \varphi(p) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 + p^{2m-1})^2, \\ \vartheta_2(0) = \varphi(p) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 - p^{2m-1})^2, \\ \vartheta\,(0) = 2\sqrt[4]{p}\,\varphi(p) \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} (1 + p^{2m})^2. \end{cases}$$

Les formules

$$(28)\quad \sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta(0)}{\theta_3(0)} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},$$

qui définissent les modules k et k', donnent

$$(29)\quad \sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}}\right)^2 = \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{1 - p^{2m-1}}{1 + p^{2m-1}}\right)^2,$$

$$(30)\quad \sqrt{k'} = \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{1 - q^{2m-1}}{1 + q^{2m-1}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{1 + p^{2m}}{1 + p^{2m-1}}\right)^2.$$

En divisant par z les deux membres de la quatrième des équations (20) et de la quatrième des équations (25), et faisant tendre z

vers zéro, on a

$$\theta_1'(0) = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt[4]{q}\,\varphi(q)\prod_{m=1}^{m=\infty}(1-q^{2m})^2,$$

$$\vartheta_1'(0) = -\frac{2\pi}{\omega'}\sqrt[4]{p}\,\varphi(p)\prod_{m=1}^{m=\infty}(1-p^{2m})^2.$$

Les formules

$$g = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1'(0)}{\theta(0)} = \frac{1}{i\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)},$$

qui définissent le multiplicateur g, deviennent

$$\sqrt{\frac{g\omega}{\pi}} = \prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{(1-q^{2m})(1+q^{2m-1})}{(1+q^{2m})(1-q^{2m-1})},$$

$$\sqrt{\frac{g\omega'}{\pi i}} = \prod_{m=1}^{m=\infty}\frac{(1-p^{2m})(1+p^{2m-1})}{(1+p^{2m})(1-p^{2m-1})}.$$

Ces formules peuvent être simplifiées. On remarque, en effet, que le facteur $1-q^{2m}$ est de la forme $1-q^{4m} = (1-q^{2m})(1+q^{2m})$ ou de la forme $1-q^{2(2m-1)} = (1-q^{2m-1})(1+q^{2m-1})$, suivant que m est pair ou impair; il en résulte

(31) $$\sqrt{\frac{g\omega}{\pi}} = \prod_{m=1}^{m=\infty}(1+q^{2m-1})^2(1-q^{2m}),$$

(32) $$\sqrt{\frac{g\omega'}{\pi i}} = \prod_{m=1}^{m=\infty}(1+p^{2m-1})^2(1-p^{2m}).$$

Ces dernières formules, comparées aux formules (26) et (27), donnent

(33) $$\theta_3(0) = \sqrt{\frac{g\omega}{\pi}}, \quad \theta_2(0) = \sqrt{\frac{g\omega k}{\pi}}, \quad \theta(0) = \sqrt{\frac{g\omega k'}{\pi}},$$

(34) $$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{g\omega'}{\pi i}}, \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{g\omega' k}{\pi i}}, \quad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{g\omega' k'}{\pi}}.$$

Nous avons vu (nº 173) que les fonctions $\theta_3(z)$ et $\vartheta_3(z)$ satisfont à la relation

$$\vartheta_3(z) = Ce^{\frac{\pi z^2 i}{\omega\omega'}}\theta(z).$$

Il est facile maintenant de déterminer la constante C; on a, en effet,

$$(35) \qquad C = \frac{\vartheta_3(0)}{\theta_3(0)} = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}.$$

206. *Remarque.* — La méthode de Cauchy permet d'opérer directement la décomposition des fonctions elliptiques en produits d'une infinité de facteurs rationnels; en prenant un contour d'intégration convenable et groupant les facteurs d'une certaine façon, on arrive aux fonctions θ, ou aux fonctions ϑ, ou à d'autres analogues.

Nous avons besoin, pour cela, de connaître le développement de la fonction $\cos(z - z_0)$. Si l'on forme un rectangle égal à celui qui nous a servi pour le développement de $\cos z$ (nº 199), mais ayant son centre au point z_0, on verra, comme précédemment, que l'intégrale relative au contour de ce rectangle tend vers zéro. Les zéros situés dans ce rectangle sont $a = z_0 + (2m+1)\frac{\pi}{2}$, m variant de $-m'$ à $m'-1$, et l'on a

$$(36) \qquad \frac{\cos(z - z_0)}{\cos z_0} = \lim \prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left[1 - \frac{z}{z_0 + (2m+1)\frac{\pi}{2}}\right].$$

Pour développer les fonctions elliptiques, nous emploierons un rectangle, ayant pour sommets les points $z = \pm\left(m'\omega - \frac{\omega}{4}\right) \pm \left(n'\omega' - \frac{\omega'}{4}\right)$, de manière que le contour ne passe par aucun des zéros ou des infinis de ces fonctions. La fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ conservant une valeur finie sur ce contour et étant impaire, d'après ce que nous avons dit au nº 198, l'intégrale définie relative à ce contour tend vers zéro, quand on augmente indéfiniment les deux nombres entiers m' et n', dont dépendent les dimensions du rectangle. Les zéros et les infinis des trois fonctions

elliptiques sont représentés par les formules

$$\begin{array}{ll} \text{zéros de } \lambda(z), & a = m\omega + n\omega', \\ \text{zéros de } \mu(z), & a = (2m+1)\frac{\omega}{2} + n\omega', \\ \text{zéros de } \nu(z), & a = (2m+1)\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}, \\ \text{infinis}, & a = m\omega + (2n+1)\frac{\omega'}{2}. \end{array}$$

Pour avoir les zéros et les infinis compris dans le rectangle, il faudra faire varier m de $-m'$ à $m'-1$, et n de $-n'$ à $n'-1$.

Considérons la fonction $\nu(z)$. La formule (9) donne

$$(37) \qquad \nu(z) = \lim \frac{\prod \left[1 - \dfrac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right]}{\prod \left[1 - \dfrac{z}{m\omega + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right]}.$$

Quelle que soit la manière dont on fasse augmenter m' et n' à l'infini, le quotient tend vers la même limite $\nu(z)$; mais il n'en est pas de même du numérateur et du dénominateur. Supposons que l'on fasse augmenter à l'infini, d'abord m', n' restant fixe, puis n'; le numérateur s'écrira

$$\prod_{n=-n'}^{n=n'-1} \prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right],$$

en groupant les zéros par files parallèles à la direction de la période ω. Quand m' augmente à l'infini, n restant constant, le produit

$$\prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left[1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\omega}{2} + (2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right],$$

d'après la formule (36), tend vers une limite égale à

$$\frac{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]}{\cos(2n+1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}.$$

On a donc le produit

$$\prod_{n=-n'}^{n=n'-1}\frac{\cos\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]}{\cos(2n+1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}=\prod_{n=1}^{n=n'}\frac{1+2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2n-1)}}{(1+q^{2n-1})^2},$$

qui a pour limite la fonction $\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)}$ (n° 202). Dans le dénominateur

$$\prod_{n=-n'}^{n=n'-1}\prod_{m=-m'}^{m=m'-1}\left[1-\frac{z}{m\omega+(2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right],$$

le premier produit

$$\prod_{m=-m'}^{m=m'-1}\left[1-\frac{z}{m\omega+(2n+1)\frac{\omega'}{2}}\right]$$

tend vers une limite égale à

$$\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]}{-\sin(2n+1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}},$$

et le second produit

$$\prod_{n=-n'}^{n=n'-1}\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}\left[z-(2n+1)\frac{\omega'}{2}\right]}{-\sin(2n+1)\frac{\pi\omega'}{2\omega}}=\prod_{n=1}^{n=n'}\frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{2(2n-1)}}{(1-q^{2n-1})^2}$$

vers la fonction $\frac{\theta(z)}{\theta(0)}$. On exprime ainsi la fonction $\nu(z)$ par le quotient

de deux fonctions holomorphes. Si l'on avait fait augmenter à l'infini, d'abord m', puis n', ce qui revient à grouper les facteurs par files parallèles à la direction de la période ω', on aurait obtenu les deux fonctions $\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}$, $\frac{\vartheta(z)}{\vartheta(0)}$.

On a de même

$$(38) \qquad \mu(z) = \lim \frac{\prod\left[1 - \dfrac{z}{(2m+1)\dfrac{\omega}{2} + n\omega'}\right]}{\prod\left[1 - \dfrac{z}{m\omega + (2n+1)\dfrac{\omega'}{2}}\right]}.$$

Le dénominateur est le même que le précédent. Quant au numérateur, on trouvera $\frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)}$ par le premier mode, $\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)}$ par le second mode.

La fonction $\lambda(z)$ présente une difficulté particulière, parce qu'elle s'annule pour $z = 0$. Si l'on applique la formule (9) à la fonction $\frac{\lambda(z)}{z\lambda'(0)}$, qui se réduit à l'unité pour $z = 0$, on a

$$(39) \qquad \frac{\lambda(z)}{z\lambda'(0)} = \lim \frac{\prod\left[1 - \dfrac{z}{m\omega + n\omega'}\right]}{\prod\left[1 - \dfrac{z}{m\omega + (2n+1)\dfrac{\omega'}{2}}\right]},$$

en exceptant au numérateur la combinaison $m = 0$, $n = 0$. Dans le premier mode, le numérateur s'écrit

$$\prod_{n=-n'}^{n=n'-1} \prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left(1 - \frac{z}{m\omega + n\omega'}\right).$$

Le produit

$$\prod_{m=-m'}^{m=m'-1} \left(1 - \frac{z}{m\omega}\right)$$

tend vers une limite égale à $\frac{\sin\frac{\pi z}{\omega}}{\frac{\pi z}{\omega}}$ (n° 200), le produit

$$\prod_{m=-m'}^{=m'-1}\left(1-\frac{z}{m\omega+n\omega'}\right),$$

où n est différent de zéro, vers une limite égale à

$$\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-n\omega')}{-\sin n\frac{\pi\omega'}{\omega}},$$

en vertu de la formule (36). Le numérateur, multiplié par z, devient donc

$$\frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega}\prod\frac{\sin\frac{\pi}{\omega}(z-n\omega')}{-\sin n\frac{\pi\omega'}{\omega}}=\frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\pi z}{\omega}\prod_{n=1}^{n=n'}\frac{1-q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2};$$

c'est la fonction $\frac{\theta_1(z)}{\theta'_1(0)}$. Le second mode donnerait $\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta'_1(0)}$,

On pourrait aussi, à l'aide du théorème du n° 184, décomposer les fonctions elliptiques en des sommes de termes rationnels; en prenant un contour d'intégration convenable et groupant les termes d'une certaine façon, on retrouverait les séries que nous avons obtenues (n° 189) et qui sont formées de termes simplement périodiques.

C'est en décomposant les fonctions elliptiques en facteurs, mais par une méthode toute différente, qu'Abel et Jacobi ont découvert les fonctions θ, qui jouent aujourd'hui un rôle si important dans les Mathématiques.

LIVRE V.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.



CHAPITRE PREMIER.

EXISTENCE DE LA FONCTION INTÉGRALE.

Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares, et doivent être regardés comme des exceptions; mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même.

Soit

$$\frac{du}{dz} = f(u, z)$$

une équation différentielle du premier ordre; u sera une fonction de z, définie par la condition de satisfaire à l'équation différentielle et d'admettre une valeur initiale donnée u_0 pour $z = z_0$. Cauchy a démontré que, si le coefficient différentiel $f(u, z)$ est une fonction holomorphe pour les valeurs de u et de z voisines de u_0 et de z_0, la fonction intégrale u est elle-même holomorphe pour les valeurs de z voisines de z_0. Nous donnons d'abord une démonstration plus simple de ce théorème fondamental.

207. *Lemme I.* — Soit $f(x)$ une fonction holomorphe de la variable imaginaire x, dans le cercle décrit du point x_0 comme centre avec un

rayon r, et continue sur la circonférence elle-même. Appelons M le maximum du module de la fonction $f(x)$ dans le cercle de rayon r. Si, dans la formule (nº 87)

$$f^n(x_0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x_0 + re^{\theta i}) e^{-n\theta i} d\theta,$$

on remplace chaque élément de l'intégrale définie par la quantité $M d\theta$ plus grande que son module, on augmente évidemment le module de l'intégrale définie, qui se réduit alors à $2\pi M$, et l'on a

$$(1) \qquad \text{mod.} f^n(x_0) < 1.2\ldots n \frac{M}{r^n}.$$

Lemme II. — Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe par rapport à chacune des variables imaginaires x, y, quand ces variables restent comprises respectivement dans des cercles de rayons r, r', décrits des points x_0, y_0 comme centres, et continue sur les circonférences elles-mêmes. Appelons de même M le maximum du module de la fonction dans l'étendue des valeurs considérées. Si, dans la formule (nº 100)

$$D_{xy}^{n+n'} f(x_0, y_0) = \frac{1.2\ldots n.1.2\ldots n'}{4\pi^2 r^n r'^{n'}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + re^{\theta i}, y_0 + r' e^{\theta' i}) e^{-(n\theta + n'\theta')i} d\theta\, d\theta',$$

on remplace chaque élément de l'intégrale multiple par une quantité $M d\theta d\theta'$ plus grande que son module, on augmente le module de l'intégrale, et l'on a

$$(2) \qquad \text{mod.} D_{xy}^{n+n'} f(x_0, y_0) < 1.2\ldots n.1.2\ldots n' \frac{M}{r^n r'^{n'}}.$$

Lemme III. — Il est facile de composer une fonction dont les dérivées partielles aient en x_0, y_0 des valeurs égales aux limites assignées pour les modules des dérivées correspondantes de la fonction proposée $f(x, y)$.

Considérons, en effet, la fonction

$$(3) \qquad \varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r'}\right)},$$

qui se développe en une série convergente tant que les différences $x - x_0$, $y - y_0$ ont des modules respectivement moindres que r, r'. Le terme général de la série est de la forme

$$\mathrm{M} \frac{(x - x_0)^n}{r^n} \frac{(y - y_0)^{n'}}{r'^{n'}}.$$

Si l'on prend une dérivée quelconque $\mathrm{D}_{xy}^{n+n'}$ de la fonction $\varphi(x, y)$, et que l'on y fasse $x = x_0$, $y = y_0$, le terme écrit plus haut donne

$$1.2\ldots n.1.2\ldots n' \frac{\mathrm{M}}{r^n r'^{n'}},$$

et les résultats fournis par les autres termes s'évanouissent. On a donc

$$[\mathrm{D}_{xy}^{n+n'} \varphi(x, y)]_0 = 1.2\ldots n.1.2\ldots n' \frac{\mathrm{M}}{r^n r'^{n'}}.$$

Ainsi, en x_0, y_0, les dérivées de la fonction φ sont des limites supérieures des modules des dérivées de la fonction f.

208. Théorème I. — *Une équation différentielle*

$$\frac{du}{dz} = f(z, u) \tag{4}$$

admet une intégrale holomorphe, tant que le coefficient différentiel est lui-même holomorphe par rapport à z et u.

Nous supposons que la variable z part du point $z = z_0$, la fonction u ayant une certaine valeur initiale $u = u_0$. Pour simplifier, représentons les variables par $z_0 + z$ et $u_c + u$; la variable z partira alors de $z = 0$, la fonction u ayant la valeur initiale $u = 0$. Le coefficient différentiel reste holomorphe pour toutes les valeurs de z et de u situées dans des cercles décrits des points $z = 0$ et $u = 0$ pris pour origines avec des rayons égaux à ρ et à r, et continu sur les circonférences elles-mêmes. Nous appellerons M le maximum du module de la fonction f dans cette étendue.

Si l'équation différentielle admet une intégrale jouissant des pro-

priétés énoncées, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} u' = f(z, u), \\ u'' = D_z f + u' D_u f, \\ u''' = D_z^2 f + 2u' D_{zu}^2 f + u'^2 D_u^2 f + u'' D_u f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

que l'on déduit de la première par la différentiation (n° **101**).

Imaginons que, dans les seconds membres, on remplace les valeurs de la fonction f et de ses dérivées partielles pour $z = 0$ et $u = 0$ par leurs modules; la première donnera le module de u'_0; en portant cette valeur dans la seconde, on aura une limite supérieure du module de u''_0; en portant ces valeurs dans la troisième, on aura une limite supérieure du module de u'''_0; et ainsi de suite.

En vertu du lemme III, les dérivées partielles de la fonction $f(z, u)$ ont, pour $z = 0$, $u = 0$, des valeurs dont les modules sont moindres que les dérivées correspondantes de la fonction

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)}$$

pour $z = 0$, $u = 0$. Considérons l'équation différentielle

$$(6)\qquad \frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{v}{r}\right)},$$

dans laquelle nous donnons à la fonction v la valeur initiale $v = 0$ pour $z = 0$. Si cette nouvelle équation admet une intégrale holomorphe, on obtiendra ses dérivées successives au moyen des équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} v' = \varphi(z. v), \\ v'' = D_z \varphi + v' D_v \varphi, \\ v'' = D_z^2 \varphi + 2v' D_{zv}^2 \varphi + v'^2 D_v^2 \varphi + v'' D_v \varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

analogues aux équations (5). Quand on y fait $z = 0$, et $v = 0$, la fonction φ et ses dérivées partielles prenant toutes des valeurs positives,

les seconds membres sont des sommes de termes positifs, et l'on en déduit successivement pour $v'_0, v''_0, v'''_0, \ldots$ des valeurs positives. Ainsi la fonction v a pour $z = 0$ toutes ses dérivées réelles et positives.

Comparons maintenant les équations (5) et (7). On voit d'abord que le module de u'_0 est moindre que v'_0. Les modules des termes de la seconde des équations (5) étant moindres que les termes correspondants de la seconde des équations (7), le module de u''_0 est moindre que v''_0, et ainsi de suite. On conclut de là que les modules des quantités u'_0, $u''_0, u'''_0, \ldots$, déduites des équations (5), sont respectivement moindres que les quantités $v'_0, v''_0, v'''_0, \ldots$, déduites des équations (7).

Il est facile de reconnaître que la fonction v existe. Mettons l'équation différentielle (6) sous la forme

$$\left(1 - \frac{v}{r}\right)\frac{dv}{dz} = \frac{M}{1 - \frac{z}{\rho}}; \tag{8}$$

si la fonction v existe, les deux membres sont respectivement les dérivées des fonctions de z

$$v - \frac{v^2}{2r}, \quad -M\rho \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right);$$

nous prendrons le logarithme qui s'annule pour $z = 0$, et qui reste holomorphe dans le cercle ρ. Ces deux fonctions, ayant leurs dérivées égales et même valeur pour $z = 0$, doivent être égales entre elles; on en conclut que la fonction cherchée v satisfait à l'équation finie

$$v - \frac{v^2}{2r} = -M\rho \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right), \tag{9}$$

et que, par conséquent, elle est représentée par la formule

$$v = r - r\sqrt{1 + \frac{2M\rho}{r}\log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)}, \tag{10}$$

dans laquelle le radical a la valeur $+1$ pour $z = 0$. Les deux racines de l'équation (9) deviennent égales lorsque la quantité placée sous le

radical est nulle, c'est-à-dire lorsque

$$\log\left(1-\frac{z}{\rho}\right)=-\frac{r}{2M\rho}, \quad \text{d'où} \quad z=\rho\left(1-e^{-\frac{r}{2M\rho}}\right)=\rho';$$

cette valeur $z=\rho'$, inférieure à ρ, est un point critique; ainsi la formule (10) définit une fonction holomorphe de z, tant que cette variable reste comprise dans le cercle décrit du point $z=0$ comme centre avec un rayon égal à ρ'. Cette fonction satisfait à l'équation (9), et, par conséquent, à l'équation (8).

La fonction v se développe en une série

$$(11) \qquad = v'_0 \frac{z}{1} + v''_0 \frac{z^2}{1.2} + v'''_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

convergente dans le cercle ρ'; on peut en calculer les coefficients à l'aide des équations (7); comme nous l'avons remarqué, ils sont tous réels et positifs. Si l'on attribue à z une valeur ayant un module ρ'' inférieur à ρ', le module de v sera plus petit que la somme des modules des termes de la série, c'est-à-dire que la valeur de v pour $z=\rho''$; cette valeur de v, réelle et positive, augmente avec ρ''; mais, pour $z=\rho'$, le radical étant nul, l'équation (10) donne $v=r$. On en conclut que, dans le cercle de convergence ρ', le module de la fonction v reste plus petit que r.

Considérons maintenant la série

$$(12) \qquad u = u'_0 \frac{z}{1} + u''_0 \frac{z^2}{1.2} + u'''_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

dont les coefficients sont les quantités que nous avons calculées de proche en proche à l'aide des équations (5). Nous avons vu que les modules de ces coefficients sont moindres que les coefficients correspondants de la série (11); ainsi la série (12) est aussi convergente dans le cercle ρ', et elle définit une fonction holomorphe dans ce cercle. Nous remarquons que, si l'on attribue à z une valeur ayant un module ρ'' inférieur à ρ', le module de u est plus petit que la somme des modules des termes de la série (12), et, à plus forte raison, plus petit que la

somme des termes de la série (11) pour $z = \rho''$, c'est-à-dire que la valeur de v pour $z = \rho''$; mais cette valeur de v est plus petite que r; on en conclut que, dans le cercle ρ', la fonction holomorphe u, définie par la série (12), a un module plus petit que r.

Il reste à démontrer que cette fonction satisfait bien à l'équation différentielle proposée (4). Si l'on y remplace u par sa valeur (12), le premier membre devient

$$(13) \qquad \frac{du}{dz} = u'_0 + u''_0 \frac{z}{1} + u'''_0 \frac{z^2}{1.2} + \ldots.$$

Le second membre $f(z, u)$, qui est une fonction holomorphe des deux variables z et u, pour toutes les valeurs de ces deux variables dont les modules sont respectivement inférieurs à ρ et à r, devient une fonction holomorphe de z, dans le cercle ρ' (101). Cette fonction, que nous désignerons par $F(z)$, se développe en une série

$$(14) \qquad F(z) = F(0) + F'(0)\frac{z}{1} + F''(0)\frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$

convergente dans le cercle, et l'on pourra calculer les coefficients de la série à l'aide des équations

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} F\ (z) = f(z, u). \\ F'\ (z) = D_z f + u' D_u f, \\ F''\ (z) = D_z^2 f + 2u' D_{zu}^2 f + u'^2 D^2 f + u'' D_u f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $u'\ u'', \ldots$ désignent les dérivées successives de la fonction u définie par la série (12). Pour $z = 0$, ces dérivées de u se réduisent aux coefficients mêmes $u'_0, u''_0, \ldots$ de la série, c'est-à-dire aux quantités déduites des équations (5). On voit alors que, pour $z = 0$, $u = 0$, les seconds membres des équations (15) sont identiquement les mêmes que ceux des équations (5), et que par conséquent

$$F(0) = u'_0, \quad F'(0) = u''_0, \quad F''(0) = u'''_0, \ldots ;$$

ainsi les deux séries (13) et (14) sont les mêmes, et l'équation différentielle est vérifiée.

209. *Remarque.* — Nous avons démontré que l'équation différentielle $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ admet une intégrale holomorphe dans une certaine étendue. Il n'existe pas d'autre fonction satisfaisant à l'équation différentielle proposée et devenant égale à zéro pour $z = 0$. Soit u l'intégrale holomorphe, et supposons qu'il existe une seconde intégrale, que nous représenterons par $u + v$, la fonction v s'évanouissant pour $z = 0$; nous aurons

$$\frac{d(u+v)}{dz} = f(u+v, z),$$

d'où

$$\frac{dv}{dz} = f(u+v, z) - f(u, z).$$

Puisque le second membre s'annule pour $v = 0$, quelle que soit z, il contient une puissance de v en facteur (n° 115), et l'on a

$$\frac{dv}{dz} = v^m \varphi(z),$$

en supposant que, dans le quotient, on ait remplacé u et v par leurs valeurs en fonction de z. L'intégration le long d'une courbe quelconque donne

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{v_0^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \int_0^z \varphi(z)\,dz.$$

L'intégrale définie ayant une valeur finie et v_0 devant être nulle, cette égalité est impossible. Quand $m = 1$, l'équation différentielle devient

$$\frac{dv}{v} = \varphi(z)\,dz,$$

d'où

$$v = v_0 e^{\int_0^z \varphi(z)\,dz}.$$

Puisque $v_0 = 0$, la fonction v est identiquement nulle.

Ainsi l'équation différentielle proposée n'admet pas d'intégrale prenant la valeur zéro pour $z = 0$, autre que l'intégrale holomorphe

210. Théorème II. — *Un système d'équations différentielles simultanées admet des intégrales holomorphes, tant que les coefficients différentiels sont eux-mêmes holomorphes.*

Soient les équations différentielles simultanées

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= f_1(z, u_1, u_2, \ldots, u_n),\\ \frac{du_2}{dz} &= f_2(z, u_1, u_2, \ldots, u_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{du_n}{dz} &= f_n(z, u_1, u_2, \ldots, u_n); \end{aligned}\right.$$

nous supposons que la variable z parte de $z = 0$, les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_n$ ayant les valeurs initiales zéro. Les coefficients différentiels $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions holomorphes des variables z, u_1, $u_2, \ldots, u_n$, tant que les modules de ces variables restent inférieurs ou égaux à ρ, r_1, $r_2, \ldots, r_n$, et, pour simplifier, nous remplacerons chacun des rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n$ par le plus petit d'entre eux r. Appelons M le maximum du module des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dans cette étendue, et posons

$$\varphi(z, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)\left(1-\frac{u_1}{r}\right)\left(1-\frac{u_2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{u_n}{r}\right)}.$$

En vertu du lemme III, les dérivées partielles des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ont, pour $z = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$, des valeurs dont les modules sont respectivement moindres que les dérivées correspondantes de la fonction φ.

Si l'on compare les équations différentielles proposées (16) aux équations différentielles simultanées

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dv_1}{dz} &= \varphi(z, v_1, v_2, \ldots, v_n),\\ \frac{dv_2}{dz} &= \varphi(z, v_1, v_2, \ldots, v_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{dv_n}{dz} &= \varphi(z, v_1, v_2, \ldots, v_n), \end{aligned}\right.$$

et si l'on admet que les fonctions intégrales existent de part et d'autre, on verra, comme précédemment, que les dérivées $(u_1')_0$, $(u_2')_0, \ldots$, $(u_1'')_0, \ldots$, déduites des premières par un calcul de proche en proche, ont des modules respectivement moindres que les quantités réelles et positives $(v_1')_0$, $(v_2')_0, \ldots$, $(v_1'')_0, \ldots$, déduites des secondes par un calcul analogue. Remarquons que les quantités $(v_1')_0$, $(v_2')_0, \ldots$, $(v_n')_0$ sont égales entre elles, de même les quantités $(v_1'')_0$, $(v_1'')_0, \ldots$, $(v_n'')_0$, et ainsi de suite.

Il est facile d'intégrer les équations (17). Si les fonctions v_1, $v_2, \ldots, v_n$ existent, comme elles ont leurs dérivées égales et même valeur pour $z = 0$, elles sont égales entre elles; on doit donc avoir

$$v_1 = v_2 \ldots = v_n = v,$$

et chacune des équations (17) se réduit à

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\mathrm{M}}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{v}{r}\right)^n}; \tag{18}$$

on la mettra sous la forme

$$\left(1 - \frac{v}{r}\right)^n \frac{dv}{dz} = \frac{\mathrm{M}}{1 - \frac{z}{\rho}}. \tag{19}$$

La fonction v doit donc satisfaire à l'équation

$$\frac{r}{n+1}\left[1 - \left(1 - \frac{v}{r}\right)^{n+1}\right] = -\mathrm{M}\rho \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right), \tag{20}$$

d'où l'on déduit

$$v = r\left[1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)\mathrm{M}\rho}{r} \log\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)}\right]. \tag{21}$$

Nous prenons le logarithme qui s'annule pour $z = 0$, et qui est holomorphe dans le cercle ρ. Les $n + 1$ racines de l'équation (20) deviennent égales, lorsque la quantité placée sous le radical s'annule,

ce qui a lieu au point critique

$$z = \rho\left(1 - e^{-\frac{r}{(n+1)M\rho}}\right) = \rho'.$$

Ainsi la formule (21) définit une fonction holomorphe de z, tant que cette variable reste comprise dans un cercle décrit du point $z = 0$ comme centre avec un rayon égal à ρ'. Cette fonction satisfait à l'équation (20) et, par conséquent, à l'équation (19); n fonctions égales à celle-là satisfont aux équations (17).

La fonction v se développe en une série

$$(22) \qquad v = v'_0 \frac{z}{1} + v''_0 \frac{z^2}{1.2} + v'''_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots,$$

convergente dans le cercle ρ', et dont on peut calculer les coefficients à l'aide de l'équation (18) de proche en proche. On verra, comme précédemment, que le module de cette fonction reste plus petit que r dans le cercle ρ'.

Considérons maintenant les séries

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = (u'_1)_0 \frac{z}{1} + (u''_1)_0 \frac{z^2}{1.2} + (u'''_1)_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots, \\ u_2 = (u'_2)_0 \frac{z}{1} + (u''_2)_0 \frac{z^2}{1.2} + (u'''_2)_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u_n = (u'_n)_0 \frac{z}{1} + (u''_n)_0 \frac{z^2}{1.2} + (u'''_n)_0 \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots, \end{array}\right.$$

dont les coefficients sont les quantités déduites des équations (16) par un calcul de proche en proche. Ces coefficients ayant des modules respectivement moindres que les coefficients de la série (22), les séries (23) sont convergentes dans le cercle ρ'; elles définissent des fonctions de z holomorphes dans ce cercle et ayant leurs modules plus petits que r. On vérifiera que ces fonctions satisfont bien aux équations différentielles proposées (16).

Une équation différentielle d'un ordre supérieur au premier se ramène à un système d'équations simultanées du premier ordre.

Existence des fonctions implicites.

211. Théorème III. — *Étant donnée une équation* $F(z, u) = 0$ *dont le premier membre est une fonction holomorphe des deux variables z et u dans le voisinage des valeurs initiales, si la dérivée partielle par rapport à u n'est pas nulle pour les valeurs initiales assignées, l'équation est vérifiée par une fonction u de z holomorphe dans une certaine étendue.*

Ce théorème, que nous avons démontré directement pour les équations algébriques (n° 31) et étendu ensuite aux équations transcendantes (n° 130), peut être regardé comme une conséquence du théorème I, relatif à l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle.

Si l'équation est vérifiée par une fonction u de z, admettant la valeur u_0 pour $z = z_0$ et holomorphe dans le voisinage du point z_0, cette fonction satisfera à l'équation différentielle

$$D_z F + D_u F \frac{du}{dz} = 0, \tag{24}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dz} = -\frac{D_z F}{D_u F} = f(z, u). \tag{25}$$

La fonction $F(z, u)$ étant holomorphe par rapport à z et à u, les deux dérivées partielles $D_z F$, $D_u F$ jouissent de la même propriété; si, pour $z = z_0$ et $u = u_0$, la dérivée partielle $D_u F$ n'est pas nulle, le quotient $f(z, u)$ sera lui-même holomorphe en z et u. La question est ainsi ramenée à la précédente : l'équation différentielle (25) admet une intégrale holomorphe $u = \varphi(z)$, ayant la valeur initiale u_0 pour $z = z_0$.

Il est aisé de voir que cette fonction $u = \varphi(z)$ satisfait à l'équation proposée; car l'expression $D_z F + D_u F \frac{du}{dz}$ est la dérivée de la fonction composée $F(z, u)$; cette dérivée étant nulle pour toutes les valeurs de z comprises dans une certaine partie du plan, la fonction $F(z, u)$ est constante, et comme elle est nulle pour $z = 0$, elle est nulle dans toute cette partie du plan.

212. Théorème IV. — *Étant donné un système d'équations simultanées dont les premiers membres sont des fonctions holomorphes de toutes les variables, dans le voisinage des valeurs initiales, si le déterminant fonctionnel n'est pas nul pour les valeurs initiales, les équations sont vérifiées par un système de fonctions d'une seule variable, holomorphes dans une certaine étendue.*

Considérons un système d'équations simultanées

$$(26)\qquad \begin{cases} F_1(z, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ F_2(z, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(z, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \end{cases}$$

dont les premiers membres sont des fonctions holomorphes des variables $z, u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans une certaine étendue. Si des fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_n$ de z vérifient ces équations, elles satisferont aux équations différentielles

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dz} + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dz} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial u_n}\dfrac{du_n}{dz} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dz} + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dz} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial u_n}\dfrac{du_n}{dz} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial z} + \dfrac{\partial F_n}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dz} + \dfrac{\partial F_n}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dz} + \ldots + \dfrac{\partial F_n}{\partial u_n}\dfrac{du_n}{dz} = 0. \end{cases}$$

Lorsque le *déterminant fonctionnel*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_n}{\partial u_2} \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul pour les valeurs initiales assignées, les valeurs des dé-

rivées, déduites de ces équations, sont des fonctions holomorphes

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = f_1(z, u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ \dfrac{du_2}{dz} = f_2(z, u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dz} = f_n(z, u_1, u_2, \ldots, u_n), \end{cases}$$

et la question est encore ramenée à celle de l'intégration.

Cas où le coefficient différentiel devient infini.

213. Revenons à l'étude d'une équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = f(z, u).$$

La variable z part d'un point fixe z_0, la fonction u ayant une valeur initiale u_0. D'après ce que nous avons démontré, tant que le coefficient différentiel reste holomorphe par rapport à z et à u, l'intégrale u est elle-même une fonction holomorphe de z. Supposons maintenant que, la variable z arrivant en un certain point z_1, la fonction u prenne une valeur u_1, telle que le coefficient différentiel $f(z, u)$ devienne infini, de manière, toutefois, que son inverse $\frac{1}{f(z, u)}$ reste holomorphe dans le voisinage des valeurs z_1 et u_1. Dans ce cas, la fonction intégrale u cesse d'être monotrope, et acquiert autour du point z_1 plusieurs valeurs différentes qui se permutent circulairement.

Théorème V. — *Lorsque le coefficient différentiel devient infini, si l'on désigne par n l'ordre de la première dérivée partielle de la fonction $\frac{1}{f}$ par rapport à u qui ne s'annule pas, la fonction intégrale acquiert $n+1$ valeurs différentes formant un système circulaire.*

Posons

$$z = z_1 + z', \quad u = u_1 + u',$$

d'où

$$\frac{du'}{dz'} = f(u_1 + u', z_1 + z').$$

Si l'on regarde z' comme une fonction de u', cette fonction devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

et admettre la valeur initiale $z' = 0$ pour $u' = 0$. La fonction

$$\frac{1}{f(u_1 + u', z_1 + z')},$$

étant holomorphe, est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de u' et de z', et l'on a

$$(29) \qquad \frac{dz'}{du'} = au' + bz' + cu'z' + ez'^2 + \ldots = \varphi(u', z').$$

Le second membre renferme au moins un terme indépendant de z'; car, si tous les termes contenaient z', l'équation admettrait la solution $z' = 0$ et aucune autre (n° 209). Soit n le degré du premier terme indépendant de z'; les $n - 1$ premières dérivées partielles de φ par rapport à u' s'annuleront pour $u' = 0$, $z' = 0$; de sorte que les équations successives

$$\frac{dz'}{du'} = \varphi(u', z'),$$

$$\frac{d^2z'}{du'^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial u'} + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{du'},$$

$$\frac{d^3z'}{du'^3} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u'^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u'\,\partial z'}\frac{dz'}{du'} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial z'}{\partial u'}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{d^2z'}{du'^2},$$

. . . .

donneront

$$\left(\frac{dz'}{du'}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2z'}{du'^2}\right)_0 = 0, \ldots, \quad \left(\frac{d^nz'}{du'^n}\right)_0 = 0;$$

mais la dérivée suivante $\left(\frac{d^{n+1}z'}{du'^{n+1}}\right)_0$ ne sera pas nulle. L'intégrale de l'équation (29) sera de la forme

$$z' = A u'^{n+1} + B u'^{n+2} + C u'^{n+3} + \dots \tag{30}$$

Il s'agit maintenant de résoudre cette équation par rapport à u'. Pour cela, posons

$$z' = z''^{n+1}, \quad u' = v z'';$$

l'équation devient

$$1 - A v^{n+1} - B v^{n+2} z'' - C v^{n+3} z''^2 - \dots = 0. \tag{31}$$

Pour $z'' = 0$, l'équation se réduit à l'équation binôme $1 - A v^{n+1} = 0$; on adoptera, pour valeur initiale de v, l'une quelconque des valeurs $v_0 = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. La dérivée partielle du premier membre de l'équation (31) par rapport à v n'étant pas nulle pour $z'' = 0$ et $v = v_0$, cette équation, en vertu du théorème III, est satisfaite par une fonction holomorphe v de z'',

$$v = v_0 + v_1 z'' + v_2 z''^2 + \dots;$$

d'où l'on déduit

$$u = u_1 + v_0 z'^{\frac{1}{n+1}} + v_1 z'^{\frac{2}{n+1}} + v_2 z'^{\frac{3}{n+1}} + \dots \tag{32}$$

Quand la variable z tourne autour du point z_1, la fonction u acquiert $n+1$ valeurs différentes formant un système circulaire.

La valeur de v_0 est l'une des racines de l'équation binôme $v_0^{n+1} = \frac{1}{A}$; quelle que soit celle des racines que l'on prenne, on aura toujours pour u les mêmes valeurs; nous avons posé, en effet, $u' = v z'' = v z'^{\frac{1}{n+1}}$; si l'on remplace la variable z' par la valeur $z' e^{2m\pi i}$, qui se rapporte au même point du plan, la formule précédente devient $u' = v e^{\frac{2m\pi i}{n+1}} z'^{\frac{1}{n+1}}$; ceci revient à remplacer v_0 par une autre racine de l'équation binôme.

CHAPITRE II.

EXEMPLES DE FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Exemple I.

214. Considérons l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = u, \tag{1}$$

à laquelle nous joignons la condition initiale $u = 1$ pour $z = 0$. La dérivée étant une fonction holomorphe de u pour toutes les valeurs finies de u, il existe une fonction u de z satisfaisant à l'équation différentielle proposée et à la condition initiale donnée, et cette fonction est holomorphe tant qu'elle conserve une valeur finie; mais, à l'inspection de l'intégrale définie

$$z = \int_1^u \frac{1}{u}\,du, \tag{2}$$

on voit que z devient infini avec u : on en conclut que u conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de z, et, par conséquent, que la fonction u, définie par l'équation différentielle, est holomorphe pour toutes les valeurs finies de z.

La fonction inverse z de u est donnée par l'intégrale définie (2); le point $u = 0$ étant pôle de la fonction $\frac{1}{u}$, cette intégrale définie z admet la période polaire $\omega = 2\pi i$; il en résulte qu'à chaque valeur de u correspond une série de valeurs de z de la forme $z + m\omega$. On en conclut que u est une fonction de z simplement périodique.

Cette fonction, étant holomorphe pour toutes les valeurs finies de z, est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières de z, et convergente dans toute l'étendue du plan. On obtiendra les

coefficients de la série en suivant la méthode générale indiquée au nº **208**. De l'équation proposée on déduit, par des différentiations successives,

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{du}{dz} = u, \quad \frac{d^3u}{dz^3} = \frac{du}{dz} = u, \ldots;$$

toutes les dérivées se réduisant à l'unité pour $z = 0$, on a la série

$$(3) \qquad u = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

ce qui fait voir que la fonction intégrale n'est autre que e^z.

Exemple II.

215. L'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{du}{dz} = 1 + u^2,$$

à laquelle on joint la condition initiale $u = 0$ pour $z = 0$, définit de même une fonction u de z, holomorphe tant qu'elle reste finie. L'intégrale définie

$$(5) \qquad z = \int_0^u \frac{1}{1+u^2}\,du$$

montre que, quand u va à l'infini par un chemin quelconque, z tend vers une valeur finie correspondante α, en décrivant un certain chemin $O\alpha$. Réciproquement, quand la variable z décrit ce chemin $O\alpha$, la fonction u devient infinie. Examinons ce qui se passe dans le voisinage de ce point α_1, où la fonction u devient infinie. Posons, pour cela, $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{u'}$; l'équation différentielle proposée devient

$$(6) \qquad \frac{du'}{dz'} = -(1 + u'^2),$$

et il faut y joindre la condition initiale $u' = 0$ pour $z' = 0$. Cette dernière équation fait voir que u' est une fonction holomorphe de z' dans

le voisinage du point $z' = 0$; il en résulte que le point $z = \alpha$ est un pôle de la fonction u. On conclut de là que la fonction u, définie par l'équation différentielle (4), est une fonction méromorphe de z dans toute l'étendue du plan.

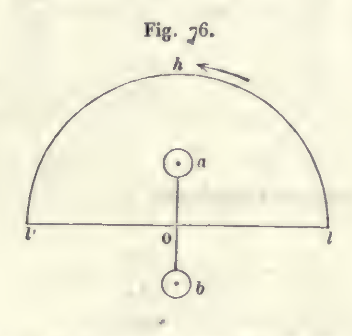
La fonction inverse est donnée par l'intégrale définie (5). Si la variable u décrit deux lignes symétriques par rapport à l'origine, z acquiert des valeurs égales et de signes contraires; il en résulte que u est une fonction impaire de z. La fonction $\frac{1}{1+u^2}$ admet les deux pôles $u = \pm i$; puisque

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2i}\frac{1}{u-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{u+i},$$

les lacets correspondants (a) et (b), décrits dans le sens positif, donnent la même période polaire $\omega = \pm\pi$. Il en résulte qu'à chaque valeur de u correspond une série de valeurs de z de la forme $z + m\pi$. On en conclut que u est une fonction de z simplement périodique.

Il est facile de trouver les pôles de cette fonction. Remarquons d'abord que, dans l'étude de l'intégrale définie (5), le point $u = \infty$ ou $u' = 0$, sur la sphère, est un point ordinaire. L'intégrale définie, relative au contour d'un demi-cercle $l'lh$ (*fig.* 76) d'un très-grand rayon,

Fig. 76.



est égale à l'intégrale relative au lacet (a), c'est-à-dire à π; la partie de l'intégrale relative à la demi-circonférence étant infiniment petite, et les parties relatives aux deux rayons $l'O$, Ol étant égales, si l'on appelle α l'intégrale relative au rayon infini Ol, on a $2\alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Les pôles de la fonction sont donc $\frac{\pi}{2} + m\pi$.

216. On peut exprimer la fonction méromorphe u par le quotient de deux fonctions holomorphes. Si l'on pose, en effet, $u = \frac{v}{w}$, l'équation différentielle devient

$$w\left(\frac{dv}{dz} - w\right) - v\left(\frac{dw}{dz} + v\right) = 0;$$

cette équation sera satisfaite si l'on choisit les deux fonctions v et w de manière à vérifier les deux équations simultanées

$$(7) \qquad \frac{dv}{dz} = w, \quad \frac{dw}{dz} = -v,$$

auxquelles on joindra les conditions initiales $v = 0$, $w = 1$ pour $z = 0$. D'après le théorème général démontré au n° **210**, ces deux fonctions restent holomorphes tant qu'elles conservent des valeurs finies; elles sont développables en des séries dont on obtiendra les coefficients en différentiant plusieurs fois successivement les équations précédentes, ce qui donne

$$\begin{array}{ll}
\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{dw}{dz} = -v, & \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{dv}{dz} = -w, \\
\frac{d^3v}{dz^3} = -\frac{dv}{dz} = -w, & \frac{d^3w}{dz^3} = -\frac{dw}{dz} = v, \\
\frac{d^4v}{dz^4} = -\frac{dw}{dz} = v, & \frac{d^4w}{dz^4} = \frac{dv}{dz} = w, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Pour $z = 0$, ces dérivées se réduisent à

$$\begin{array}{ll}
\frac{dv}{dz} = 1, & \frac{dw}{dz} = 0, \\
\frac{d^2v}{dz^2} = 0, & \frac{d^2w}{dz^2} = -1, \\
\frac{d^3v}{dz^3} = -1, & \frac{d^3w}{dz^3} = 0, \\
\frac{d^4v}{dz^4} = 0, & \frac{d^4w}{dz^4} = 1, \\
\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots
\end{array}$$

et l'on a les deux séries

$$v = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots,$$

$$w = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots.$$

Ce sont précisément celles qui définissent $\sin z$ et $\cos z$ (nº 55); elles sont convergentes pour toutes les valeurs de z, et l'on vérifie aisément qu'elles satisfont aux deux équations différentielles simultanées. On a donc

$$(8) \qquad u = \frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tang} z.$$

Exemple III.

217. Soit l'équation différentielle

$$(9) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)},$$

dans laquelle le polynôme placé sous le radical est du second degré, et à laquelle on joint la condition initiale $u = 0$ pour $z = 0$, le radical ayant une valeur initiale déterminée. La dérivée cesse d'être une fonction holomorphe de u, lorsque la fonction intégrale u arrive dans le voisinage des points critiques a et b du radical, ou lorsqu'elle devient infinie. Nous savons (nº **111**) que l'intégrale définie

$$(10) \qquad z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)}}$$

conserve une valeur finie sur toute la sphère, excepté au point $u = \infty$ où elle devient infinie. Ainsi la fonction u ne devient infinie pour aucune valeur finie de z; il suffit donc d'examiner ce qui se passe quand la variable z arrive dans le voisinage d'un point z_1 où la fonction u acquiert l'une des valeurs a ou b. Nous poserons, pour cela,

$z = z_1 + z'$, $u = a + u'^2$; l'équation différentielle devient

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{1}{2}\sqrt{G(a - b + u'^2)},$$

et il faut y joindre la condition initiale $u' = 0$ pour $z' = 0$. La dérivée $\frac{du'}{dz'}$ étant une fonction holomorphe de u' pour les valeurs de u' voisines de zéro, la fonction intégrale u' est elle-même fonction holomorphe de z' dans le voisinage de $z' = 0$. On en conclut que la fonction u, définie par l'équation différentielle (9), est une fonction holomorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Si l'on désigne par A et par B les intégrales définies relatives aux droites Oa et Ob, nous avons vu (n° 113) que l'intégrale définie (10) admet une période $\omega = 2A - 2B = \frac{2\pi i}{\sqrt{G}}$, et qu'à chaque valeur de u correspondent deux séries de valeurs de z de la forme $z + m\omega$, $A - z + m\omega$. On en conclut que u est une fonction de z simplement périodique.

218. On peut ramener l'équation différentielle proposée à une forme plus simple. Si l'on pose

$$u = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}u', \quad z = z_0 + \frac{z'}{\sqrt{-G}},$$

z_0 étant l'une des valeurs de z qui correspondent à $u = \frac{a+b}{2}$, l'équation différentielle devient

$$(11) \qquad \frac{du'}{dz'} = \sqrt{1 - u'^2},$$

avec la condition initiale $u' = 0$ pour $z' = 0$. Les deux points critiques sont $u' = \pm 1$, et l'on a $\sqrt{G} = i$, $\omega = 2\pi$.

La fonction u', étant holomorphe dans toute l'étendue du plan, est développable en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de z', et convergente dans tout le plan. De l'équation

$$\left(\frac{du'}{dz'}\right)^2 = 1 - u'^2,$$

on déduit, par la différentiation,

$$\frac{d^2u'}{dz'^2} = -u', \quad \frac{d^3u'}{dz'^3} = -\frac{du'}{dz'}, \quad \frac{d^4u'}{dz'^4} = u', \ldots;$$

pour $z' = 0$, ces dérivées ont les valeurs

$$\frac{du'}{dz'} = 1, \quad \frac{d^2u'}{dz'^2} = 0, \quad \frac{d^3u'}{dz'^3} = -1, \quad \frac{d^4u'}{dz'^4} = 0, \ldots,$$

et l'on obtient la série

$$u' = \frac{z'}{1} - \frac{z'^3}{1.2.3} + \frac{z'^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

On a donc

(12) $$u' = \sin z'.$$

Exemple IV.

219. Soit l'équation différentielle

(13) $$\frac{du}{dz} = \sqrt{F(u)} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)},$$

dans laquelle le polynôme placé sous le radical est du quatrième degré, et à laquelle on joint la condition initiale $u = 0$ pour $z = 0$, le radical ayant une valeur déterminée. La dérivée cesse d'être une fonction holomorphe de u, lorsque la fonction intégrale u arrive dans le voisinage de l'un des points critiques a, b, c, d du radical, ou lorsqu'elle devient infinie. Les deux circonstances se présentent ici; car nous savons (n° **113**) que, lorsque le polynôme placé sous le radical est d'un degré supérieur à deux, l'intégrale définie

(14) $$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}$$

conserve une valeur finie sur toute la sphère. On verra, comme dans

l'exemple précédent, que, lorsque la variable z arrive dans le voisinage de l'un des points où u acquiert l'une des valeurs a, b, c, d, la fonction u reste une fonction holomorphe de z. Pour voir ce qui se passe lorsque la variable z arrive dans le voisinage de l'un des points α où u devient infinie, nous poserons $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{u'}$; l'équation différentielle devient

$$(15) \qquad \frac{du'}{dz'} = -\sqrt{G(1-au')(1-bu')(1-cu')(1-du')};$$

il faut y joindre la condition initiale $u' = 0$ pour $z' = 0$. La fonction u' étant holomorphe dans le voisinage du point $z' = 0$, qui est un zéro simple de cette fonction, le point $z = \alpha$ est un pôle simple de la fonction u. On conclut de là que la fonction u, définie par l'équation différentielle (13), est une fonction méromorphe de z dans toute l'étendue du plan.

L'intégrale définie (14) a deux périodes $\omega = 2A - 2B$, $\omega' = 2A - 2C$, A, B, C étant les intégrales suivant les droites Oa, Ob, Oc, avec la valeur initiale du radical (nº 113); à chaque valeur de u correspondent deux valeurs de z, savoir z et $2A - z$, augmentées de multiples quelconques des périodes. Ainsi u est une fonction de z doublement périodique et du second ordre.

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(16) \qquad \frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)},$$

dans laquelle le polynôme placé sous le radical est du troisième degré; la fonction intégrale jouit des mêmes propriétés; elle est méromorphe dans toute l'étendue du plan, doublement périodique et du second ordre; seulement, au lieu de deux infinis simples, elle admet un infini double. En effet, si α est un point où u devient infinie et si l'on pose $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{u'}$, l'équation différentielle devient

$$\frac{du'}{dz'} = -\sqrt{Gu'(1-au')(1-bu')(1-cu')};$$

si l'on pose ensuite $u' = u''^2$, elle se réduit à

$$\frac{du''}{dz'} = -\frac{1}{2}\sqrt{G(1-au''^2)(1-bu''^2)(1-cu''^2)},$$

avec la condition initiale $u'' = 0$ pour $z' = 0$. La fonction u'' étant holomorphe dans le voisinage du point $z' = 0$, qui est un zéro simple de cette fonction, le point $z = \alpha$ est un infini double de la fonction u.

Il est facile de réduire les équations différentielles (13) et (16) à la forme particulière qui convient aux fonctions elliptiques. Nous remarquons d'abord que, si l'on pose $u = d + \frac{1}{u'}$, l'équation (13) se ramène à la forme (16); si l'on pose $u = c + \frac{1}{u'^2}$, celle-ci devient

$$\frac{du'}{dz} = -\frac{1}{2}\sqrt{G[1-(a-c)u'^2][1-(b-c)u'^2]};$$

en faisant ensuite $u' = \frac{u''}{\sqrt{a-c}}$, on arrive à l'équation

$$\frac{du''}{dz} = -\frac{1}{2}\sqrt{G(a-c)}\sqrt{(1-u''^2)\left(1-\frac{b-c}{a-c}u''^2\right)},$$

qui a la forme de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{17}$$

à laquelle satisfait la fonction elliptique $\lambda(z)$ (n° 159).

220. Nous avons vu (n° 113) que, lorsque le degré du polynôme $F(u)$ surpasse quatre, le nombre des cycles et, par conséquent, le nombre des périodes sont en général plus grands que deux; on reconnaît que, dans ce cas, la fonction intégrale n'est plus monotrope, et qu'elle acquiert plusieurs valeurs autour de chacun des points α où elle devient infinie. Supposons d'abord que le polynôme soit d'un degré pair $2n$; si l'on pose $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{u'}$, l'équation devient

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{-\sqrt{G(1-au')(1-bu')\ldots}}{u'^{n-2}}.$$

En vertu du théorème du n° 213, la fonction u' et, par conséquent, la branche correspondante de la fonction u acquièrent $n-1$ valeurs différentes autour du point $z=\alpha$, qui est un point critique algébrique pour cette branche de la fonction. Supposons maintenant que le polynôme soit d'un degré impair $2n-1$; on a l'équation transformée

$$\frac{du'}{dz'} = \frac{-\sqrt{G u'(1-au')(1-bu')\ldots}}{u'^{n-2}},$$

que l'on réduit à

$$\frac{du''}{dz'} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{G(1-au''^2)(1-bu''^2)\ldots}}{u''^{2n-4}},$$

en posant $u'=u''^2$; la fonction u'' et, par conséquent, la branche correspondante de la fonction u acquièrent $2n-3$ valeurs différentes autour du point $z=\alpha$, qui est un point critique algébrique par rapport à cette branche de la fonction.

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS ELLIPT. DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

La fonction λ.

221. Nous avons défini la fonction $\lambda(z)$ à l'aide de la fonction Θ, et nous avons démontré (nº 159) que cette fonction satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}. \tag{1}$$

On peut, au contraire, définir la fonction λ par l'équation différentielle, à laquelle on joint les conditions initiales $u = 0$, $\frac{du}{dz} = g$, pour $z = 0$.

Cette équation rentre dans celle que nous avons étudiée au nº 219. Nous avons vu que la fonction intégrale est méromorphe pour toutes les valeurs finies de z, qu'elle est doublement périodique et du second ordre. Représentons par Δu le radical. Quand u se meut dans deux directions opposées, à partir de l'origine $u = 0$, l'intégrale définie

$$z = \int_0^u \frac{du}{g\Delta u}$$

acquiert des valeurs égales et de signes contraires; réciproquement, à des valeurs de z égales et de signes contraires correspondent des valeurs de u égales et de signes contraires; u est donc une fonction impaire de z, et l'on a

$$\lambda(-z) = -\lambda(z). \tag{2}$$

Les racines du polynôme placé sous le radical sont ± 1, $\pm \frac{1}{k}$; aux

deux premières correspondent les deux points critiques a et c (*fig.* 77), aux deux autres les deux points critiques b et d; un rayon vecteur,

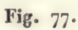
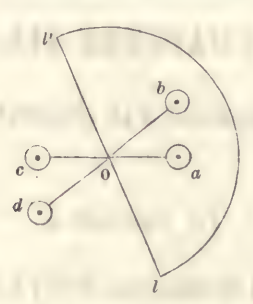


Fig. 77.



tournant autour de l'origine dans le sens positif, les rencontre dans l'ordre a, b, c, d. Nous prendrons comme première période $2\omega = 2A - 2C = 4A$; d'où

$$(3) \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{du}{g\Delta u},$$

l'intégrale rectiligne relative à la droite Oa étant évaluée avec la valeur initiale $\Delta u = +1$ du radical. On en déduit

$$(4) \qquad \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1.$$

Nous prendrons comme seconde période, soit $\omega' = 2B - 2A$, soit $\omega' = 2A - 2B$, de manière que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i soit positif. On a ainsi

$$(5) \qquad \frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{g\Delta u}.$$

On en déduit, dans les deux cas,

$$(6) \qquad \lambda\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Puisqu'à chaque valeur de u correspondent seulement deux valeurs

de z, savoir z et $2A - z$, c'est-à-dire z et $\omega - z$, augmentées de multiples quelconques des périodes 2ω, ω', le parallélogramme construit sur ces périodes est bien un parallélogramme élémentaire. On a les relations

$$(7) \qquad \lambda(\omega - z) = \lambda(z), \quad \lambda(z + \omega) = -\lambda(z).$$

222. Les deux zéros de la fonction sont $z = 0$ et $z = \omega$. Pour trouver les infinis, faisons décrire à la variable u un contour formé d'un rayon Ol, d'une demi-circonférence d'un très-grand rayon et du rayon opposé $l'O$, et, pour fixer les idées, supposons que le rayon Ol passe entre les points b et c, et que le demi-cercle comprenne les deux points a et b. Ce contour, parcouru avec la valeur initiale $\Delta u = +1$, ramène la même racine et constitue, par conséquent, un cycle; la partie de l'intégrale définie relative à la demi-circonférence est infiniment petite; les parties relatives aux droites Ol et $l'O$ sont égales; en désignant par α l'une d'elles, on a donc

$$2\alpha = 2A - 2B; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \mp \frac{\omega'}{2}.$$

Si le rayon Ol passait entre les points a et b, le demi-cercle comprenant les deux points critiques b et c, on aurait

$$2\alpha = 2B - 2C = 2B + 2A; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \omega \pm \frac{\omega'}{2}.$$

Les infinis sont donc les quantités $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega'}{2} + \omega$, augmentées de multiples quelconques des périodes 2ω, ω'.

Si l'on pose $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, $u = \frac{1}{ku'}$, l'équation différentielle devient

$$\frac{du'}{dz'} = \pm g\sqrt{(1 - u'^2)(1 - k^2u'^2)},$$

avec la condition initiale $u' = 0$ pour $z' = 0$. On a donc

$$u' = \pm \lambda(z'),$$

et, par suite,

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \pm \frac{1}{k\lambda(z')}.$$

En faisant $z' = \frac{\omega}{2}$, on reconnaît qu'il faut prendre le signe $+$; on obtient ainsi la relation

$$\lambda\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k\lambda(z)}. \tag{8}$$

La fonction $\lambda(z)$, définie par l'équation différentielle (1), dépend des deux constantes k et g, c'est-à-dire du module et du multiplicateur. Les formules (2) et (3) donnent les périodes 2ω, ω' par des intégrales définies. Nous avons choisi ces deux périodes de manière que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i soit positif. Nous pouvons donc, avec les deux constantes ω et ω', composer une fonction $\Theta(z)$ à l'aide d'une série convergente, et, au moyen des fonctions θ qui s'en déduisent (n° 74), former une fonction méromorphe doublement périodique

$$\lambda(z) = \frac{\theta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}.$$

Ces deux fonctions méromorphes, doublement périodiques, aux mêmes périodes, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant (n° 152); comme elles sont toutes deux égales à l'unité pour $z = \frac{\omega}{2}$, elles sont égales entre elles. On en conclut que la fonction définie par l'équation différentielle est la même que la fonction définie par les fonctions θ.

La fonction μ.

223. Dans cet ordre d'idées, nous définirons la fonction μ par l'équation

$$\mu(z) = \sqrt{1 - \lambda^2(z)}, \tag{9}$$

à laquelle on joint la condition $\mu(0) = 1$.

Cette fonction pourrait cesser d'être monotrope dans le voisinage des

points où la fonction $\lambda(z)$ devient égale à ± 1 ou infinie. Considérons l'un des premiers points, par exemple le point $\frac{\omega}{2}$; posons $z = \frac{\omega}{2} + z'$; la fonction $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right)$ est paire, puisque $\lambda\left(\frac{\omega}{2} - z'\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right)$; son développement ne contiendra donc que des puissances paires de z', et l'on aura

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right) = 1 + \lambda''\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{z'^2}{1.2} + \dots,$$

$$\sqrt{1 - \lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right)} = z'(a + bz'^2 + \dots),$$

$$\sqrt{1 + \lambda\left(\frac{\omega}{2} + z'\right)} = \sqrt{2} + a'z'^2 + \dots,$$

$$(10) \qquad \mu\left(\frac{\omega}{2} + z'\right) = z'(\mathrm{A} + \mathrm{B}z'^2 + \dots).$$

On en conclut que la fonction $\mu(z)$ reste holomorphe dans le voisinage du point $z = \frac{\omega}{2}$.

Considérons maintenant l'un des seconds points, par exemple le point $\frac{\omega'}{2}$; posons $z = \frac{\omega'}{2} + z'$; nous aurons

$$(11) \qquad \mu\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right) = \sqrt{1 - \lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + z'\right)} = \frac{\pm i\sqrt{1 - k^2\lambda^2(z')}}{k\lambda(z')}.$$

La fonction $\mu(z)$ reste aussi méromorphe dans le voisinage de ce point. On conclut de là que la fonction $\mu(z)$ est méromorphe dans toute l'étendue du plan.

Si la variable z, partant de l'origine, décrit deux lignes opposées, la fonction $\mu(z) = \sqrt{1 - \lambda^2(z)}$ prend des valeurs égales aux points symétriques par rapport à l'origine; ainsi la fonction est paire, et l'on a

$$(12) \qquad \mu(-z) = \mu(z).$$

De la relation (10), on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega}{2} + z'\right) = -\mu\left(\frac{\omega}{2} - z'\right)$$

pour les valeurs de z' inférieures à un certain module; et cette relation est générale; car si la fonction $\dfrac{\mu\left(\frac{\omega}{2}+z'\right)}{\mu\left(\frac{\omega}{2}-z'\right)}$ est constante dans une certaine étendue, elle est constante dans toute l'étendue du plan. On en conclut la relation

$$(13)\qquad \mu(z+\omega) = -\mu(z).$$

De la relation (11), on déduit de même

$$\mu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right) = -\mu\left(\frac{\omega'}{2}-z'\right);$$

d'où l'on conclut

$$(14)\qquad \mu(z+\omega') = -\mu(z).$$

Ainsi la fonction $\mu(z)$ admet les deux périodes 2ω, $\omega+\omega'$. Ses infinis sont ceux de $\lambda(z)$; ses zéros les valeurs $z = \frac{\omega}{2} + m\omega + m'\omega'$, pour lesquelles $\lambda(z) = \pm 1$. Le parallélogramme $(2\omega, \omega+\omega')$, ne contenant que deux infinis, est bien un parallélogramme élémentaire.

La fonction $\mu(z)$, définie par l'équation (9), est la même que la fonction définie par la formule (n° **76**)

$$\mu(z) = \frac{\theta(0)}{\theta_2(0)}\,\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)},$$

puisque ces deux fonctions méromorphes, doublement périodiques, aux mêmes périodes, ont les mêmes zéros et les mêmes infinis, et sont égales à l'unité pour $z = 0$.

La fonction ν.

224. Nous définirons de même la fonction $\nu(z)$ par l'équation

$$(15)\qquad \nu(z) = \sqrt{1 - k^2\lambda^2(z)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $\nu(0) = 1$.

Cette fonction pourrait cesser d'être monotrope dans le voisinage des points où la fonction $\lambda(z)$ devient égale à $\pm\frac{1}{k}$, ou infinie. Considérons l'un des premiers points, par exemple le point $\frac{\omega+\omega'}{2}$; posons $z=\frac{\omega+\omega'}{2}+z'$; la fonction $\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)$ étant paire, son développement en série ne contient que des puissances paires de z', et l'on a

$$\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)=\frac{1}{k}+\lambda''\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\frac{z'^2}{1.2}+\ldots,$$

$$\sqrt{1-k\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)}=z'(a+bz'^2+\ldots),$$

$$\sqrt{1+k\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)}=\sqrt{2}+a'z'^2+\ldots,$$

$$(16)\qquad \nu\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)=z'(\mathrm{A}+\mathrm{B}z'^2+\ldots).$$

On en conclut que la fonction $\nu(z)$ reste holomorphe dans le voisinage du point $\frac{\omega+\omega'}{2}$.

Considérons maintenant l'un des seconds points, par exemple le point $\frac{\omega'}{2}$; posons $z=\frac{\omega'}{2}+z'$, on a

$$(17)\qquad \nu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right)=\sqrt{1-k^2\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right)}=\frac{\pm i\sqrt{1-\lambda^2(z')}}{\lambda(z')},$$

ce qui fait voir que la fonction $\nu(z)$ reste méromorphe dans le voisinage de ce point. Ainsi la fonction $\nu(z)$ est méromorphe dans toute l'étendue du plan.

On verra, par un raisonnement analogue à celui du n° **223**, que la fonction est paire. De la relation (16) on déduit

$$\nu\left(\frac{\omega+\omega'}{2}+z'\right)=-\nu\left(\frac{\omega+\omega'}{2}-z'\right),$$

et, par suite,

$$(18)\qquad \nu(z+\omega+\omega')=-\nu(z).$$

De la relation (17), on déduit de même

$$\nu\left(\frac{\omega'}{2}+z'\right)=-\nu\left(\frac{\omega'}{2}-z'\right)$$

et, par suite,

(19) $$\nu(z+\omega')=-\nu(z).$$

Des deux relations précédentes, on conclut

(20) $$\nu(z+\omega)=\nu(z).$$

Ainsi la fonction $\nu(z)$ admet les deux périodes ω, $2\omega'$. Ses infinis sont ceux de $\lambda(z)$, ses zéros les valeurs $z=\frac{\omega+\omega'}{2}+m\omega+m'\omega'$, pour lesquelles $\lambda(z)=\pm\frac{1}{k}$. Le parallélogramme construit sur les périodes ω, $2\omega'$, ne contenant que deux zéros et deux infinis, est bien un parallélogramme élémentaire.

La fonction $\nu(z)$, définie par l'équation (15), est la même que la fonction définie par la formule (n° 76)

$$\nu(z)=\frac{\theta(0)}{\theta_3(0)}\,\frac{\theta_3(z)}{\theta(z)},$$

puisque ces deux fonctions méromorphes, doublement périodiques, aux mêmes périodes, ont les mêmes zéros et les mêmes infinis, et sont égales à l'unité pour $z=0$.

Relations entre les fonctions elliptiques.

225. Nous pouvons retrouver directement les relations que nous avons obtenues (n° 77) entre les fonctions elliptiques à l'aide de leurs expressions au moyen des fonctions θ.

1° Nous remarquons d'abord que les deux fonctions $\lambda\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$, $\frac{\mu(z)}{\nu(z)}$, ayant les mêmes périodes 2ω, ω', les mêmes zéros et les mêmes infinis, et étant toutes deux égales à l'unité pour $z=0$, sont égales entre

elles; on a donc

$$\lambda\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\mu(z)}{\nu(z)}. \tag{21}$$

2° Les deux fonctions $\nu\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$, $\frac{1}{\nu(z)}$, ayant les mêmes périodes ω, $2\omega'$, les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant; si l'on désigne par k' celle des valeurs du radical $\sqrt{1-k^2}$ qui est égale à $\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$, on a

$$\nu\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{k'}{\nu(z)}. \tag{22}$$

3° Les deux fonctions $\mu\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$, $\frac{\lambda(z)}{\nu(z)}$, ayant les mêmes périodes 2ω, $\omega+\omega'$, les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont aussi dans un rapport constant, et l'on obtient la valeur de ce rapport en faisant $z=\frac{\omega}{2}$; on a ainsi

$$\mu\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=-k'\frac{\lambda(z)}{\nu(z)}. \tag{23}$$

4° La transformation de l'équation différentielle (n° 222) nous a donné la relation

$$\lambda\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{k\lambda(z)}.$$

5° Nous avons trouvé ensuite (formules 11 et 17)

$$\mu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\pm i\nu(z)}{k\lambda(z)},\quad \nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{\pm i\mu(z)}{\lambda(z)};$$

il faut prendre le même signe dans les seconds membres; car l'une de ces relations se déduit de l'autre en remplaçant z par $z+\frac{\omega'}{2}$. Ce signe commun dépend du choix de la seconde période; si l'on changeait le signe de ω', les signes des seconds membres changeraient; car on a

$$\mu\left(z-\frac{\omega'}{2}\right)=-\mu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right),\quad \nu\left(z-\frac{\omega'}{2}\right)=-\nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right).$$

Si l'on choisit, comme nous l'avons supposé, la seconde période de manière que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit positif, la considération des fonctions θ nous montre que les seconds membres sont affectés du signe $-$. On a donc

$$(24)\qquad \mu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{-i}{k}\frac{\nu(z)}{\lambda(z)},\quad \nu\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=-i\frac{\mu(z)}{\lambda(z)}.$$

Des formules précédentes, on déduit

$$(25)\qquad \begin{cases} \lambda\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)=\dfrac{\nu(z)}{k\mu(z)}, \\ \mu\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)=\dfrac{-ik'}{k\mu(z)}, \\ \nu\left(z+\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)=\dfrac{ik'\lambda(z)}{\mu(z)}. \end{cases}$$

226. *Remarque.* — D'après ce que nous avons dit dans les deux numéros précédents, les fonctions $\sqrt{1\mp\lambda(z)}$, $\sqrt{1\mp k\lambda(z)}$ restent monotropes dans le voisinage des valeurs de z pour lesquelles $\lambda(z)$ devient égale à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{k}$; mais elles cessent de l'être quand $\lambda(z)$ devient infinie. Toutefois les produits ou les quotients de ces fonctions deux à deux sont méromorphes pour toutes les valeurs de z. Parmi ces combinaisons, nous avons étudié spécialement celles que nous avons appelées μ et ν; nous ne dirons que quelques mots des autres.

Remarquons d'abord que les fonctions

$$\sqrt{\frac{1-\lambda(z)}{1+\lambda(z)}}=\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda}=\frac{\mu(z)}{1+\lambda(z)},$$
$$\sqrt{\frac{1-k\lambda(z)}{1+k\lambda(z)}}=\frac{\sqrt{1-k^2\lambda^2}}{1+k\lambda}=\frac{\nu(z)}{1+k\lambda(z)}$$

s'expriment rationnellement à l'aide des trois fonctions elliptiques ordinaires; elles admettent les deux périodes 2ω, $2\omega'$; comme elles n'ont que deux zéros dans le parallélogramme $(2\omega, 2\omega')$, ces deux périodes forment bien un système élémentaire.

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{1 - \lambda(z)}{1 - k\lambda(z)}},$$

dont les zéros sont $\frac{\omega}{2} + m\omega + m'\omega'$, et les infinis $\frac{\omega + \omega'}{2} + m\omega + m'\omega'$. D'après l'une des équations du n° 223, on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = -\varphi\left(\frac{\omega}{2} - z\right),$$

et par suite

$$\varphi(z + \omega) = -\varphi(-z).$$

D'après l'une des équations du n° 224, on a aussi

$$\varphi\left(\frac{\omega + \omega'}{2} + z\right) = -\varphi\left(\frac{\omega + \omega'}{2} - z\right),$$

et par suite

$$\varphi(z + \omega + \omega') = -\varphi(-z).$$

On en déduit

$$\varphi(z + \omega + \omega') = \varphi(z + \omega), \quad \text{ou} \quad \varphi(z + \omega') = \varphi(z).$$

Mais d'autre part

$$\varphi(z + 2\omega) = \pm\varphi(z);$$

il faut prendre le signe $-$; car, si l'on prenait le signe $+$, la fonction admettrait les périodes 2ω, ω', et n'aurait qu'un zéro et un infini dans chaque parallélogramme, ce qui est impossible. De la relation

$$\varphi(z + 2\omega) = -\varphi(z),$$

on déduit

$$\varphi(z + 4\omega) = \varphi(z);$$

la fonction admet les deux périodes 4ω, ω'; le parallélogramme construit sur ces périodes ne renfermant que deux zéros et deux infinis est bien un parallélogramme élémentaire.

Réduction du multiplicateur à l'unité.

227. La fonction elliptique $\lambda(z)$ définie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{1}$$

à laquelle on joint les conditions initiales $u = 0$, $\frac{du}{dz} = 1$ pour $z = 0$, dépend des deux constantes g et k, qui sont le multiplicateur et le module. Nous représenterons la fonction par le symbole $\lambda(z, g, k)$, en indiquant ainsi les deux constantes g et k dont elle dépend.

Lorsque le multiplicateur est égal à l'unité, l'équation différentielle devient

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}; \tag{26}$$

la fonction $\lambda(z, 1, k)$ qu'elle définit sera représentée simplement par le symbole $\lambda(z, k)$, en sous-entendant le multiplicateur 1. On peut toujours ramener la fonction elliptique $\lambda(z, g, k)$ à cette fonction elliptique particulière; car, l'équation (1) se mettant sous la forme

$$\frac{du}{d(gz)} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{27}$$

on a

$$\lambda(z, g, k) = \lambda(gz, k).$$

Si l'on appelle 2ω, ω' un couple de périodes de la fonction particulière $\lambda(z, k)$, la fonction $\lambda(z, g, k)$ ou $\lambda(gz, k)$ admettra les périodes $\frac{2\omega}{g}$, $\frac{\omega'}{g}$. On en conclut que le rapport des périodes est indépendant du multiplicateur; c'est ce qui résulte d'ailleurs des formules (3) et (5) du n° 221.

Cas où le module est réel, positif et inférieur à l'unité.

228. Nous supposerons aussi que le multiplicateur g est égal à l'unité. La première période

$$2\omega = 4\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

est réelle et positive. Faisons décrire à u successivement les deux lacets (a) et (c); u croissant de 0 à 1, z croît de 0 à $\frac{\omega}{2}$; u décroissant de 1 à 0, après avoir décrit un petit cercle autour du point critique a, z croît de $\frac{\omega}{2}$ à ω; u variant ensuite de 0 à -1, et le signe du radical ayant changé, z croît de ω à $\frac{3\omega}{2}$; u croissant de -1 à 0, après avoir décrit un petit cercle autour du point critique c, z croît de $\frac{3\omega}{2}$ à 2ω, et ainsi de suite indéfiniment. On en conclut, réciproquement, que la fonction $u = \lambda(z)$ est réelle et comprise entre -1 et $+1$ pour toutes les valeurs réelles de z; elle se comporte comme un sinus; z croissant de 0 à $\frac{\omega}{2}$, u croît de 0 à 1; z croissant de $\frac{\omega}{2}$ à ω, u décroît de 1 à 0; z croissant de ω à 2ω, u devient négative et varie de 0 à -1 et de -1 à 0; puis elle reprend les mêmes valeurs périodiquement.

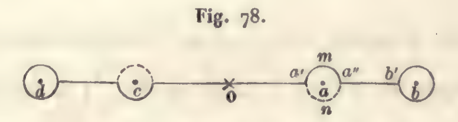
Il en est de même de la fonction $\mu(z) = \sqrt{1-\lambda^2(z)}$. Quand z croît de 0 à $\frac{\omega}{2}$, $\mu(z)$ décroît de 1 à 0; z croissant de $\frac{\omega}{2}$ à ω, la relation $\mu\left(\frac{\omega}{2}+z\right) = -\mu\left(\frac{\omega}{2}-z\right)$ fait voir que $\mu(z)$ devient négative et décroît de 0 à -1; z croissant de ω à 2ω, la relation $\mu(\omega+z) = -\mu(z)$ montre que $\mu(z)$ croît de -1 à 0 et de 0 à $+1$; puis elle reprend les mêmes valeurs périodiquement; elle se comporte comme un cosinus.

Quant à la fonction $\nu(z) = \sqrt{1-k^2\lambda^2(z)}$, la quantité placée sous le radical ne s'annulant pas, elle reste non-seulement réelle, mais encore positive, pour toutes les valeurs réelles de z. Lorsque z croît

de σ à $\frac{\omega}{2}$ et de $\frac{\omega}{2}$ à ω, $\nu(z)$ décroît de 1 à $k' = \sqrt{1-k^2}$, pour croître ensuite de k' à 1 ; puis la fonction reprend périodiquement les mêmes valeurs. Ici le module complémentaire $k' = \nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$ est positif.

229. Occupons-nous maintenant de la seconde période. Dans la formation du lacet (b), nous éviterons le point critique a à l'aide d'un demi-cercle très-petit $a'ma''$ (*fig.* 78), de telle sorte que les lacets (a), (b),

Fig. 78.



(c), (d) se succèdent dans le sens positif. Nous prendrons comme seconde période $\omega' = 2B - 2A$; dans la différence, la partie relative à la droite Oa' disparaît; il ne reste que la partie relative à la droite $a''b'$ parcourue deux fois, et l'on a

$$\omega' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\mu\nu}.$$

Sur ab la quantité ν reste réelle et positive, mais μ devient imaginaire et égale à $\pm i\sqrt{u^2-1}$. Pour choisir le signe, nous poserons

$$u = 1 + re^{\theta i}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \sqrt{(1-u)(1+u)} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta \pm \pi}{2} i} \sqrt{2 + re^{\theta i}}.$$

Quand le point u décrit le demi-cercle $a'ma''$, θ varie de π à 0; μ devant être positive en a' pour $\theta = \pi$, il faut prendre l'exponentielle $e^{\frac{\theta - \pi}{2} i}$: en a'' pour $\theta = 0$, la valeur de μ sera $-ir^{\frac{1}{2}}\sqrt{2+r}$, et, par suite, sur $a''b'$ on aura $-i\sqrt{u^2-1}$.

La valeur de la seconde période est donc

$$(28) \qquad \omega' = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}};$$

c'est une quantité de la forme $\omega'' i$, ω'' étant positive. De cette manière, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega''}{\omega} i$, le coefficient de i est positif, ce qui doit être pour la formation de la fonction Θ. La quantité $q = e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}} = e^{-\frac{\pi\omega''}{\omega}}$, qui entre dans les séries, est réelle, positive et inférieure à l'unité, comme le module. Si l'on avait formé le lacet (b) avec l'autre demi-circonférence $a'na''$, on aurait trouvé pour $2B - 2A$ une quantité égale à la précédente et de signe contraire; il faudrait prendre pour seconde période $\omega' = 2A - 2B$.

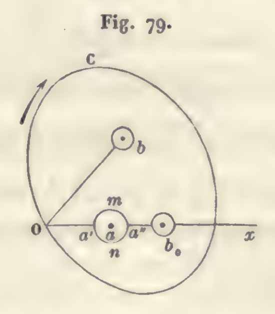
230. Dans le cas actuel, Legendre posait $u = \sin\varphi$, d'où

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \tag{29}$$

en désignant par $\Delta\varphi$ le radical $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$, et il regardait l'angle φ comme l'*amplitude* de la valeur z de l'intégrale définie. Jacobi, qui, avec Abel, a le premier considéré la fonction directe u, a été conduit, d'après cela, à représenter cette fonction par le symbole $\sin\text{am}\, z$, c'est-à-dire $\sin\varphi$ ou sinus amplitude z; il représentait la fonction $\mu(z)$ par $\cos\text{am}\, z$, et la fonction $\nu(z)$ par $\Delta\text{am}\, z$.

231. Nous avons vu comment, lorsque le module k est réel, positif et plus petit que 1, il faut choisir les périodes. Il est facile d'en déduire une règle générale. Considérons un cycle C comprenant les deux points

Fig. 79.



critiques a et b (*fig.* 79); si l'on prend comme première période 2ω le double de l'intégrale relative au lacet (a), on pourra prendre comme

seconde période ω' l'intégrale relative au cycle C parcouru dans le sens négatif. En effet, les deux intégrales ω et ω' sont des fonctions continues de k, tant que le point b, qui correspond à $\frac{1}{k}$, reste à l'intérieur de la courbe C; le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = r + si$ variant d'une manière continue avec k et restant imaginaire, le coefficient s, qui ne s'annule pas, conserve le même signe; or, lorsque le point b vient en b_0 sur l'axe Ox au delà du point a, si l'on forme le lacet (b_0) avec le demi-cercle $a'ma''$, le cycle C, décrit dans le sens négatif, peut être remplacé par la suite des lacets $(b) + (a)$. L'intégrale correspondante est $\omega' = 2B - 2A$, et nous avons vu que le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ a son coefficient s positif; d'après cela, quelle que soit la valeur du module k, le coefficient s sera positif; mais le cycle négatif C équivaut à la suite des lacets $(b) + (a)$ ou $(a) + (b)$, suivant que l'argument de $\frac{1}{k}$ est compris entre 0 inclusivement et π exclusivement, ou entre π inclusivement et 2π exclusivement : la seconde période est donc $2B - 2A$ dans le premier cas, $2A - 2B$ dans le second cas.

Périodes elliptiques.

232. Connaissant le module k et le multiplicateur g, nous avons déterminé par des intégrales définies (n° 221) deux périodes élémentaires 2ω, ω' de la fonction $\lambda(z)$, telles que l'on ait $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$, $\lambda\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}$, et que, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de i soit positif (n° 231). Nous avons appelé module complémentaire k' (n° 77) celle des valeurs du radical $\pm\sqrt{1 - k^2}$ qui est égale à $\nu\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Un système de périodes $2\omega_1$, ω'_1, équivalent au point de vue de la division du plan par un réseau (n° 144), est représenté par les formules

$$2\omega_1 = 2a\omega + b\omega', \quad \omega'_1 = 2a'\omega + b'\omega',$$

dans lesquelles a, b, a', b' désignent des nombres entiers satisfaisant à la condition $ab' - ba' = \pm 1$. Parmi ces systèmes, considérons ceux

qui jouissent des propriétés précédentes, c'est-à-dire qui soient tels, que l'on ait $\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 1$, $\lambda\left(\frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}\right) = \frac{1}{k}$, $\nu\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = k'$, et que, dans le rapport $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$, le coefficient de i soit positif. Pour que l'on ait $\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 1$, il faut que les deux nombres entiers a et b soient de la forme $a = 4a_1 + 1$, $b = 4b_1$. Pour que l'on ait $\lambda\left(\frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}\right) = \frac{1}{k}$, il faut que les deux nombres a' et b' soient de la forme $a' = 2a'_1$, $b' = 2b'_1 + 1$. Pour que l'on ait $\nu\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = k'$, il faut, en outre, que $b_1 = 2b_2$. Enfin, pour que dans le rapport $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ le coefficient de i soit positif, il est nécessaire que le déterminant $ab' - ba'$ soit égal à $+1$; d'où l'on déduit $b'_1 = 2b'_2$. Les formules précédentes deviennent ainsi

$$(30) \qquad \omega_1 = (4a_1 + 1)\omega + 4b_2\omega', \quad \omega'_1 = 4a'_1\omega + (4b'_2 + 1)\omega',$$

avec la condition $(4a_1 + 1)(4b'_2 + 1) - 16a'_1 b_2 = 1$. Nous donnerons aux périodes $2\omega_1$, ω'_1, définies de cette manière, le nom de *périodes elliptiques*. En vertu des raisonnements des n°s 223 et 224, il est clair que la fonction $\mu(z)$ admet les périodes élémentaires $2\omega_1$, $\omega_1 + \omega'_1$, et la fonction $\nu(z)$ les périodes élémentaires ω_1, $2\omega'_1$; ce que l'on peut d'ailleurs vérifier directement.

Les relations établies entre les fonctions elliptiques (n° 225) subsistent sans modifications, quand on y remplace ω et ω' par ω_1 et ω'_1; car on a

$$\lambda\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \lambda\left(z + \frac{\omega}{2}\right), \quad \mu\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \mu\left(z + \frac{\omega}{2}\right), \quad \nu\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \nu\left(z + \frac{\omega}{2}\right),$$
$$\lambda\left(z + \frac{\omega'_1}{2}\right) = \lambda\left(z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu\left(z + \frac{\omega'_1}{2}\right) = \mu\left(z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu\left(z + \frac{\omega'_1}{2}\right) = \nu\left(z + \frac{\omega'}{2}\right).$$

Remarquons aussi que, dans les deux groupes de fonctions θ, formées avec ω et ω', ou avec ω_1 et ω'_1, les fonctions homologues ont les mêmes zéros (n° 170).

Au lieu de déterminer les périodes 2ω, ω' par des intégrales définies, comme nous l'avons dit, on peut se servir des formules du n° 205. On

conçoit que, au moyen de l'équation (29), dans laquelle on regarde q comme l'inconnue, on puisse calculer cette inconnue et, par conséquent, trouver le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$; l'équation (31) donnera ensuite ω, et l'on connaîtra ω et ω'. L'équation (29), dont on élève les deux membres au carré, admet une infinité de solutions; car à des valeurs données de g et de k correspondent une infinité de couples de périodes elliptiques : toutes les valeurs correspondantes de q satisfont à cette équation.

Modules égaux et de signes contraires.

233. Le module k n'entrant qu'au carré dans l'équation différentielle, si l'on remplace k par $-k$, l'équation différentielle reste la même, et, par conséquent, la fonction λ définie par cette équation ne change pas; il en est de même des fonctions μ et ν; mais les périodes elliptiques changent. Il est évident d'abord que la première période $2\omega = 4A$ conserve la même valeur; quant à la seconde période, en appliquant la règle établie au n° **231**, on obtient, d'une part,

$$\omega' = \pm(2B - 2A),$$

d'autre part,

$$\omega'_1 = \mp(-2B - 2A) = \pm 2\omega + \omega';$$

en vertu des formules (30), on peut prendre, dans tous les cas,

$$\omega'_1 = 2\omega + \omega'.$$

Plus généralement, si l'on désigne par 2ω, ω' l'un quelconque des systèmes de périodes elliptiques relatives aux constantes g et k, les périodes équivalentes $2\omega_1 = 2\omega$, $\omega'_1 = 2\omega + \omega'$ forment un système de périodes elliptiques relatives aux constantes g et $-k$; car on a

$$\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega_1 + \omega'_1}{2}\right) = -\frac{1}{k}, \quad \nu\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = k',$$

et, en outre, le déterminant est égal à $+1$.

La formule (a) du n° **73** montre que, quand on remplace ω et ω' par ω et $2\omega + \omega'$, la fonction $\Theta(z)$ reste la même; les formules (5)

du n° **74** font voir ensuite que les fonctions $\theta_3(z)$, $\theta(z)$ ne changent pas, et que les deux autres $\theta_2(z)$, $\theta_1(z)$ deviennent $i\theta_2(z)$, $i\theta_1(z)$. Dans les formules (18) du n° **76**, on remplacera $\sqrt{k}$ par $i\sqrt{k}$.

Modules réciproques.

234. Si, dans l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{1}$$

qui, avec la condition initiale $u=0$, définit la fonction elliptique $\lambda(z, g, k)$, on remplace u par $\frac{u'}{k}$, on obtient l'équation

$$\frac{du'}{dz} = gk\sqrt{(1-u'^2)\left(1-\frac{1}{k^2}u'^2\right)}, \tag{31}$$

avec la condition initiale $u'=0$ pour $z=0$; mais cette dernière équation définit la fonction elliptique $\lambda\left(z, gk, \frac{1}{k}\right)$. On a donc la relation

$$\lambda\left(z, gk, \frac{1}{k}\right) = k\lambda(z, g, k), \tag{32}$$

d'où l'on déduit

$$\mu\left(z, gk, \frac{1}{k}\right) = \nu(z, g, k), \quad \nu\left(z, gk, \frac{1}{k}\right) = \mu(z, g, k). \tag{33}$$

En vertu de la relation (32), les deux fonctions $\lambda(z, g, k)$, $\lambda\left(z, gk, \frac{1}{k}\right)$ admettent les mêmes périodes. Si 2ω, ω' sont des périodes elliptiques de la première, les périodes équivalentes $2\omega_1 = 2\omega - 2\omega'$, $\omega'_1 = \omega'$ formeront un couple de périodes elliptiques de la seconde; car on a

$$\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}, gk, \frac{1}{k}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega_1+\omega'_1}{2}, gk, \frac{1}{k}\right) = k,$$

et, en outre, le déterminant est égal à 1. Le module complémentaire

de la nouvelle fonction sera

$$k'_1 = \nu\left(\frac{\omega_1}{2}, gk, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k}.$$

En réduisant les multiplicateurs à l'unité, on mettra les relations précédentes sous la forme plus simple

$$(34)\quad \lambda\left(z, \frac{1}{k}\right) = k\lambda\left(\frac{z}{k}, k\right),\quad \mu\left(z, \frac{1}{k}\right) = \nu\left(\frac{z}{k}, k\right),\quad \nu\left(z, \frac{1}{k}\right) = \mu\left(\frac{z}{k}, k\right).$$

Elles ramènent le cas où le module k est réel, positif et plus grand que 1 à celui où il est plus petit que 1.

On peut opérer cette transformation par le changement des périodes. Considérons les fonctions θ et ϑ formées avec les deux constantes $\omega_1 = \omega - \omega'$, $\omega'_1 = \omega'$, mises à la place de ω et ω'; comme on a

$$p_1 = e^{-\frac{\pi\omega_1 i}{\omega'_1}} = pe^{\pi i} = -p,$$

nous désignerons les fonctions anciennes par $\theta(z, p)$, $\vartheta(z, p)$, et les nouvelles par $\theta(z, -p)$, $\vartheta(z, -p)$. La constante ω' ne changeant pas, les formules (6) du n° 171 donnent immédiatement

$$(35)\qquad \frac{\vartheta_3(z, -p)}{\vartheta_2(z, p)} = \frac{\vartheta_2(z, -p)}{\vartheta_3(z, p)} = \frac{\vartheta(z, -p)}{\sqrt{i}\,\vartheta(z, p)} = \frac{\vartheta_1(z, -p)}{\sqrt{i}\,\vartheta_1(z, p)} = 1,$$

$\sqrt{i}$ étant égale à $e^{\frac{\pi i}{4}}$. Des relations (13) du n° 172, en tenant compte de la valeur du coefficient C (n° 205), on déduit ensuite

$$(36)\quad \frac{\theta_3(z, -p)}{\theta_2(z, p)} = \frac{\theta_2(z, -p)}{\theta_3(z, p)} = \frac{\theta(z, -p)}{\sqrt{i}\,\theta(z, p)} = \frac{\theta_1(z, -p)}{\sqrt{i}\,\theta_1(z, p)} = \sqrt{\frac{\omega - \omega'}{\omega}}\, e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega(\omega - \omega')}}.$$

Les formules (15) et (17) du n° 173 déterminent le nouveau module et le nouveau multiplicateur

$$\sqrt{k_1} = \frac{1}{\sqrt{k}},\quad \sqrt{k'_1} = \frac{\sqrt{ik'}}{k},\quad g_1 = gk;$$

à l'aide des formules (14) de ce même numéro, on retrouve les relations (32) et (33).

Modules complémentaires.

235. Nous avons vu (n° 159) que la fonction $\nu\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(37)\qquad \frac{d\nu}{dz}=igk'\sqrt{(1-\nu^2)\left(1-\frac{1}{k'^2}\nu^2\right)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $\nu=0$ pour $z=0$, le radical ayant la valeur initiale $+1$; mais cette équation définit la fonction $\lambda\left(z, igk', \frac{1}{k'}\right)$, qui, d'après la relation (20), est égale à $k'\lambda(z, ig, k')$; on a donc

$$\nu\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}, g, k\right)=k'\lambda(z, ig, k');$$

d'où l'on déduit

$$(38)\qquad \begin{cases} \lambda(z, ig, k')=i\dfrac{\lambda(z, g, k)}{\mu(z, g, k)}, \\ \mu(z, ig, k')=\dfrac{1}{\mu(z, g, k)}, \\ \nu(z, ig, k')=\dfrac{\nu(z, g, k)}{\mu(z, g, k)}. \end{cases}$$

Si 2ω, ω' désignent des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z, g, k)$, la fonction $\lambda(z, ig, k')$ admettra les périodes élémentaires ω, $2\omega'$; les périodes équivalentes $2\omega_1=-2\omega'$, $\omega'_1=\omega$ formeront un couple de périodes elliptiques de cette nouvelle fonction; car on a

$$\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}, ig, k'\right)=\frac{1}{k'}\nu\left(\frac{\omega}{2}, g, k\right)=1, \quad \lambda\left(\frac{\omega_1+\omega'_1}{2}, ig, k'\right)=\frac{1}{k'},$$
$$\nu\left(\frac{\omega_1}{2}, ig, k'\right)=k,$$

et d'ailleurs le déterminant est égal à $+1$. En réduisant les multipli-

cateurs à l'unité, on écrira les relations précédentes sous la forme

$$(39)\quad \lambda(iz,k) = i\frac{\lambda(z,k')}{\mu(z,k')},\quad \mu(iz,k) = \frac{1}{\mu(z,k')},\quad \nu(iz,k) = \frac{\nu(z,k')}{\mu(z,k')}.$$

Elles permettent de trouver les valeurs des fonctions elliptiques, lorsque le module k est réel, positif et inférieur à l'unité, et que la variable est imaginaire et de la forme yi, y étant réelle. Les fonctions $\mu(yi)$, $\nu(yi)$ sont réelles et plus grandes que 1, la fonction $\lambda(yi)$ est imaginaire et de la forme $\mathrm{Y}i$, Y étant réelle et pouvant prendre toutes les valeurs possibles. Les fonctions $\lambda(yi)$, $\mu(yi)$ sont analogues au sinus et au cosinus hyperboliques.

236. Si 2ω, ω' sont des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$, la fonction $\lambda(z,i,k')$ ou $\lambda(iz,k')$, admettant les périodes elliptiques $-2\omega'$, ω, la fonction $\lambda(z,k')$ admettra les périodes elliptiques $-2\omega' i$, ωi. Désignons par $\theta(z,k)$, $\vartheta(z,k)$ les fonctions composées avec les deux constantes ω, ω' relatives au module k, et par $\theta(z,k')$, $\vartheta(z,k')$ les fonctions composées de la même manière avec les deux constantes $\omega_1 = -\omega' i$, $\omega'_1 = \omega i$, relatives au module complémentaire k'. Comme on a $q_1 = p$, $p_1 = q$, la comparaison des formules (8) du n° 74 et (6) du n° 171 donne immédiatement les relations

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
&\theta_3(iz,k) = \vartheta_3(z,k'), && \vartheta_3(iz,k) = \theta_3(z,k');\\
&\theta\,(iz,k) = \vartheta_2(z,k'), && \vartheta_2(iz,k) = \theta\,(z,k');\\
&\theta_2(iz,k) = \vartheta\,(z,k'), && \vartheta\,(iz,k) = \theta_2(z,k');\\
&\theta_1(iz,k) = \vartheta_1(z,k'), && \vartheta_1(iz,k) = -\theta_1(z,k').
\end{aligned}\right.$$

Le nouveau module et le nouveau multiplicateur sont déterminés par les formules

$$\sqrt{k_1} = \sqrt{k'},\quad \sqrt{k'_1} = \sqrt{k},\quad g_1 = ig,$$

et l'on retrouve ainsi les relations (39).

Lorsque le module k est réel, positif et plus petit que 1, si l'on adopte les périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z,k)$, telles que ω soit réelle et positive, et ω' de la forme $\omega'' i$, ω'' étant réelle et positive, les nouvelles constantes $\omega_1 = -\omega' i$, $\omega'_1 = \omega i$, relatives au module com-

plémentaire k', jouissent des mêmes propriétés. Quand z est réelle, toutes les fonctions θ et ϑ sont réelles, excepté ϑ_1, qui est imaginaire et de la forme Ai, A étant réelle; quand z est imaginaire et de la forme yi, y étant réelle, elles sont encore réelles, excepté θ_1, qui est imaginaire et de la forme Ai. Dans ces deux cas, les formules (8) du n° 74 et (6) du n° 171 renferment, soit des sinus et des cosinus ordinaires, soit des sinus et des cosinus hyperboliques.

Autre transformation.

237. Nous avons vu (n° 159) que la fonction $\mu\left(z+\frac{\omega}{2}\right)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(41) \qquad \frac{d\mu}{dz} = -gk'\sqrt{(1-\mu^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\mu^2\right)},$$

à laquelle on joint la condition $\mu = 0$; mais cette équation définit la fonction elliptique $\lambda\left(z, -gk', \frac{ik}{k'}\right)$; on a donc

$$\mu\left(z+\frac{\omega}{2}, g, k\right) = -\lambda\left(z, gk', \frac{ik}{k'}\right);$$

d'où l'on déduit

$$(42) \qquad \begin{cases} \lambda\left(z, gk', \dfrac{ik}{k'}\right) = k'\dfrac{\lambda(z, g, k)}{\nu(z, g, k)}, \\ \mu\left(z, gk', \dfrac{ik}{k'}\right) = \dfrac{\mu(z, g, k)}{\nu(z, g, k)}, \\ \nu\left(z, gk', \dfrac{ik}{k'}\right) = \dfrac{1}{\nu(z, g, k)}. \end{cases}$$

Si 2ω, ω' sont des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z, g, k)$, la fonction $\lambda\left(z, gk', \frac{ik}{k'}\right)$ admettra les deux périodes élémentaires $2\omega_1 = 2\omega$, $\omega'_1 = \omega + \omega'$, qui seront aussi périodes elliptiques de cette dernière

fonction; car on a

$$\lambda\left(\frac{\omega_1}{2}, gk', \frac{ik}{k'}\right) = 1, \quad \lambda\left(\frac{\omega_1+\omega'_1}{2}, gk', \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\frac{ik}{k'}}.$$

Le nouveau module complémentaire est

$$k'_1 = \nu\left(\frac{\omega_1}{2}, gk', \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{k'}.$$

En réduisant les multiplicateurs à l'unité, on mettra les relations précédentes sous la forme

$$(43)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{ik}{k'}\right) = k' \dfrac{\lambda\left(\frac{z}{k'}, k\right)}{\nu\left(\frac{z}{k'}, k\right)}, \\ \mu\left(z, \frac{ik}{k'}\right) = \dfrac{\mu\left(\frac{z}{k'}, k\right)}{\nu\left(\frac{z}{k'}, k\right)}, \\ \nu\left(z, \frac{ik}{k'}\right) = \dfrac{1}{\nu\left(\frac{z}{k'}, k\right)}. \end{cases}$$

Elles ramènent le cas où le carré du module est réel et négatif à celui où il est réel et positif.

On peut aussi opérer cette transformation par le changement des périodes. Considérons les fonctions θ et ϑ formées avec les deux constantes $\omega_1 = \omega$, $\omega'_1 = \omega + \omega'$, mises à la place de ω et ω'; comme on a

$$q_1 = e^{\frac{\pi\omega'_1 i}{\omega_1}} = qe^{\pi i} = -q,$$

nous désignerons les fonctions anciennes par $\theta(z, q)$, $\vartheta(z, q)$, et les nouvelles par $\theta(z, -q)$, $\vartheta(z, -q)$. La constante ω ne changeant pas, les formules (8) du n° 74 donnent immédiatement

$$(44)\quad \frac{\theta_3(z, -q)}{\theta(z, q)} = \frac{\theta(z, -q)}{\theta_3(z, q)} = \frac{\theta_2(z, -q)}{\sqrt{i}\,\theta_2(z, q)} = \frac{\theta_1(z, -q)}{\sqrt{i}\,\theta_1(z, q)} = 1.$$

Des relations (13) du n° 172, on déduit ensuite

$$(45)\quad \frac{\vartheta_3(z,-q)}{\vartheta(z,q)}=\frac{\vartheta(z,-q)}{\vartheta_3(z,q)}=\frac{\vartheta_2(z,-q)}{\sqrt{i}\,\vartheta_2(z,q)}=\frac{\vartheta_1(z,-q)}{\sqrt{i}\,\vartheta_1(z,q)}=\sqrt{\frac{\omega+\omega'}{\omega'}}\,e^{-\frac{\pi z^2 i}{\omega'(\omega+\omega')}}.$$

Le nouveau module et le nouveau multiplicateur sont déterminés par les formules (17) du n° 76 et (24) du n° 159,

$$\sqrt{k_1}=\sqrt{\frac{ik}{k'}},\quad \sqrt{k'_1}=\frac{1}{\sqrt{k'}},\quad g_1=gk',$$

et l'on retrouve ainsi les relations (43). Cette dernière transformation pourrait d'ailleurs être effectuée au moyen des deux précédentes.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION PAR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

238. Les exemples d'équations différentielles que nous avons considérées jusqu'à présent appartiennent tous à une même catégorie d'équations différentielles, celles qui ne contiennent pas la variable z et qui sont algébriques entre la fonction u et sa dérivée $\frac{du}{dz}$. Désignons par U la dérivée $\frac{du}{dz}$, et soit

$$F(u, U) = 0 \tag{1}$$

l'équation proposée, dont le premier membre est un polynôme entier en u et U, du degré m par rapport à U et irréductible. On donne pour $z = z_0$ la valeur initiale u_0 de la fonction u et la valeur U_0 de la dérivée, U_0 étant une racine simple de l'équation $F(u_0, U) = 0$ et différente de zéro. En vertu du théorème général sur l'intégration (n° 208), tant que la fonction algébrique U de u reste fonction holomorphe de u, la fonction intégrale u reste elle-même fonction holomorphe de z; mais cette fonction intégrale cesse, en général, d'être holomorphe par rapport à z, lorsqu'elle arrive dans le voisinage d'une valeur u, pour laquelle la fonction algébrique U devient infinie ou acquiert des valeurs multiples.

La fonction inverse est donnée par l'intégrale définie

$$z - z_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{U} du , \tag{2}$$

$\frac{1}{U}$ étant une fonction algébrique de u; elle est de l'espèce de celles que nous avons étudiées dans le Chapitre IV du Livre III. Nous avons vu

qu'à chaque valeur de u, finie ou infinie, correspondent m valeurs de z, augmentées de multiples quelconques de certaines périodes. Lorsqu'il n'y a pas de période, ou lorsque toutes les périodes sont nulles, z et u sont liées par une équation algébrique du degré m par rapport à z, et par rapport à u d'un degré que l'on sait déterminer (n° 136); mais, quand il y a des périodes, et c'est ce qui a lieu ordinairement, si la fonction intégrale u cesse d'être monotrope, lorsqu'elle arrive dans le voisinage d'une valeur u, qui est un pôle ou un point critique de la fonction algébrique U, comme à cette valeur de u correspondent une infinité de valeurs de z, il y aura, dans le plan sur lequel est figurée la variable z, une infinité de points critiques pour la fonction u, et il pourra arriver qu'elle acquière une infinité de valeurs différentes.

239. Il est aisé de reconnaître que, dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire pour toutes les valeurs finies de z, la fonction intégrale u n'admet que des points singuliers algébriques, savoir : des pôles ou des points critiques algébriques. Supposons, en effet, que, z allant de z_0 à z_1 par un certain chemin, u aille de u_0 à une valeur finie u_1, qui soit un point critique de la branche correspondante de la fonction algébrique $\frac{1}{U}$; si l'on pose $z = z_1 + z'$, $u = u_1 + u'$, cette branche de la fonction algébrique se développera en une série convergente de la forme (n° 96)

$$\frac{1}{U} = b_0 + b_1 u'^{\frac{1}{p}} + b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots; \tag{3}$$

l'intégration donne

$$z' = u'\left(b_0 + \frac{p}{p+1} b_1 u'^{\frac{1}{p}} + \frac{p}{p+2} b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right); \tag{4}$$

on en déduit

$$u' = z'\left(a_0 + a_1 z'^{\frac{1}{p}} + a_2 z'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right). \tag{5}$$

Ainsi la fonction u acquiert p valeurs différentes, qui se permutent circulairement, quand la variable z tourne autour du point z_1, et, par conséquent, ce point est un point critique algébrique de la fonction u.

Lorsque la branche correspondante de la fonction algébrique $\frac{1}{U}$ devient infinie, son développement est de la forme

$$(6)\qquad \frac{1}{U} = u'^{\frac{-q}{p}}\left(b_0 + b_1 u'^{\frac{1}{p}} + b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right).$$

Puisque la variable z conserve une valeur finie z_1, la racine infinie $\frac{1}{U}$ est d'un degré $\frac{q}{p}$ plus petit que un. Posons $p' = p - q$; on en déduit, par l'intégration,

$$(7)\qquad z' = u'^{\frac{p'}{p}}\left(\frac{p}{p'} b_0 + \frac{p}{p'+1} b_1 u'^{\frac{1}{p}} + \frac{p}{p'+2} b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right),$$

et, par suite,

$$(8)\qquad u' = z'^{\frac{p}{p'}}\left(a_0 + a_1 z'^{\frac{1}{p'}} + a_2 z'^{\frac{2}{p'}} + \ldots\right).$$

Le point z_1 est encore un point critique algébrique de la fonction u, à moins que l'on ait $p' = 1$; dans ce cas, ce serait un point ordinaire.

Supposons maintenant que, la variable z allant de z_0 à z_1, la fonction u devienne infinie; on posera

$$u = \frac{1}{v}, \quad V = \frac{dv}{dz} = -v^2 U;$$

l'équation proposée (1) se change en une équation algébrique entre v et V, du degré m par rapport à V, et l'intégrale définie devient

$$(9)\qquad z' = z - z_1 = \int_0^v \frac{1}{V}\, dv.$$

Le raisonnement précédent s'applique à la fonction v; on en conclut que le point z_1 est un point ordinaire ou un point critique algébrique de cette fonction, et, par conséquent, un pôle ou un point critique algébrique de la fonction u.

240. Nous nous occuperons spécialement, dans ce qui suit, du cas où la fonction intégrale u est monotrope. Cherchons d'abord à quels

caractères on reconnaîtra, sur l'équation différentielle, que la fonction intégrale jouit de cette propriété. La fonction n'ayant alors, dans toute l'étendue du plan, pas d'autres points singuliers que des pôles, sera méromorphe; mais nous savons (n° 86) que la dérivée d'une fonction méromorphe ne devient infinie que lorsque la fonction est elle-même infinie; il en résulte que, si l'on ordonne l'équation proposée par rapport aux puissances décroissantes de la dérivée, le coefficient du premier terme doit être constant; l'équation sera donc de la forme

$$(10)\qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

les coefficients $f_1(u), f_2(u), \ldots$ étant des polynômes entiers en u. Si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, cette équation devient

$$(11)\quad \left(\frac{dv}{dz}\right)^m - v^2 f_1\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-1} + v^4 f_2\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dv}{dz}\right)^{m-2} + \ldots \pm v^{2m} f_m\left(\frac{1}{v}\right) = 0;$$

la fonction v étant méromorphe comme la fonction u, l'équation transformée doit aussi avoir ses coefficients entiers; il en résulte que les polynômes $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)$ doivent être, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré, ..., le dernier du degré $2m$.

Supposons que, la variable z allant de z_0 à z_1 par un chemin convenable, la fonction u acquière une valeur u_1, pour laquelle la fonction algébrique U devient égale à une racine multiple différente de zéro; la fonction $\frac{1}{U}$, conservant une valeur finie, est représentée par la série (3), et la fonction u' par la série (5); pour que la fonction u reste monotrope dans le voisinage du point z_1, il est nécessaire et il suffit que l'on ait $p = 1$, et, par conséquent, que la fonction algébrique U reste monotrope par rapport à u; il faut, pour cela, que les systèmes circulaires qui composent la racine multiple soient formés chacun d'une seule racine. On verra, en suivant la méthode que nous avons indiquée pour l'étude des fonctions algébriques (n°s 34 et 35), si cette condition est remplie.

241. Supposons maintenant que, la variable z allant de z_0 à z_1, la fonction u acquière une valeur u_1, pour laquelle la fonction algébrique U devient nulle; la variable z restant finie, cette racine U est d'un degré inférieur à l'unité, et, par conséquent, elle appartient à un système circulaire de p racines; la fonction $\frac{1}{U}$, qui devient infinie, est représentée par la série (6), et la fonction u' par la série (8); pour que la fonction intégrale u reste monotrope dans le voisinage du point z_1, il est nécessaire et il suffit que $p' = 1$, c'est-à-dire que la racine nulle U soit du degré $1 - \frac{1}{p}$.

Il est aisé de reconnaître, *a priori*, que cette condition est nécessaire; car, si la fonction u est monotrope dans le voisinage du point z_1, elle se développe en une série de la forme

$$(12) \qquad u' = a_0 z'^p + a_1 z'^{p+1} + \ldots;$$

sa dérivée

$$(13) \qquad U = p a_0 z'^{p-1} + (p+1) a_1 z'^p + \ldots$$

s'annulant pour $z' = 0$, le nombre entier p est plus grand que un. De la série (12), on déduit

$$(14) \qquad z' = b_0 u'^{\frac{1}{p}} + b_1 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots,$$

et, en portant dans la série (13),

$$(15) \qquad U = u'^{\frac{p-1}{p}} \left(A_0 + A_1 u'^{\frac{1}{p}} + A_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots \right);$$

la racine infiniment petite U appartient donc à un système circulaire de p racines, et elle est du degré $1 - \frac{1}{p}$.

Il reste à examiner ce qui se passe lorsque la fonction u devient infinie pour une valeur finie z_1 de z. Nous nous servirons, pour cela, de l'équation transformée (11). Si, pour $v = 0$, les racines différentes de zéro sont monotropes par rapport à v, et si chacune des racines

égales à zéro et d'un degré plus petit que l'unité est du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient, on en conclura, comme précédemment, que v est une fonction monotrope de z dans le voisinage du point z_1. On arrive ainsi au théorème suivant :

Théorème I. — *Pour qu'une équation différentielle algébrique et irréductible, entre u et* $\frac{du}{dz}$,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

ne contenant pas la variable z, admette une intégrale monotrope, il est nécessaire et il suffit: 1° *que les coefficients* $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)$ *soient des polynômes entiers et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré,..., le dernier du degré* $2m$; 2° *que chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, reste holomorphe par rapport à u*; 3° *que chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité soit du degré* $1-\frac{1}{p}$, *p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient;* 4° *enfin que l'équation différentielle, que l'on déduit de la proposée en posant* $u=\frac{1}{v}$, *présente pour* $v=0$ *les mêmes caractères.*

242. La considération de l'intégrale définie (2) nous apprend que u est une fonction algébrique de z, ou une fonction périodique. Il résulte de ce que nous avons dit au n° **143** qu'une fonction monotrope ne peut admettre plus de deux périodes distinctes; le nombre des périodes sera donc zéro, un ou deux. La fonction intégrale est, dans le premier cas, une fonction rationnelle; dans le second cas, une fonction simplement périodique; dans le troisième cas, une fonction doublement périodique. Dans le Chapitre IV du Livre III, nous avons indiqué une méthode pour la réduction du nombre des cycles; ceci nous donne une limite supérieure du nombre des périodes; mais on ne peut pas en conclure d'une manière certaine le nombre des périodes distinctes. Il peut arriver, par exemple, que l'intégrale définie relative à l'un de ces

cycles soit nulle, et alors la période correspondante est nulle. Il importe donc de trouver des caractères auxquels on pourra reconnaître, sur l'équation différentielle elle-même, à laquelle des trois classes appartient la fonction intégrale. Pour voir si la fonction intégrale est monotrope, nous n'avons pas eu à nous occuper des racines nulles d'un degré égal ou supérieur à l'unité; c'est la considération de ces racines qui nous permettra de distinguer l'espèce de la fonction intégrale.

Examinons d'abord le cas où l'équation (10), pour toutes les valeurs de u qui annulent $f_m(u)$, et l'équation (11) pour $v=0$, n'admettent aucune racine nulle d'un degré égal ou supérieur à un. Dans ce cas, l'intégrale définie (2) conserve une valeur finie (n° 111). Imaginons que l'on représente la variation de u par le mouvement d'un point sur une sphère, et celle de z par celui d'un point sur un plan; après avoir marqué sur la sphère les points critiques de la fonction algébrique U et formé un système de lacets fondamentaux ayant pour origine le point initial u_0, concevons que la variable u parte du point u_0, U ayant une valeur déterminée U_0, et aille en un point quelconque de la sphère par un arc de grand cercle, précédé des combinaisons des lacets fondamentaux qui font acquérir à U les m valeurs qu'elle peut avoir au point u_0. Afin de distinguer ces chemins, nous regarderons chaque point de la sphère comme l'assemblage de m points caractérisés par les m valeurs de U; à chaque point (u, U) de la sphère correspond un point z du plan, et à la sphère entière une portion finie du plan. Prenons un point M′ en dehors de cette partie du plan; dans l'intégration directe, quand la variable z arrive en M′ par un chemin quelconque, la fonction monotrope u acquiert en ce point une valeur déterminée u_1, et sa dérivée U une valeur aussi déterminée U_1. Soit M le point situé dans la partie finie du plan et qui correspond au point (u_1, U_1) de la sphère; quand la variable z décrit dans le plan une ligne quelconque allant du point M au point M′, par exemple la droite MM′, la variable u décrit sur la sphère un cycle fournissant la période MM′; si l'on ajoute cette période à chacune des valeurs de z obtenues précédemment, la portion finie du plan se reproduira à côté une première fois, puis une seconde fois, et ainsi de suite; mais cette opération ne donne pas tout le plan. Prenons un point M″ en dehors, et soit M le point homologue situé dans la partie finie du plan; nous obtiendrons de la même manière

une seconde période MM″. On conclut de là que la fonction u de z est doublement périodique; l'ordre de la fonction doublement périodique est marqué par le degré m de l'équation proposée (10) par rapport à $\frac{du}{dz}$ (n° 181).

243. Supposons maintenant que, pour une valeur finie u_1 de u, l'équation (10) admette une racine nulle U_1 d'un degré égal ou supérieur à l'unité; toutes les valeurs de z qui correspondent au point (u_1, U_1) de la sphère seront infinies. Il est impossible, d'après cela, que la fonction monotrope u soit doublement périodique; car, si cela était, il y aurait dans chacun des parallélogrammes du réseau construit avec les périodes un point z_1 correspondant au point (u_1, U_1) de la sphère (n° 181). On arrive à la même conclusion lorsque l'équation (11) admet pour $v = 0$ une racine nulle d'un degré égal ou supérieur à un. Ainsi, dans ce cas, la fonction intégrale est rationnelle ou simplement périodique.

Voici comment on peut distinguer ces deux cas. Lorsque pour une valeur finie u_1 de u l'équation (10) admet une racine nulle d'un degré $1 + \frac{p'}{p}$ supérieur à l'unité, et appartenant à un système circulaire de p racines, la branche correspondante de la fonction $\frac{1}{U}$ devient infinie, et est représentée par la série

$$\frac{1}{U} = u'^{-\frac{p+p'}{p}}\left(b_0 + b_1 u'^{\frac{1}{p}} + b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right);$$

on en déduit, par l'intégration,

$$z = -\frac{p}{p'} b_0 u'^{-\frac{p'}{p}} - \frac{p}{p'-1} b_1 u'^{-\frac{p'-1}{p}} - \ldots + b_{p'} \log u' + C + p b_{p'+1} u'^{\frac{1}{p}} + \ldots.$$

Remarquons d'abord que le coefficient $b_{p'}$ est nécessairement nul; car, si l'on pose $u' = u''^{p}$, $z = \frac{1}{z'^{p'}}$, l'équation précédente devient

$$u''^{p'} = z'^{p'}\left(-\frac{p}{p'} b_0 - \frac{p}{p'-1} b_1 u'' - \ldots + p b_{p'} u''^{p'} \log u'' + C u''^{p'} + \ldots\right),$$

et, en faisant $u'' = vz'$,

$$v^{p'} = -\frac{p}{p'} b_0 - \frac{p}{p'-1} b_1 v z' - \ldots + p b_{p'} v^{p'} z'^{p'} (\log z' + \log v) + C v^{p'} z'^{p'} + \ldots ;$$

si l'on pose ensuite $v_0 = \left(-\frac{p}{p'} b_0\right)^{\frac{1}{p'}}$, $v = v_0 + v'$, on arrive à une équation de la forme

$$(16) \qquad Z_0 + Z_1 v' + Z_2 v'^2 + \ldots = 0,$$

où $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ désignent des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de z', et dont les p' premières renferment en outre chacune un terme tel que $A z'^{p'} \log z'$, qui s'annule pour $z' = 0$. Concevons que la variable z' soit comprise dans un cercle décrit du point $z' = 0$ comme centre avec un rayon très-petit ρ, cercle dans lequel on a pratiqué une coupure suivant un rayon; une valeur du logarithme étant adoptée en un point, la fonction $z'^{p'} \log z'$ aura une valeur déterminée et très-petite en chaque point. Nous pouvons répéter ici le raisonnement du n° 28; la première série Z_0 s'annulant pour $z' = 0$, et la seconde Z_1 contenant un terme $p' v_0^{p'-1}$ indépendant de z', on en conclut que l'équation (16) admet une racine très-petite v'. Si l'on adoptait une autre détermination du logarithme, les coefficients de l'équation ayant d'autres valeurs, l'équation admettrait une autre racine très-petite, et ainsi de suite. Il en résulte qu'à chaque valeur de z' correspondraient une infinité de valeurs de v', ce qui est impossible, puisque la fonction intégrale u est monotrope.

Le coefficient $b_{p'}$ étant nul, l'équation (16) définit une fonction v' monotrope par rapport à z'; puisque la fonction u est monotrope par rapport à z, on a en outre $p' = 1$. La fonction u, différant très-peu d'une quantité constante u_1 pour toutes les valeurs de z' inférieures à un certain module et, par conséquent, pour toutes les valeurs de z supérieures à un certain module, est rationnelle; car, pour $z = \infty$, les fonctions périodiques sont indéterminées. On arrive à la même conclusion lorsque, pour $v = 0$, l'équation (11) admet une racine nulle d'un degré supérieur à l'unité.

244. Il est aisé de voir, *a priori*, que ces conditions sont nécessaires,

pour que la fonction intégrale soit rationnelle. Considérons d'abord une fraction rationnelle dont le numérateur soit d'un degré égal ou inférieur à celui du dénominateur. Quand z augmente indéfiniment, u tend vers une valeur finie u_1; si l'on pose $z = \frac{1}{z'}$, $u = u_1 + u'$, la fonction u', étant holomorphe dans le voisinage de $z' = 0$, se développe en une série entière

$$(17) \qquad u' = a_0 z'^p + a_1 z'^{p+1} + \ldots,$$

et convergente pour toutes les valeurs de z' inférieures à un certain module. On en déduit

$$(18) \qquad z' = b_0 u'^{\frac{1}{p}} + b_1 u'^{\frac{2}{p}} + b_2 u'^{\frac{3}{p}} + \ldots,$$

les nouveaux coefficients étant liés aux premiers par les relations

$$(19) \qquad a_0 b_0^p = 1, \quad a_1 b_0^2 + p a_0 b_1 = 0, \ldots.$$

En différentiant la série (17), on a

$$\mathrm{U} = -z'^2 \frac{du'}{dz'} = -p a_0 z'^{p+1} - (p+1) a_1 z'^{p+} \ldots;$$

si l'on remplace z' par sa valeur donnée par la série (18), il vient

$$(20) \qquad \mathrm{U} = u'^{\frac{p+1}{p}} \left(\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_2 u'^{\frac{2}{p}} + \mathrm{A}_3 u'^{\frac{3}{p}} + \ldots\right),$$

et par suite

$$(21) \qquad \frac{1}{\mathrm{U}} = u'^{-\frac{p+1}{p}} \left(\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_2 u'^{\frac{2}{p}} + \mathrm{B}_3 u'^{\frac{3}{p}} + \ldots\right).$$

A cause des relations (19), le coefficient du second terme dans la série (20), et par suite celui du terme en $\frac{1}{u'}$ dans la série (21), sont nuls. La racine infiniment petite U appartient donc à un système circulaire de p racines, et elle est du degré $1 + \frac{1}{p}$; en outre, dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{U}}$, le terme en $\frac{1}{u'}$ manque.

Lorsque le numérateur de la fraction rationnelle est d'un degré plus élevé que le dénominateur, u devient infinie avec z; mais v s'annule, et la racine infiniment petite V jouit des mêmes propriétés.

Il est impossible que l'équation proposée, lorsqu'elle est irréductible, et sa transformée pour $v = 0$, présentent deux racines nulles d'un degré plus grand que un; car, lorsqu'il y a une racine de cette sorte, la fonction u est rationnelle, et, par conséquent, diffère très-peu d'une quantité déterminée pour les valeurs très-grandes de z.

245. Supposons maintenant que, pour $u = u_1$, l'équation proposée admette une racine du degré un et appartenant à un système circulaire de p racines. Si l'on pose $u = u_1 + u'$, la branche correspondante de la fonction $\frac{1}{U}$ sera représentée par

$$(22) \qquad \frac{1}{U} = u'^{-1}\left(b_0 + b_1 u'^{\frac{1}{p}} + b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots\right),$$

d'où

$$z = b_0 \log u' + C + p b_1 u'^{\frac{1}{p}} + \frac{p}{2} b_2 u'^{\frac{2}{p}} + \ldots$$

L'intégrale définie a ici la période polaire $\omega = 2pb_0\pi i$; on en conclut que la fonction u est simplement périodique.

En posant $u' = u''^p$, $t = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, on déduit de l'équation précédente

$$(23) \qquad t = u''(a_0 + a_1 u'' + a_2 u''^2 + \ldots);$$

le point $u = u_1$ est donc un point critique algébrique, ou un point ordinaire si $p = 1$, de la fonction t de u.

Supposons que, pour $u = u_2$, l'équation admette une autre racine du degré un; si l'on pose $u = u_2 + u'$, la branche correspondante de la fonction $\frac{1}{U}$ sera représentée par une série de la forme (22); on en déduit pour z une expression de la forme (23); si la période polaire est égale à la précédente et de signe contraire, il en résulte pour t une expression telle que

$$(24) \qquad \frac{1}{t} = u''(a'_0 + a'_1 u'' + a'_2 a''^2 + \ldots);$$

le point $u = u_2$ est un point critique algébrique ou un point ordinaire de la fonction $\frac{1}{t}$, et, par conséquent, un point critique algébrique ou un pôle de la fonction t. Ainsi la fonction t de u n'a, sur toute la sphère, que des points singuliers algébriques; d'ailleurs, à une valeur de u correspond un nombre fini de valeurs de t; on en conclut, d'après le théorème du n° 135, que les deux quantités t et u sont liées par une équation algébrique. Puisqu'à chaque valeur de t ne correspond qu'une valeur de u, cette équation est du premier degré par rapport à u, et, par conséquent, u est égale à une fraction rationnelle de t.

Remarquons actuellement qu'une fraction rationnelle de t prend des valeurs déterminées u_1 et u_2 pour $t = 0$ et $t = \infty$; en posant $u = u_1 + u'$, ou $u = u_2 + u'$, on obtient pour $\frac{dz}{du}$ des expressions de la forme (22). Il en résulte que, si l'équation proposée, ou sa transformée pour $v = 0$, admet une racine nulle du degré un, elles en admettent une autre, et ces deux racines fournissent, dans l'intégrale définie, des périodes égales et de signes contraires. Il peut arriver que ces deux racines nulles correspondent à une même valeur de u.

De ce qui précède, on conclut :

Théorème II. — *Les conditions qui rendent la fonction intégrale monotrope étant remplies : 1° la fonction intégrale est doublement périodique, lorsque l'équation proposée pour aucune valeur finie de u, ou la transformée pour $v = 0$, n'admet de racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité; 2° elle est rationnelle, lorsque l'équation proposée pour une valeur finie de u, ou la transformée pour $v = 0$, admet une racine nulle d'un degré plus grand que un; 3° elle est simplement périodique, lorsque l'équation proposée pour une valeur finie de u, ou la transformée pour $v = 0$, admet une racine nulle du degré un.*

Quand on a reconnu la nature de la fonction intégrale, on peut se proposer de la déterminer au moyen des éléments connus. Si elle est rationnelle, elle sera égale au quotient de deux polynômes entiers. Si elle est simplement périodique, elle sera égale à une fraction rationnelle de l'exponentielle $t = e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$. Enfin, si elle est doublement périodique, on l'exprimera rationnellement à l'aide de la fonction elliptique $\lambda(z)$, aux mêmes périodes, et de sa dérivée (n° 161).

Équations différentielles binômes.

246. Appliquons les principes que nous venons d'établir à l'étude de l'équation binôme

$$(25)\qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^m = \mathrm{F}(u) = \mathrm{G}(u-a)^n(u-b)^{n'}\ldots,$$

dans laquelle $\mathrm{F}(u)$ désigne un polynôme entier en u du degré $2m$ au plus. Par une transformation du premier degré, on peut toujours ramener le cas où le degré du polynôme est plus petit que $2m$ à celui où il est égal à $2m$; il suffit pour cela de poser $u = u_0 + \frac{1}{v}$, u_0 étant une quantité arbitraire qui n'annule pas $\mathrm{F}(u)$; nous supposerons donc que le polynôme est du degré $2m$, ce qui revient à dire que, sur la sphère, le point $u = \infty$ est un point ordinaire pour la fonction $\frac{1}{\mathrm{V}}$ (n° 239). L'équation proposée se met sous la forme

$$(26)\qquad \frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{q}{p}}(u-b)^{\frac{q'}{p'}}\ldots;$$

nous supposons chaque exposant réduit à sa plus simple expression; leur somme est égale à deux. Pour que la fonction intégrale soit monotrope, il est nécessaire et il suffit que les exposants inférieurs à l'unité soient de la forme $1 - \frac{1}{p}$ (n° 241); chacun de ces exposants sera égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction intégrale est doublement périodique si tous les exposants sont inférieurs à l'unité, rationnelle s'il y en a un supérieur à l'unité, simplement périodique s'il y en a un égal à l'unité.

Le second membre de l'équation (26) peut être formé d'un seul facteur affecté de l'exposant 2 ou $1 + \frac{1}{1}$; dans ce cas, l'intégrale est rationnelle. S'il renferme un premier facteur affecté d'un exposant plus grand que 1, mais plus petit que 2, il est formé de deux facteurs; le second

exposant étant de la forme $1-\frac{1}{p}$, le premier est $1+\frac{1}{p}$, et l'intégrale est rationnelle. On a ainsi les deux équations différentielles

$$(27)\qquad \frac{du}{dz}=g(u-a)^2,\quad \frac{du}{dz}=g(u-a)^{\frac{m+1}{m}}(u-b)^{\frac{m-1}{m}},$$

qui admettent des intégrales rationnelles.

Il peut y avoir deux exposants égaux à 1, ou un exposant égal à 1 et deux autres égaux chacun à $\frac{1}{2}$; les deux équations différentielles

$$(28)\qquad \frac{du}{dz}=g(u-a)(u-b),\quad \frac{du}{dz}=g(u-a)\sqrt{(u-b)(u-c)}$$

admettent des intégrales simplement périodiques. La seconde, mise sous forme entière, a deux racines nulles du degré un pour la même valeur $u=a$.

Considérons maintenant le cas où tous les exposants sont inférieurs à l'unité et de la forme $1-\frac{1}{p}$; dans ce cas, la fonction intégrale est doublement périodique. Il y aura au moins trois facteurs, puisque la somme des exposants est égale à deux; il ne peut pas y en avoir plus de quatre, puisque chacun des exposants est égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$. S'il y a quatre facteurs, les quatre exposants sont égaux à $\frac{1}{2}$, et l'on a l'équation différentielle

$$(29)\qquad \frac{du}{dz}=g\sqrt{(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)}.$$

S'il y a trois facteurs, la somme des trois exposants $1-\frac{1}{p}$, $1-\frac{1}{p'}$, $1-\frac{1}{p''}$ étant égale à deux, les trois nombres entiers p, p', p'' doivent satisfaire à la relation

$$(30)\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}=1.$$

Supposons ces trois nombres rangés par ordre de grandeur croissante. Nous remarquons d'abord que le plus petit p ne peut être plus grand que 3; on ne pourra donc lui attribuer que les deux valeurs 3 et 2. Soit $p=3$; la relation (30) devient

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}=\frac{2}{3};$$

il faudra faire aussi $p'=p''=3$; on obtient ainsi l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)^{\frac{2}{3}}(u-b)^{\frac{2}{3}}(u-c)^{\frac{2}{3}}. \tag{31}$$

Soit maintenant $p=2$; la relation (30) devient $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}=\frac{1}{2}$; le nombre p' ne peut être plus grand que 4; comme il est d'ailleurs plus grand que 2, on ne pourra lui atribuer que les deux valeurs 4 et 3. Si $p'=4$, on a $p''=4$, ce qui donne l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz}=g(u-a)^{\frac{1}{2}}(u-b)^{\frac{3}{4}}(u-c)^{\frac{3}{4}}. \tag{32}$$

Si $p'=3$, on a $p''=6$, et l'on obtient l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)=g(u-a)^{\frac{1}{2}}(u-b)^{\frac{2}{3}}(u-c)^{\frac{5}{6}}. \tag{33}$$

247. Ainsi, outre les quatre équations (27) et (28) que l'on sait intégrer, et dont les intégrales sont rationnelles ou simplement périodiques, il existe quatre autres équations, (29), (31), (32) et (33), dont les intégrales sont des fonctions doublement périodiques. Ces équations présentent les quatre types suivants :

$$\text{(I)} \qquad U^2=G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$
$$\text{(II)} \qquad U^3=G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2,$$
$$\text{(III)} \qquad U^4=G(u-a)^2(u-b)^3(u-c)^3,$$
$$\text{(IV)} \qquad U^6=G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5.$$

Les fonctions intégrales sont respectivement du second, du troisième, du quatrième et du sixième ordre.

La fonction algébrique U de u, définie par l'équation (I) du second degré, admet sur la sphère quatre points critiques a, b, c, d, autour de chacun desquels se permutent les deux racines. La fonction algébrique définie par l'équation (II) du troisième degré admet trois points critiques a, b, c, autour de chacun desquels se permutent les trois racines. La fonction algébrique définie par l'équation (III) du quatrième degré a aussi trois points critiques a, b, c; les quatre racines se permutent circulairement autour de chacun des deux derniers; autour du point a, les quatre racines se divisent en deux systèmes circulaires, comprenant chacun deux racines. L'équation (IV), qui est du sixième degré, présente également trois points critiques; les six racines forment autour du point a trois systèmes circulaires de deux racines, autour du point b deux systèmes circulaires de trois, et enfin autour du point c un seul système de six. Nous dirons qu'un point critique a autour duquel se permute un système circulaire de p racines est de l'ordre p, et nous le désignerons par le symbole $a^{(p)}$; nous regarderons le point a, dans l'équation (IV), comme la réunion de trois points critiques du second ordre, et le point b comme la réunion de deux points critiques du troisième ordre. De cette manière, la distribution des points critiques, pour les quatre équations précédentes, sera figurée par

$$\begin{array}{rrrl} a^{(2)}, & b^{(2)}, & c^{(2)}, & d^{(2)}, \\ a^{(3)}, & b^{(3)}, & c^{(3)}; & \\ 2a^{(2)}, & b^{(4)}, & c^{(4)}, & \\ 3a^{(2)}, & 2b^{(3)}, & c^{(6)}. & \end{array}$$

Nous avons vu (n° **111**) que le nombre des périodes de l'intégrale définie est au plus $\Sigma(p-1) - 2(m-1)$; en appliquant cette règle aux cas actuels, on trouve effectivement que le nombre des périodes ne surpasse pas deux.

Si l'on fait coïncider l'un des points critiques avec le point O' de la sphère, à l'aide d'une transformation du premier degré, telle que $u = a + \frac{1}{v}$, on déduit des quatre types principaux les sept formes

dérivées

$$U^2 = G(u-a)(u-b)(u-c), \tag{34}$$

$$U^3 = G(u-a)^2(u-b)^2, \tag{35}$$

$$\left\{\begin{array}{l} U^4 = G(u-a)^2(u-b)^3, \\ U^4 = G(u-b)^3(u-c)^3, \end{array}\right. \tag{36}$$

$$\left\{\begin{array}{l} U^6 = G(u-a)^3(u-b)^4, \\ U^6 = G(u-a)^3(u-c)^5, \\ U^6 = G(u-b)^4(u-c)^5. \end{array}\right. \tag{37}$$

248. Proposons-nous maintenant d'intégrer ces équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques. L'équation (III) et ses deux formes dérivées (36) rentrant les unes dans les autres, il suffit de considérer la première des équations (36),

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{1}{2}}(u-b)^{\frac{3}{4}};$$

en posant $u = b + v^4$, on ramène celle-ci à l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{g}{2}\sqrt{v(b-a+v^4)},$$

qui est de la forme (34), dérivée du premier type. De même, l'équation (IV) et ses trois formes dérivées (37) rentrant les unes dans les autres, il suffit de considérer la première des équations (37),

$$\frac{du}{dz} = g(u-a)^{\frac{1}{2}}(u-b)^{\frac{2}{3}};$$

en posant $u = b + v^3$, on la ramène à l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{g}{3}\sqrt{b-a+v^3},$$

qui est aussi de la forme (34). L'équation (II) se ramène à sa forme dérivée (35); pour intégrer cette dernière, nous poserons

$$U = \frac{(u-a)(u-b)}{v},$$

d'où

$$(38)\qquad (u-a)(u-b) = Gv^3, \quad U = Gv^2,$$

et, par suite,

$$(39)\qquad u = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + Gv^3}.$$

On déduit de l'équation (38), par la différentiation,

$$3Gv^2\frac{dv}{dz} = 2\left(u - \frac{a+b}{2}\right)U = 2Gv^2\left(u - \frac{a+b}{2}\right),$$

d'où

$$(40)\qquad \frac{dv}{dz} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + Gv^3}.$$

Cette dernière équation est aussi de la forme (34), et définit une fonction doublement périodique du second ordre. La fonction u, qui est du troisième ordre, est donnée par l'équation (39), qui se réduit à

$$(41)\qquad u = \frac{a+b}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv}{dz}.$$

Nous avons ainsi ramené à l'équation (34) les quatre types d'équations différentielles binômes et leurs sept formes dérivées; nous avons vu (n° 219) comment on ramène l'équation (34) à la forme particulière qui convient à la fonction elliptique $\lambda(z)$.

Équations du troisième degré.

249. Proposons-nous de rechercher, parmi les équations différentielles du troisième degré, celles qui admettent des intégrales monotropes et doublement périodiques. Nous avons vu (n° 181) que le coefficient de la première puissance de U doit être nul; ces équations rentrent donc dans la forme trinôme

$$(42)\qquad U^m + f_1(u)U^{m-1} + f_m(u) = 0.$$

Nous pouvons supposer que les polynômes entiers f_1 et f_m sont, le premier du second degré, le second du degré $2m$, et que pour $v=0$ l'équation transformée n'a que des racines simples. Considérons d'abord les racines nulles d'un degré inférieur à l'unité. Soit $(u-a)^n$ un facteur du dernier terme donnant une racine de cette sorte; posons $u=a+u'$. Si la quantité $f_1(a)$ est différente de zéro, le premier groupe dans l'équation est formé des deux termes

$$f_1(a)U^{m-1}+f_m^{(n)}(a)\frac{u'^n}{1.2\ldots n};$$

il y a $m-1$ racines infiniment petites du degré $\frac{n}{m-1}$; il faut que ce degré soit de la forme $1-\frac{1}{p}$, d'où l'on déduit

$$n=\frac{(p-1)(m-1)}{p}; \tag{43}$$

le nombre entier p, plus grand que 1, doit être un diviseur de $m-1$. Si l'on a $f_1(a)=0$, le premier groupe est formé des deux termes

$$U^m+f_m^{(n)}(a)\frac{u'^n}{1.2\ldots n};$$

les m racines sont infiniment petites et du degré $\frac{n}{m}$; il faut que ce degré soit aussi de la forme $1-\frac{1}{p}$, d'où

$$n=\frac{(p-1)m}{p}; \tag{44}$$

le nombre entier p doit être un diviseur de m.

Considérons maintenant les racines multiples différentes de zéro. Elles satisfont à l'équation

$$mU^{m-1}+(m-1)f_1U^{m-2}=mU^{m-1}\left(U+\frac{m-1}{m}f_1\right)=0.$$

Posons

$$(45)\qquad U_1 = -\frac{m-1}{m} f_1,\quad U = U_1 + U',$$

$$(46)\qquad \varphi(u) = f_m + (-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} f_1\ ;$$

l'équation proposée devient

$$(47)\qquad \varphi(u) - \frac{m-1}{2} f_1 U_1^{m-3} U'^2 - \ldots - (m-2) f_1 U'^{m-1} + U'^m = 0.$$

Soit u_1 une valeur de u qui annule φ sans annuler f_1 et par suite f_m; désignons par q le degré du facteur binôme $u - u_1$ dans le polynôme φ; si l'on pose $u = u_1 + u'$, le premier groupe dans l'équation est formé des deux termes

$$\varphi^{(q)}(u_1)\frac{u'^q}{1.2\ldots q} + (-1)^{m-2}\frac{(m-1)^{m-2}}{2m^{m-3}}[f_1(u_1)]^{m-2}U'^2;$$

il faut que les deux racines infiniment petites U' restent monotropes; pour cela, il est nécessaire et il suffit que l'exposant q soit pair; il en résulte que, si dans $\varphi(u)$ on met à part les facteurs binômes qui entrent dans f_1, le polynôme restant doit être carré parfait. Quand toutes ces conditions sont remplies, la fonction intégrale est monotrope; s'il n'y a pas de racine nulle d'un degré égal ou supérieur à l'unité, la fonction est en outre doublement périodique.

250. Appliquons ces considérations à l'équation du troisième degré

$$(48)\qquad U^3 + f_1(u)U^2 + f_3(u) = 0.$$

Les exposants de la première espèce sont égaux à 1, ceux de la seconde espèce à 2; le polynôme f_3 est donc formé, soit de six facteurs simples, soit d'un facteur double et de quatre simples, soit de deux facteurs doubles et de deux simples; il ne peut y avoir plus de deux exposants de la seconde espèce, puisque le polynôme f_1 est du second degré. On

a ainsi les trois équations

$$(49)\quad U^3+A(u-a)(u-b)U^2+C(u-a')(u-b')(u-c')(u-d')(u-e')(u-f')=0,$$

$$(50)\quad U^3+A(u-a)(u-a)U^2+C(u-a)^2(u-b')(u-c')(u-d')(u-e')=0,$$

$$(51)\quad U^3+A(u-a)(u-b)U^2+C(u-a)^2(u-b)^2(u-c')(u-d')=0.$$

Dans le premier cas, les polynômes f_1 et f_3 n'ont pas de racine commune; le polynôme du sixième degré

$$\varphi(u)=f_3+\frac{2^2}{3^3}f_1^3$$

doit être le carré d'un polynôme P_3 du troisième degré, ce qui exige trois équations de condition entre les dix coefficients de f_1 et f_3; il en reste donc sept arbitraires, de sorte qu'on peut regarder f_1 et P_3 comme des polynômes quelconques du second et du troisième degré, et l'équation se met sous la forme

$$(\text{V})\qquad U^3+f_1U^2+P_3^2-\frac{2^2}{3^3}f_1^3=0.$$

Dans le second cas, les deux parties qui composent le polynôme φ admettent le facteur commun $(u-a)^2$; le second facteur, qui est du quatrième degré, doit être le carré d'un polynôme P_2 du second degré, ce qui exige deux équations de condition entre les huit coefficients de f_1 et f_3; il en reste six arbitraires, de sorte qu'on peut regarder f_1 et P_2 comme deux polynômes quelconques du second degré; le polynôme φ est encore le carré d'un polynôme $(u-a)P_2$ du troisième degré. Il en est de même dans le troisième cas : les deux parties du polynôme φ renferment le facteur commun $(u-a)^2(u-b)^2$; le second facteur, qui est du second degré, doit être le carré d'un polynôme P_1 du premier degré, ce qui exige une équation de condition entre les six coefficients de f_1 et f_3; il en reste cinq arbitraires, de sorte qu'on peut regarder f_1 et P_1 comme deux polynômes quelconques du second et du premier degré; le polynôme φ est encore le carré d'un polynôme $(u-a)(u-b)P_1$ du troisième degré. Ainsi les trois cas rentrent dans le type général (V). Dans le premier cas, les deux polynômes f_1 et P_3 sont premiers entre eux; dans le second cas, ils admettent un diviseur

commun $u - a$ du premier degré; dans le troisième cas, un diviseur commun $(u - a)(u - b)$ du second degré non-carré parfait.

251. Pour intégrer l'équation (V), nous la ramènerons d'abord à la forme

$$U'^3 - f_1 U'^2 + P_3^2 = 0, \tag{52}$$

en posant $U = -\frac{2}{3}f_1 + U'$ (nº 249). Concevons le polynôme P_3 du troisième degré décomposé en un produit de deux facteurs, l'un $u - \alpha$ du premier degré, l'autre P_2 du second degré, et posons $U' = P_2 v$; l'équation précédente devient

$$v^2(P_2 v - f_1) + (u - \alpha)^2 = 0. \tag{53}$$

La quantité $v = \frac{U'}{P_2}$, étant le quotient de deux fonctions monotropes doublement périodiques, aux mêmes périodes, est elle-même une fonction monotrope doublement périodique; comme elle est liée à la fonction u par une équation algébrique du troisième degré en v et du second degré en u, on conclut, d'après le théorème du nº 177, qu'elle est du second ordre. La détermination de la fonction u du troisième ordre est ainsi ramenée à celle d'une fonction v du second ordre.

Le calcul n'offre aucune difficulté; si l'on désigne par $F(u)$ le premier membre de l'équation (53), et si l'on différentie, on a

$$3v\left(P_2 v - \frac{2}{3}f_1\right)\frac{dv}{dz} + F'(u)\frac{du}{dz} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{du}{dz}$ ou U par sa valeur $P_2 v - \frac{2}{3}f_1$,

$$3v\frac{dv}{dz} + F'(u) = 0. \tag{54}$$

La fonction $F'(u)$ étant du premier degré, on déduira de cette dernière équation l'expression rationnelle de u au moyen de v et de sa dérivée (nº 161). Il suffit maintenant d'éliminer u entre les équations

(53) et (54). Tout polynôme du deuxième degré

$$F(u) = Lu^2 + 2Mu + N$$

satisfaisant à la relation

$$[F'(u)]^2 = 4LF(u) + 4(M^2 - LN),$$

l'équation (53) donne

$$[F'(u)]^2 = 4(M^2 - LN). \tag{55}$$

Soient

$$f_1 = Au^2 + 2A_1u + A_2, \quad P_2 = Bu^2 + 2B_1u + B_2;$$

on a

$$L = Bv^3 - Av^2 + 1, \quad M = B_1v^3 - A_1v^2 - \alpha, \quad N = B_2v^3 - A_2v^2 + \alpha^2,$$
$$M^2 - LN = v^2[v^2(B_1v - A_1)^2 - v^2(Bv - A)(B_2v - A_2)$$
$$- 2\alpha(B_1v - A_1) - \alpha^2(Bv - A) - (B_2v - A_2)],$$

et l'on arrive à l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{2}{3}\sqrt{v^2(B_1v - A_1)^2 - 2\alpha(B_1v - A_1) - \alpha^2(Bv - A) - (B_2v - A_2)(Bv^3 - Av^2 + 1)}, \tag{56}$$

dont l'intégrale est effectivement une fonction doublement périodique du second ordre.

La quantité α, dont on se sert dans ce calcul, est l'une des racines de l'équation du troisième degré $P_3 = 0$; dans le second et le troisième cas, on prendra $\alpha = a$.

252. Nous avons trouvé toutes les équations du troisième degré qui admettent des intégrales monotropes et doublement périodiques; il existe aussi des équations du troisième degré, de la forme (48), admettant des intégrales monotropes simplement périodiques ou rationnelles. Cherchons d'abord celles dont les intégrales sont simplement périodiques. Supposons que le polynôme f_3 contienne un facteur double $(u - a_1)^2$ n'entrant pas dans f_1; dans le voisinage de a_1, l'équation admet deux racines infiniment petites du degré un et monotropes par rapport à u;

si donc l'intégrale est monotrope, elle sera simplement périodique (n° 245). On obtient ainsi les trois équations

$$(57)\quad U^3+A(u-a)(u-b)U^2+C(u-a_1)^2(u-a')(u-b')(u-c')(u-d')=0,$$

$$(58)\quad U^3+A(u-a)(u-b)U^2+C(u-a_1)^2(u-a)^2(u-b')(u-c')=0,$$

$$(59)\quad U^3+A(u-a)(u-b)U^2+C(u-a_1)^2(u-a)^2(u-b)^2=0,$$

qui rentrent dans un même type

$$(\text{VI})\qquad U^3+f_1U^2+(u-a_1)^2Q_4=0,$$

Q_4 désignant un polynôme du quatrième degré, et f_1 n'étant pas divisible par $u-a_1$. Pour que l'intégrale soit monotrope, il faudra, comme précédemment, que le polynôme φ soit le carré d'un polynôme P_3 du troisième degré, ce qui exige trois équations de condition entre les neuf constantes que renferme l'équation (VI); il en restera donc six arbitraires, et, par conséquent, il existera une relation entre les sept coefficients des polynômes f_1 et P_3 qui entrent dans l'équation (52). Puisque l'intégrale est simplement périodique, cette relation signifie que le polynôme du quatrième degré, placé sous le radical dans l'équation (56), admet un facteur double.

Pour le vérifier aisément, nous réduirons l'équation (VI) à la forme dérivée

$$(60)\qquad U^3+f_1U^2+Q_4=0,$$

qui ne renferme plus que huit constantes; il n'en restera donc que cinq arbitraires, savoir : les trois coefficients de f_1 et deux de P_3. A cause de l'égalité

$$(u-\alpha)^2(Bu^2+2B_1u+B_2)^2=\frac{2^2}{3^3}(Au^2+2A_1u+A_2)^3+Q_4,$$

on a

$$(61)\qquad B^2=\frac{2^2}{3^3}A^3,\quad B(2B_1-B\alpha)=\frac{2^2}{3^2}A^2A_1;$$

les cinq arbitraires sont A, A_1, A_2, B_2, α. Si l'on pose, pour simplifier,

$$A=3h^2,\quad \text{d'où}\quad B=2h^3,\quad B_1=A_1h+\alpha h^3,$$

le polynôme du quatrième degré en v contient le facteur $(hv - 1)^2$, et l'équation (56) se réduit à

$$(62) \quad \frac{dv}{dz} = \frac{2}{3}(hv - 1)\sqrt{[(A_1 + \alpha h^2)v + \alpha h]^2 + 2\alpha(A_1 + \alpha h^2) - (B_2 v - A_2)(2hv + 1)}.$$

Si le polynôme f_3 contenait un facteur triple $(u - a_1)^3$ entrant dans f_1, l'équation admettrait trois racines infiniment petites du degré un; mais alors, les deux parties du polynôme φ renfermant le facteur commun $(u - a_1)^3$, le second facteur, qui est du troisième degré, ne serait pas carré parfait.

253. Supposons maintenant que le polynôme f_3 contienne un facteur triple $(u - a_1)^3$ n'entrant pas dans f_1; l'équation admettra un système circulaire de deux racines infiniment petites du degré $\frac{3}{2}$; si l'intégrale est monotrope, elle sera rationnelle (n° 243). On obtient ainsi les deux équations

$$(63) \quad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a_1)^3(u-a')(u-b')(u-c') = 0,$$

$$(64) \quad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a_1)^3(u-a)^2(u-b') = 0,$$

qui rentrent dans un même type

$$(\text{VII}) \qquad U^3 + f_1 U^2 + (u-a_1)^3 Q_3 = 0,$$

Q_3 étant un polynôme du troisième degré, et f_1 n'étant pas divisible par $u - a_1$. Pour que l'intégrale soit monotrope, il faut que le polynôme φ soit le carré d'un polynôme P_3 du troisième degré, ce qui exige toujours trois conditions entre les huit constantes que renferme l'équation (VII); il en restera donc cinq arbitraires, et, par conséquent, il existera deux relations entre les sept constantes des polynômes f_1 et P_3. Puisque l'intégrale est rationnelle, ces deux relations signifient que le polynôme du quatrième degré, placé sous le radical dans l'équation (56), admet un facteur triple.

Pour le vérifier, nous réduirons l'équation (VII) à la forme dérivée

$$(65) \qquad U^3 + f_1 U^2 + Q_3 = 0,$$

qui ne renferme plus que sept constantes; il n'en restera que quatre arbitraires, savoir : les trois coefficients de f_1 et un de P_3. A cause de l'égalité

$$(u-\alpha)^2(Bu^2+2B_1u+B_2)^2=\frac{2^2}{3^3}(Au^2+2A_1u+A_2)^3+Q_3,$$

il faut aux deux relations (61) du numéro précédent ajouter la troisième relation

$$(66)\qquad B^2\alpha^2+4B_1^2-8BB_1\alpha+2BB_2=\frac{2^2}{3^2}A(AA_2+4A_1^2),$$

d'où l'on déduit

$$B_2=A_2h+2A_1\alpha h+\frac{1}{3}\frac{A_1^2}{h}+2\alpha^2h^3;$$

les quatre arbitraires sont h, A_1, A_2, α, et l'équation (62) devient

$$(67)\qquad \frac{dv}{dz}=\frac{2}{3}(hv-1)\sqrt{(hv-1)\left[\frac{A_1^2}{3h}v-2A_1\alpha(hv+1)-3\alpha^2h^2(hv+1)-A_2(2hv+1)\right]}.$$

L'intégrale est aussi rationnelle, lorsque le polynôme f_3 contient un facteur quadruple $(u-a_1)^4$ et que le polynôme f_1 est égal à $A(u-a_1)^2$; on a ainsi l'équation

$$(68)\qquad U^3+A(u-a_1)^2U^2+C(u-a_1)^4(u-a')(u-b')=0,$$

qui, dans le voisinage du point a_1, admet un système circulaire de trois racines infiniment petites du degré $\frac{4}{3}$. L'expression de φ est ici

$$\varphi=(u-a_1)^4\left[C(u-a')(u-b')+\frac{2^2}{3^3}A^3(u-a_1)^2\right];$$

il faut que le polynôme du second degré placé entre parenthèses soit le carré d'un polynôme P_1 du premier degré; l'équation, dont le type est

$$(\text{VIII})\qquad U^3+A(u-a_1)^2U^2+(u-a_1)^4\left[P_1^2-\frac{2^2}{3^3}A^3(u-a_1)^2\right]=0,$$

renferme quatre constantes arbitraires. L'équation (52) devient

$$(69)\qquad U'^3 - A(u-a_1)^2U'^2 + (u-a_1)^4P_1^2 = 0.$$

Pour l'intégrer, on posera $U' = (u-a_1)P_1 v$, d'où

$$(70)\qquad P_1 v^3 - A(u-a_1)v^2 + (u-a_1) = 0;$$

cette relation étant du premier degré par rapport à u, on en conclut que v est une fraction rationnelle du premier degré; et en effet, si l'on pose $P_1 = Bu + B_1$, on arrive à l'équation différentielle du premier degré par rapport à $\frac{dv}{dz}$

$$(71)\qquad 3\frac{dv}{dz} = (Ba_1 + B_1)v^2,$$

dont l'intégrale est

$$v = -\frac{3}{Ba_1 + B_1}\frac{1}{z}.$$

Le polynôme, placé sous le radical dans l'équation (56), devient ici une puissance quatrième parfaite.

254. *Remarque.* — Nous avons épuisé toutes les combinaisons qui admettent des intégrales monotropes, si l'équation est irréductible. Les autres équations du troisième degré de la forme (48), qui satisfont aux conditions de la monotropie, sont décomposables. Il résulte en effet, de ce que nous avons dit dans les n°s 243 et 245, qu'une équation irréductible, dont l'intégrale est monotrope, ne peut offrir plus d'un système circulaire de racines nulles d'un degré supérieur à l'unité, ni plus de deux systèmes circulaires de racines nulles d'un degré égal à l'unité, ni à la fois une racine nulle d'un degré supérieur à l'unité et une racine nulle d'un degré égal à l'unité.

D'après cela, on peut affirmer *a priori* que, si le polynôme φ est carré parfait, l'équation

$$(72)\qquad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a_1)^4(u-a')(u-b') = 0,$$

qui, dans le voisinage du point a_1, admet deux racines infiniment petites, monotropes par rapport à u et du degré deux, est décomposable en

deux équations, l'une du premier degré, l'autre du second degré, ayant toutes deux des intégrales rationnelles. L'équation

$$(73)\qquad U^3 + A(u-a_1)^2U^2 + C(u-a_1)^6 = 0,$$

qui, dans le voisinage du point a_1, admet trois racines infiniment petites, monotropes et du degré deux, est évidemment décomposable en trois équations du premier degré, ayant des intégrales rationnelles. De même, l'équation

$$(74)\quad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a_1)^2(u-b_1)^2(u-a')(u-b') = 0,$$

qui, pour chacune des deux valeurs a_1 et b_1, admet deux racines nulles, monotropes et du degré un, est décomposable en deux équations ayant des intégrales simplement périodiques. L'équation

$$(75)\quad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a_1)^2(u-b_1)^2(u-c_1)^2 = 0,$$

qui, pour chacune des trois valeurs a_1, b_1, c_1, admet deux racines nulles, monotropes et du degré un, est décomposable en trois équations du premier degré, ayant des intégrales simplement périodiques.

Il est facile d'opérer cette décomposition. Commençons par l'équation (72); si on la réduit à la forme dérivée

$$(76)\qquad U^3 + u(u+\alpha)U^2 + (Bu^2 + B_1u + B_2) = 0,$$

les conditions pour que le polynôme φ soit carré parfait sont

$$B = -\frac{1}{2^4 3^2}\alpha^4,\quad B_1 = -\frac{1}{2^4 3^2}\alpha^5,\quad B_2 = \frac{1}{2^6 3^3}\alpha^6,$$

et l'équation devient

$$U^3 + u(u+\alpha)U^2 - \frac{\alpha^4}{2^4 3^2}\left[u(u+\alpha) - \frac{\alpha^2}{2^2 3}\right] = 0,$$

ou

$$\left(U^3 + \frac{\alpha^6}{2^6 3^3}\right) + u(u+\alpha)\left(U^2 - \frac{\alpha^4}{2^4 3^2}\right) = 0.$$

La décomposition est évidente.

Considérons maintenant l'équation (75), et désignons par Q_3^2 son dernier terme. On doit avoir

$$Q_3^2 + \frac{2^2}{3^3} A^3 (u-a)^3 (u-b)^3 = P_3^2,$$

d'où

$$(P_3 + Q_3)(P_3 - Q_3) = \frac{2^2}{3^3} A^3 (u-a)^3 (u-b)^3;$$

les deux facteurs du premier membre de cette dernière égalité étant premiers entre eux, il faut que l'on ait

$$P_3 + Q_3 = 2B^3 (u-a)^3, \quad P_3 - Q_3 = \frac{2^2}{3^3} \frac{A^3}{2B^3} (u-b)^3,$$

B étant une constante; on en déduit

$$Q_3 = B^3 (u-a)^3 - \frac{A^3}{3^3 B^3} (u-b)^3,$$

et l'équation devient

$$(77) \qquad U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + \left[B^3 (u-a)^3 - \frac{A^3}{3^3 B^3}(u-b)^3\right]^2 = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$B(u-a) = G, \quad \frac{A}{3B}(u-b) = H;$$

l'équation est décomposable en trois équations du premier degré

$$U = -GH - \alpha G^2 - \alpha^2 H^2,$$

α étant l'une quelconque des trois racines de l'équation $\alpha^3 = 1$.

Si l'on réduit l'équation (74) à la forme dérivée

$$(78) \qquad U^3 + (u^2 + A_1 u + A_2) U^2 + u^2 (B u^2 + B_1 u + B_2) = 0,$$

les conditions, pour que le polynôme φ soit carré parfait, sont

$$(79) \qquad \frac{4}{3} B = \frac{4}{3} \frac{B_2}{A_2} = \frac{B_1}{A_1 - \frac{1}{2}\sqrt{A_2}} = -\frac{2^2}{3^3}(A_1 - 2\sqrt{A_2})^2.$$

Si le premier membre de l'équation (78) est décomposable en un produit de deux facteurs rationnels

$$U + G, \quad U^2 + HU + H_1,$$

G, H, H_1 seront des polynômes entiers en u, et l'on aura identiquement

$$H_1 = -GH, \quad G + H = u^2 + A_1 u + A_2, \quad G^2 H = -u^2(Bu^2 + B_1 u + B_2).$$

La dernière égalité exige que G soit de la forme gu, g étant une constante; la seconde devient alors

$$gu - \frac{1}{g^2}(Bu^2 + B_1 u + B_2) = u^2 + A_1 u + A_2;$$

comme elle doit être vérifiée, quel que soit u, on doit avoir

$$-\frac{B}{g^2} = 1, \quad g - \frac{B_1}{g^2} = A_1, \quad -\frac{B_2}{g^2} = A_2;$$

l'élimination de g conduit à deux équations de condition qui sont satisfaites, grâce aux relations (79).

Équations trinômes.

255. Revenons à l'équation trinôme (42)

$$U^m + f_1(u)U^{m-1} + f_m(u) = 0,$$

dont nous avons déjà dit quelques mots (n° 249), et cherchons les équations de cette forme qui admettent des intégrales monotropes et doublement périodiques; les formules (43) et (44) représentent les exposants de la première et de la seconde espèce. Nous avons traité le cas où l'équation est du troisième degré. Supposons maintenant que l'équation soit du quatrième degré; les exposants de la première espèce sont égaux à 2, ceux de la seconde espèce à 2 ou à 3. On a ainsi les

quatre combinaisons

$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + C(u-a')^2(u-b')^2(u-c')^2(u-d')^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + C(u-a)^2(u-b')^2(u-c')^2(u-d')^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + C(u-a)^2(u-b)^2(u-c')^2(u-d')^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + C(u-a)^3(u-b)^3(u-c')^2 = 0,$$

ou, plus simplement,

$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + Q_4^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + (u-a)^2 Q_3^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + (u-a)^2(u-b)^2 Q_2^2 = 0,$$
$$U^4 + A(u-a)(u-b)U^3 + (u-a)^3(u-b)^3 Q_1^2 = 0,$$

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 désignant des polynômes du premier, second, troisième ou quatrième degré.

Dans le premier cas, le polynôme

$$\varphi = Q_4^2 - \frac{3^3}{4^4} A^4 (u-a)^4 (u-b)^4$$

devant être le carré d'un polynôme P_4 du quatrième degré, on a

$$\frac{3^3}{4^4} A^4 (u-a)^4 (u-b)^4 = (Q_4 + P_4)(Q_4 - P_4).$$

Les deux facteurs du second membre, étant premiers entre eux, sont divisibles, l'un par $(u-a)^4$, l'autre par $(u-b)^4$; d'où

$$Q_4 + P_4 = 2B(u-a)^4, \quad Q_4 - P_4 = \frac{3^3}{4^4} \frac{A^4}{2B} (u-b)^4,$$
$$Q_4 = B(u-a)^4 + \frac{3^3}{4^4} \frac{A^4}{4B} (u-b)^4,$$

B étant une constante. On a, de même, dans le troisième et le quatrième cas,

$$Q_2 = B(u-a)^2 + \frac{3^3}{4^4} \frac{A^4}{4B} (u-b)^2,$$

$$Q_1 = B(u-a) + \frac{3^3}{4^4} \frac{A^4}{4B} (u-b).$$

La seconde combinaison est inadmissible, car on aurait

$$\frac{3^3}{4^4}A^4(u-a)^2(u-b)^4=(Q_3+P_3)(Q_3-P_3),$$

et l'un des facteurs du second membre, qui sont du troisième degré, devrait être divisible par $(u-b)^4$. On conclut de là qu'il existe trois équations du quatrième degré

$$(80)\quad U^4+A(u-a)(u-b)U^3+\left[B(u-a)^4+\frac{3^3}{4^4}\frac{A^4}{4B}(u-b)^4\right]^2=0,$$

$$(81)\quad U^4+A(u-a)(u-b)U^3+(u-a)^2(u-b)^2\left[B(u-a)^2+\frac{3^3}{4^4}\frac{A^4}{4B}(u-b)^2\right]^2=0,$$

$$(82)\quad U^4+A(u-a)(u-b)U^3+(u-a)^3(u-b)^3\left[B(u-a)+\frac{3^3}{4^4}\frac{A^4}{4B}(u-b)\right]^2=0,$$

admettant des intégrales monotropes et doublement périodiques.

256. Lorsque l'équation est du cinquième degré, les exposants de la première espèce sont égaux à 2 ou à 3, ceux de la seconde espèce à 4, ce qui donne les cinq combinaisons

$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+C(u-a')^2(u-b')^2(u-c')^2(u-d')^2(u-e')^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+C(u-a')^3(u-b')^3(u-c')^2(u-d')^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+C(u-a)^4(u-b')^2(u-c')^2(u-d')^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+C(u-a)^4(u-b')^3(u-c')^3=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+C(u-a)^4(u-b)^4(u-c')^2=0,$$

ou, plus simplement,

$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+Q_5^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+Q_2^3R_2^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+(u-a)^4Q_3^2=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+(u-a)^4Q_2^3=0,$$
$$U^5+A(u-a)(u-b)U^4+(u-a)^4(u-b)^4Q_1^2=0,$$

les lettres Q et R désignant des polynômes entiers dont les degrés sont marqués par les indices.

En raisonnant comme précédemment, on verra que l'on a, dans le premier et le dernier cas,

$$Q_5 = B(u-a)^5 - \frac{4^4}{5^5}\frac{A^5}{4B}(u-b)^5,$$

$$Q_1 = B(u-a) - \frac{4^4}{5^5}\frac{A^5}{4B}(u-b),$$

et que le troisième cas est inadmissible. Le second et le quatrième cas sont aussi inadmissibles. Considérons en effet la quatrième équation réduite à la forme dérivée

$$U^5 + A(u-b)U^4 + Q_2^3 = 0;$$

le polynôme du sixième degré

$$\varphi = Q_2^3 + \frac{4^4}{5^5}A^5(u-b)^5,$$

pour être carré parfait, devrait avoir un plus grand commun diviseur, du troisième degré au moins, avec sa dérivée

$$\varphi' = 3Q_2^2Q_2' + 5\frac{4^4}{5^5}A^5(u-b)^4,$$

et, par conséquent, avec le polynôme

$$5\varphi - (u-b)\varphi' = Q_2^2[5Q_2 - 3(u-b)Q_2'],$$

ce qui est impossible, puisque le polynôme Q_2 est premier avec φ, et que le polynôme placé entre parenthèses est du second degré.

Considérons de même la seconde équation réduite à la forme dérivée

$$U^5 + A(u-b)U^4 + Q_2^3R_2^2 = 0;$$

le polynôme du dixième degré

$$\varphi = Q_2^3R_2^2 + \frac{4^4}{5^5}A^5(u-b)^5,$$

pour être carré parfait, devrait avoir un plus grand commun diviseur,

du cinquième degré au moins, avec sa dérivée

$$\varphi' = Q_2^2 R_2(3R_2Q_2' + 2Q_2R_2') + 5\frac{4^4}{5^5}A^5(u-b)^4,$$

et, par conséquent, avec le polynôme

$$5\varphi - (u-b)\varphi' = Q_2^2 R_2[5Q_2R_2 - (u-b)(3R_2Q_2' + 2Q_2R_2')],$$

ce qui est impossible, puisque le polynôme placé entre parenthèses est du quatrième degré. Nous ne trouvons ainsi que deux équations du cinquième degré

$$(83)\quad U^5 + A(u-a)(u-b)U^4 + \left[B(u-a)^5 - \frac{4^4}{5^5}\frac{A^5}{4B}(u-b)^5\right]^2 = 0,$$

$$(84)\quad U^5 + A(u-a)(u-b)U^4 + (u-a)^4(u-b)^4\left[B(u-a) - \frac{4^4}{5^5}\frac{A^5}{4B}(u-b)\right]^2 = 0,$$

admettant des intégrales monotropes et doublement périodiques.

257. Au delà du cinquième degré, on ne trouve plus aucune combinaison favorable. Nous remarquerons d'abord que le polynôme f_m, du degré $2m$, est formé de trois facteurs au moins, puisque chacun des exposants est plus petit que m. Lorsque m est pair, le nombre p, diviseur de $m-1$ dans la formule (43), est impair, et égal ou supérieur à 3, et, par conséquent, les exposants de la première espèce sont égaux ou supérieurs à $\frac{2(m-1)}{3}$; ceux de la seconde espèce sont égaux ou supérieurs à $\frac{m}{2}$; la première limite étant supérieure à la seconde, quand m est plus grand que 4, la somme de quatre exposants, dont deux au moins de première espèce, serait plus grande que $2m$; ainsi, dans ce cas, le nombre des facteurs est trois. Lorsque m est impair, les exposants de la première espèce sont égaux ou supérieurs à $\frac{m-1}{2}$, ceux de la seconde à $\frac{2m}{3}$; la seconde limite étant plus grande que la seconde, chacun des exposants est égal ou supérieur à $\frac{m-1}{2}$; leur

nombre est donc égal ou inférieur à $\frac{4m}{m-1}$, ou à $4+\frac{4}{m-1}$, et, par conséquent à 4, quand m est plus grand que 5; ainsi, dans ce cas, le polynôme f_m se compose de trois ou de quatre facteurs.

Concevons l'équation réduite à la forme dérivée

$$U^m + A(u-b)U^{m-1} + f_m = 0.$$

Si tous les exposants sont de la première espèce, le polynôme

$$\varphi = f_m + (-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}A^m(u-b)^m,$$

du degré $2m$, pour être carré parfait, devrait avoir un plus grand commun diviseur, du degré m au moins, avec sa dérivée

$$\varphi' = f'_m + (-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}mA^m(u-b)^{m-1},$$

ou avec le polynôme

$$\frac{mf_m - (u-b)f'_m}{(u-a')^{n-1}(u-b')^{n'-1}\ldots},$$

qui est du troisième ou du quatrième degré, suivant que f_m se compose de trois ou de quatre facteurs différents, ce qui est impossible, dès que m surpasse quatre. S'il y avait un facteur $(u-a)^n$ de la seconde espèce, disparaissant dans la forme dérivée, le polynôme φ, qui est du degré $2m-n$, devrait avoir avec le polynôme

$$\frac{mf_m - (u-b)f'_m}{(u-b')^{n'-1}\ldots}$$

un plus grand commun diviseur d'un degré égal ou supérieur à $\frac{2m-n}{2}$, et, par conséquent, à $\frac{m+1}{2}$, puisque n est égal ou inférieur à $m-1$; ce dernier polynôme étant du second ou du troisième degré, il y a impossibilité, dès que m surpasse cinq. Avec deux facteurs $(u-a)^n$, $(u-b)^{n'}$ de la seconde espèce, on peut combiner un ou deux facteurs

de la première espèce; dans le premier cas, le polynôme

$$\varphi_1 = \frac{\varphi}{(u-b)^{n'}} = C(u-c')^{n''} + (-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}A^m(u-b)^{m-n'},$$

qui est du degré n'', devrait avoir, avec sa dérivée ou avec le polynôme du premier degré

$$(m-n')(u-c') - n''(u-b),$$

un plus grand commun diviseur d'un degré égal ou supérieur à $\frac{n''}{2}$, par suite à $\frac{m-1}{4}$, ce qui est impossible dès que m surpasse cinq. Dans le second cas, le polynôme φ_1, qui est du degré $n''+n'''$, devrait avoir, avec un polynôme du second degré, un plus grand commun diviseur d'un degré égal ou supérieur à $\frac{n''+n'''}{2}$, et par suite à $\frac{m-1}{2}$, ce qui est impossible.

258. Nous avons recherché spécialement les intégrales monotropes et doublement périodiques; il est aisé de voir qu'au delà du troisième degré il n'existe pas d'équation admettant une intégrale monotrope et simplement périodique ou rationnelle. Au delà du troisième degré, on ne trouve ainsi que cinq équations trinômes de la forme considérée, qui admettent des intégrales monotropes, savoir : les trois équations du quatrième degré (80), (81), (82) et les deux équations du cinquième degré (83) et (84). Ces équations rentrent dans le type général

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} U^m + A(u-a)(u-b)U^{m-1} \\ \quad + (u-a)^{m-n}(u-b)^{m-n}\left[B(u-a)^n + (-1)^m\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}\frac{A^m}{4B}(u-b)^n\right]^2 = 0, \end{cases}$$

qui renferme quatre constantes arbitraires. Si l'on pose

$$\frac{u-a}{u-b} = u', \quad \text{d'où} \quad U = \frac{(u-b)^2}{a-b}U',$$

cette équation se réduit à

$$(85) \quad U'^m + A(a-b)u'U'^{m-1} + (a-b)^m u'^{m-n}\left[Bu'^n + (-1)^m\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}\frac{A^m}{4B}\right]^2 = 0;$$

si l'on pose ensuite $u'^n = u''$, elle devient

$$(86)\quad U''^m + nA(a-b)u''U''^{m-1} + n^m(a-b)^m u''^{m-1}\left[Bu'' + (-1)^m \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}\frac{A^m}{4B}\right]^2 = 0,$$

et se ramène ainsi au cas où $n = 1$.

Nous avons donc à intégrer une équation de la forme

$$(87)\qquad U^m + AuU^{m-1} + Bu^{m-1}(u+H)^2 = 0,$$

dans laquelle H désigne la quantité constante $(-1)^m \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}\frac{A^m}{4B}$. Posons pour cela $U = uv$; nous obtenons la relation

$$(88)\qquad uv^{m-1}(v+A) + B(u+H)^2 = 0,$$

qui est du degré m par rapport à v, et du second degré par rapport à u; puisque u est une fonction doublement périodique de l'ordre m, il en résulte que v est une fonction doublement périodique du second ordre. En appelant $F(u)$ le premier membre de cette équation, et différentiant, on en déduit

$$(89)\qquad mv^{m-3}\left(v + \frac{m-1}{m}A\right)\frac{dv}{dz} + F'(u) = 0;$$

mais on a

$$F(u) = Bu^2 + [v^{m-1}(v+A) + 2BH]u + BH^2 = 0,$$

$$[F'(u)]^2 = v^{m-1}(v+A)\left[v^m + Av^{m-1} + (-1)^m\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}A^m\right]$$
$$= v^{m-1}(v+A)\left(v + \frac{m-1}{m}A\right)^2(v^{m-2} + B_1 v^{m-3} + \ldots + B_{m-2});$$

on arrive ainsi à l'équation du second degré

$$(90)\qquad \frac{dv}{dz} = \frac{1}{m}\sqrt{v^{5-m}(v+A)(v^{m-2} + B_1 v^{m-3} + \ldots + B_{m-2})}.$$

Lorsque m est égal à 4 ou à 5, la fonction v, définie par cette équation, est monotrope et doublement périodique.

Lorsque $m = 4$, d'après les résultats trouvés au n° 255, l'équation générale (IX) admet une intégrale monotrope, quand on attribue à n les valeurs 1, 2, 4, ce qui donne les trois équations (82), (81), (80),

et nous avons ramené les deux derniers cas au premier, en posant soit $u' = \sqrt{u''}$, soit $u' = \sqrt[4]{u''}$; l'intégrale de l'équation (82) jouit donc de cette propriété que sa racine quatrième est monotrope. Si l'on attribuait à n la valeur 3, on aurait une équation du quatrième degré, dont l'intégrale s'exprimerait rationnellement à l'aide de la racine cubique d'une fonction monotrope et doublement périodique; ce serait donc une fonction doublement périodique, admettant trois valeurs pour chaque valeur de z; on pourrait la regarder comme la racine d'une équation du troisième degré, ayant pour coefficients des fonctions monotropes et doublement périodiques. Lorsque $m = 5$, l'équation (IX) admet une intégrale monotrope, quand on attribue à n les valeurs 1 et 5, ce qui donne les deux équations (84) et (83), et celle-ci se ramène à la précédente, dont l'intégrale a sa racine cinquième monotrope. Si l'on attribuait à n les valeurs 2, 3, 4, les intégrales cesseraient d'être monotropes; mais elles s'exprimeraient rationnellement à l'aide de la racine carrée, cubique ou quatrième d'une fonction monotrope et doublement périodique; ce seraient des fonctions doublement périodiques, ayant 2, 3 ou 4 valeurs pour chaque valeur de z.

Méthode générale d'intégration.

259. Nous avons effectué jusqu'à présent l'intégration par des procédés appropriés à la forme même des équations. Une fois qu'on a reconnu qu'une équation différentielle donnée admet une intégrale monotrope, et qu'on en a déterminé l'espèce, à l'aide des caractères que nous avons indiqués, la méthode générale d'intégration consiste à chercher l'expression rationnelle de la fonction intégrale au moyen, soit de la variable z, soit de la fonction $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$, soit de la fonction elliptique $\lambda(z)$ et de sa dérivée, et à calculer les coefficients qui entrent dans cette expression. Supposons, par exemple, que l'intégrale soit doublement périodique et admette les deux périodes 2ω, ω'; si l'on appelle $\lambda(z, g, k)$ la fonction elliptique qui a les mêmes périodes, l'expression de la fonction cherchée sera de la forme

$$u = \frac{M + N\lambda'(z)}{L},$$

L, M, N étant des polynômes entiers en λ, les deux premiers d'un degré égal ou inférieur au degré m de l'équation, le dernier du degré $m-2$ au plus; ces trois polynômes renferment $3m$ coefficients, ce qui, avec le multiplicateur g et le module k de la fonction elliptique, fait $3m+2$ constantes, que l'on déterminera en substituant l'expression de la fonction u dans l'équation différentielle proposée.

Nous allons appliquer cette méthode à l'équation du troisième degré

$$(91) \qquad U^3+3u^2U^2-(u^2-1)^2-4u^6=0,$$

qui rentre dans le type (V) étudié au n° 250, et qui admet une intégrale monotrope et doublement périodique. Afin de déterminer complétement la fonction, nous supposerons que, pour $z=0$, elle a la valeur initiale $u=0$, et sa dérivée la valeur $U=1$. La fonction étant impaire et s'annulant pour $z=0$, son expression est de la forme

$$(92) \qquad u=\frac{A\lambda^3+B\lambda+C\lambda\lambda'}{1-h^2\lambda^2}.$$

On peut choisir les périodes de manière que les trois zéros simples soient 0, ω, $\frac{\omega'}{2}$. L'équation transformée ayant pour $v=0$ ses racines différentes de zéro, l'intégrale a aussi trois infinis simples, dont l'un est $\omega+\frac{\omega'}{2}$; nous désignerons les deux autres par $\pm\alpha$, en posant $h=\frac{1}{\lambda(\alpha)}$. Il s'agit de déterminer les six constantes A, B, C, h, g, k.

Pour $u=0$, l'équation différentielle se réduisant à $U^3-1=0$, les trois racines sont $1, j, j^2$. La première correspond à $z=0$; en se bornant aux deux premiers termes, on a, pour les valeurs infiniment petites de z,

$$U=1-\frac{5}{3}u^2, \quad \text{d'où} \quad u=z-\frac{5}{9}z^3;$$

on a d'ailleurs

$$\lambda(z)=gz-\frac{1+k^2}{6}g^3z^3, \quad \lambda'(z)=g-\frac{1+k^2}{2}g^3z^2;$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (92) et égalant les coefficients

des mêmes puissances de z, on obtient les deux relations

$$Bg + Cg^2 = 1, \tag{93}$$

$$Ag^3 - B\frac{1+k^2}{6}g^3 - C\frac{2(1+k^2)}{3}g^4 = -\frac{5}{9} - h^2g^2. \tag{94}$$

Si nous faisons correspondre à $z = \omega$ la seconde racine $U = j$, et si nous posons $z = \omega + z'$, nous aurons $u = jz'$, d'où

$$Bg - Cg^2 = -j. \tag{95}$$

La troisième racine $U = j^2$ correspond à $z = \frac{\omega'}{2}$; en posant $z = \frac{\omega'}{2} + z'$, on a $u = j^2z'$, et l'on obtient les deux autres relations

$$Cgk = A, \tag{96}$$

$$Bgk + Ag\frac{1+k^2}{2k} = -h^2j^2. \tag{97}$$

La transformée

$$V^3 - 3V^2 + 4 + v^2(1-v^2)^2 = 0,$$

pour $v = 0$, admet la racine simple -1 et la racine double 2; la première se rapporte à l'infini $z = \omega + \frac{\omega'}{2}$, la seconde aux deux infinis $+\alpha$. Si l'on pose $z = \omega + \frac{\omega'}{2} + z'$, on a

$$v = -z', \quad u = -\frac{1}{z'},$$

et l'on obtient la sixième relation

$$A + Cgk = - gkh^2. \tag{98}$$

Des équations (93), (95), (96) et (98), on déduit

$$Bg = \frac{1-j}{2}, \quad Cg^2 = -\frac{j^2}{2}, \quad Ag = -k\frac{j^2}{2}, \quad h^2g^2 = j^2. \tag{99}$$

En substituant ces valeurs dans les relations (94) et (97), et posant, pour abréger,

$$kg^2 = p, \quad (1+k^2)g^2 = q, \tag{100}$$

on obtient deux équations du premier degré en p et q, d'où l'on déduit

$$(101) \qquad p = \frac{3 - 2i\sqrt{3}}{9}, \quad q = \frac{-2 - 4i\sqrt{3}}{9}.$$

Les valeurs de p et q étant connues, les équations (100) donnent g et k, et les précédentes h, A, B, C.

Cette dernière méthode est celle dont nous nous sommes servis exclusivement dans nos premières recherches sur l'intégration des équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique*, 1856); tous les exemples que nous avons traités rentrent dans la catégorie des équations trinômes que nous venons d'étudier. Dans son Cours d'Analyse à l'École Polytechnique, en 1873, M. Hermite a observé que, lorsque l'on a reconnu qu'une équation différentielle de la forme (1) admet une intégrale monotrope, on peut effectuer l'intégration en exprimant U et u rationnellement à l'aide d'une variable auxiliaire, si l'intégrale est algébrique ou simplement périodique, et par des formules qui ne renferment pas d'autres quantités irrationnelles que la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, lorsque l'intégrale est doublement périodique.

LIVRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Transformation générale de Jacobi.

260. Étant donnée une expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, où Y désigne un polynôme entier du quatrième degré en y, la question traitée par Jacobi (*Fundamenta nova theoriæ fonctionum ellipticarum*, 1829) consiste à déterminer deux polynômes U et V entiers en x, tous deux du degré p, ou l'un du degré p, l'autre du degré $p-1$, de telle sorte que, si l'on pose $y = \frac{U}{V}$, l'expression différentielle proposée se transforme en une autre de la même forme $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X désignant un polynôme entier en x du quatrième degré.

Soit

$$Y = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d);$$

on a

$$\sqrt{Y} = \frac{1}{V^2}\sqrt{(U-aV)(U-bV)(U-cV)(U-dV)}.$$

Le polynôme en x placé sous le radical est du degré $4p$. Supposons-le décomposé en ses facteurs premiers; pour que la transformation s'opère,

il est nécessaire que tous ces facteurs soient doubles, excepté quatre; alors un polynôme du degré $2p-2$ sortira du radical, et il restera sous le radical un polynôme du quatrième degré.

Cette condition suffit. On a, en effet,

$$dy = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{V^2}\,dx.$$

Le polynôme $M = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$ est du degré $2p-2$; car, si les deux polynômes U et V sont du degré p, les deux termes du degré $2p-1$ se détruisent. Les facteurs doubles sous le radical ne proviennent pas de deux facteurs distincts; car, si une valeur de x annulait, par exemple, $U-aV$ et $U-bV$, elle annulerait les deux polynômes U et V, que l'on peut supposer premiers entre eux. En mettant M sous la forme

$$M = V\frac{d(U-aV)}{dx} - (U-aV)\frac{dV}{dx},$$

on reconnaît que tout facteur double de $U-aV$ divise M. Le polynôme du degré $2p-2$, que nous faisons sortir du radical, divise donc le polynôme M, qui est du même degré; le quotient est une constante, et, par conséquent, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

X étant un polynôme du quatrième degré en x.

Transformation du premier degré.

261. Lorsque les polynômes U et V sont du premier degré, la transformation réussit, quels que soient les coefficients de ces polynômes. Si l'on pose $y = \frac{m+nx}{1+x}$, on a, en effet,

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{(n-m)\,dx}{\sqrt{[(m-a)+(n-a)x][(m-b)+(n-b)x][(m-c)+(n-c)x][(m-d)+(n-d)x]}}.$$

On peut déterminer les coefficients m et n de manière que le polynôme du quatrième degré en x, placé sous le radical, ne contienne que des termes de degrés pairs; il suffit pour cela que, dans le produit des deux premiers facteurs et dans celui des deux derniers, les termes du premier degré soient nuls, ce qui donne les deux conditions

$$(m-a)(n-b)+(n-a)(m-b)=0,$$
$$(m-c)(n-d)+(n-c)(m-d)=0;$$

d'où l'on déduit

$$2mn-(a+b)(m+n)+2ab=0,$$
$$2mn-(c+d)(m+n)+2cd=0,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad m+n=\frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d},$$

$$(2) \qquad m-n=2\frac{\sqrt{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}}{a+b-c-d}.$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{(n-m)\,dx}{\sqrt{[(m-a)(m-b)+(n-a)(n-b)x^2][(m-c)(m-d)+(n-c)(n-d)x^2]}}.$$

Une transformation ultérieure très-simple ramènera le polynôme X, placé sous le radical, à la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$.

Autre transformation du premier degré.

262. En introduisant une constante de plus dans la formule de transformation, on peut effectuer d'un seul coup la transformation complète. Si l'on pose, en effet, $y=\frac{m+nx}{1+n'x}$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{(n-mn')\,dx}{\sqrt{[(m-a)+(n-n'a)x][(m-b)+(n-n'b)x][(m-c)+(n-n'c)x][(m-d)+(n-n'd)x]}}.$$

Le polynôme du quatrième degré en x sera ramené à la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$, si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{n-n'a}{m-a}=1, & \dfrac{n-n'c}{m-c}=k, \\[2ex] \dfrac{n-n'b}{m-b}=-1, & \dfrac{n-n'd}{m-d}=-k, \end{cases}$$

ce qui fait quatre équations à quatre inconnues m, n, n', k. On déduit de deux d'entre elles

$$(5)\qquad n'=\frac{a+b-2m}{a-b},\quad n=\frac{2ab-m(a+b)}{a-b},$$

et, en remplaçant dans les deux autres,

$$(6)\qquad \begin{cases} 2ab-(a+b)c+c(a-b)k=m[a+b-2c+(a-b)k], \\ 2ab-(a+b)d-d(a-b)k=m[a+b-2d-(a-b)k]; \end{cases}$$

l'élimination de m conduit à une équation du second degré

$$(7)\qquad (a-b)(c-d)(k^2+1)-2[(a+b)(c+d)-2ab-2cd]k=0.$$

Remarquons que

$$(a+b)(c+d)-2ab-2cd=(a-d)(c-b)+(a-c)(d-b)=\mathrm{A}+\mathrm{B},$$
$$(a-b)(c-d)=(a-d)(c-b)-(a-c)(d-b)=\mathrm{A}-\mathrm{B}.$$

En résolvant l'équation du second degré, on trouve

$$k=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\mp 2\sqrt{\mathrm{AB}}}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=\frac{(\sqrt{\mathrm{A}}\mp\sqrt{\mathrm{B}})^2}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{\mathrm{A}}\mp\sqrt{\mathrm{B}}}{\sqrt{\mathrm{A}}\pm\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{H}=\sqrt{(a-d)(c-b)},\quad \mathrm{H}'=\sqrt{(a-c)(d-b)},$$

on aura

$$(8) \qquad k = \frac{H - H'}{H + H'}.$$

De l'une des équations (6), on tire ensuite

$$m = \frac{b(a-c)H - a(c-b)H'}{(a-c)H - (c-b)H'}.$$

En divisant les deux termes par $\sqrt{(a-c)(c-b)}$ et posant

$$G = \sqrt{(a-c)(a-d)}, \quad G' = \sqrt{(c-b)(d-b)},$$

on a

$$(9) \qquad m = \frac{bG - aG'}{G - G'}, \quad n = \frac{bG + aG'}{G - G'}, \quad n' = \frac{G + G'}{G - G'}.$$

On en déduit

$$m - a = -\frac{(a-b)G}{G - G'}, \quad m - b = -\frac{(a-b)G'}{G - G'},$$

$$m - c = -\frac{(c-b)G + (a-c)G'}{G - G'} = -\sqrt{(c-b)(a-c)}\,\frac{H + H'}{G - G'},$$

$$m - d = -\frac{(d-b)G + (a-d)G'}{G - G'} = -\sqrt{(d-b)(a-d)}\,\frac{H + H'}{G - G'},$$

$$n - mn' = \frac{2(a-b)GG'}{(G - G')^2},$$

$$\sqrt{(m-a)(m-b)(m-c)(m-d)} = \frac{(a-b)GG'(H + H')}{(G - G')^2}.$$

La formule de transformation devient

$$(10) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\,\frac{n' + x}{1 + n'x},$$

et, si l'on pose $g = \frac{H + H'}{2}$, on a

$$(11) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Il résulte de là que l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{Y}$$

est ramenée à celle de l'équation

$$\frac{dx}{dz} = g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

dont la fonction intégrale est $x = \lambda(z - z_0, g, k)$.

Nous avons effectué la transformation en disposant dans un certain ordre les quatre facteurs du premier degré qui forment le polynôme Y. Examinons combien on obtient de transformations, en disposant ces facteurs dans différents ordres. Lorsqu'on permute les deux lettres a et b, ou les deux lettres c et d, les deux racines de l'équation (7) et, par conséquent, les deux valeurs de k changent de signe; mais on obtient la même expression transformée (11). Si l'on permute en même temps a et c, b et d, l'équation (7) ne change pas. En ne distinguant pas les valeurs de k égales et de signes contraires, on n'a ainsi que trois équations différentes du second degré; elles correspondent aux trois dispositions (a, b, c, d), (a, c, b, d), (a, d, b, c), et donnent six valeurs de k réciproques deux à deux.

Première transformation du second degré.

263. Lorsque les polynômes U et V sont du second degré, chacun des facteurs sous le radical étant du second degré, il est nécessaire que deux de ces facteurs soient carrés parfaits. Nous choisirons donc les deux polynômes U et V, de manière que l'on ait

$$(12) \qquad U - aV = A(m' + mx)^2, \quad U - bV = B(n' + nx)^2;$$

la formule de transformation sera

$$(13) \qquad \frac{y-b}{y-a} = \frac{B}{A}\frac{(n'+nx)^2}{(m'+mx)^2},$$

et nous aurons

$$dy = \frac{V\,dU - U\,dV}{V^2} = \frac{(U - bV)\,d(U - aV) - (U - aV)\,d(U - bV)}{(a - b)\,V^2},$$

$$dy = \frac{2\,AB\,(mn' - nm')\,(m' + mx)\,(n' + nx)\,dx}{(a - b)\,V^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2(mn' - nm')\sqrt{AB}}{a - b}\,\frac{dx}{\sqrt{(U - cV)(U - dV)}}.$$

La transformation réussit, quelles que soient les valeurs attribuées aux constantes m, m', n, n', A, B, que l'on peut réduire à quatre, pourvu que la quantité $mn' - nm'$ soit différente de zéro.

Proposons-nous maintenant de déterminer ces constantes, de manière que le polynôme du quatrième degré en x, placé sous le radical, ait la forme canonique $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. Il y a deux manières d'y arriver : c'est de poser, soit

$$(14) \qquad U - cV = C(1 - x^2), \quad U - dV = D(1 - k^2x^2),$$

soit

$$(15) \qquad U - cV = C(1 - x)(1 - kx), \quad U - dV = D(1 + x)(1 + kx).$$

Examinons d'abord le premier mode. Des équations (14), on déduit

$$\frac{y - c}{y - d} = \frac{C}{D}\,\frac{1 - x^2}{1 - k^2x^2};$$

cette expression de y ne contenant pas la première puissance de x, il est nécessaire que le second membre de l'équation (13) ne la contienne pas non plus, ce qui exige que l'on ait, par exemple, $m = 0$, $n' = 0$. On peut, dans ce cas, faire $m' = n = 1$, et réduire les équations (12) et (13) à la forme

$$(16) \qquad U - aV = A, \quad U - bV = Bx^2,$$

$$(17) \qquad \frac{y - b}{y - a} = \frac{B}{A}\,x^2.$$

Pour que les polynômes $U - cV$, $U - dV$, qui ne contiennent pas la première puissance de x, aient la forme voulue, il est nécessaire et il suffit qu'ils s'annulent, le premier pour $x = 1$, le second pour $x = \frac{1}{k}$, c'est-à-dire que les valeurs correspondantes de y soient c et d; il en résulte, d'après l'équation (17), les deux relations

$$(18) \qquad \frac{c-b}{c-a} = \frac{B}{A}, \quad \frac{d-b}{d-a} = \frac{B}{A}\frac{1}{k^2},$$

d'où

$$(19) \qquad k = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}.$$

On en déduit le module complémentaire

$$k' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}.$$

On déterminera les coefficients C et D, en remarquant qu'à $x = 0$ correspond $y = b$; d'où

$$(20) \qquad \frac{C}{A} = \frac{b-c}{b-a}, \quad \frac{D}{A} = \frac{b-d}{b-a};$$

le coefficient A reste arbitraire.

La formule de transformation (17) devient

$$(21) \qquad y = \frac{b(c-a) - a(c-b)x^2}{(c-a) - (c-b)x^2},$$

et si l'on pose

$$(22) \qquad g = \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)},$$

on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{g\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Deuxième transformation du second degré.

264. Examinons maintenant le second mode. Nous avons posé

$$(15)\qquad U - cV = C(1 - x)(1 - kx), \quad U - dV = D(1 + x)(1 + kx).$$

Pour que les polynômes $U - cV$, $U - dV$ aient la forme voulue, il est nécessaire et il suffit qu'ils s'annulent, le premier pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{k}$, le second pour $x = -1$ et $x = -\frac{1}{k}$, ou, ce qui est la même chose, que les valeurs correspondantes de y soient $y = c$ et $y = d$. Il en résulte, d'après l'équation (13), les quatre conditions

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{c-b}{c-a} = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'+n}{m'+m}\right)^2 = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'k+n}{m'k+m}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{d-b}{d-a} = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'-n}{m'-m}\right)^2 = \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{n'k-n}{m'k-m}\right)^2. \end{cases}$$

On en déduit

$$\left(\frac{n'k+n}{m'k+m}\right)^2 = \left(\frac{n'+n}{m'+m}\right)^2, \quad \left(\frac{n'k-n}{m'k-m}\right)^2 = \left(\frac{n'-k}{m'-m}\right)^2,$$

et par suite

$$\frac{n'k+n}{m'k+m} = \pm\frac{n'+n}{m'+m}, \quad \frac{n'k-n}{m'k-m} = \pm\frac{n'-n}{m'-m};$$

il faut prendre le signe — devant les deux seconds membres, sans quoi on aurait $k = 1$, $U - cV$ et $U - dV$ seraient carrés parfaits; mais déjà nous avons supposé que les deux polynômes $U - aV$, $U - bV$ sont carrés parfaits; or il est facile de s'assurer que les quatre polynômes ne peuvent être à la fois carrés parfaits. On a donc

$$\frac{n'k+n}{m'k+m} = -\frac{n'+n}{m'+m}, \quad \frac{n'k-n}{m'k-m} = -\frac{n'-n}{m'-m},$$

d'où

$$k = -\frac{mn}{m'n'}, \quad mn' + nm' = 0.$$

Aucune des deux constantes m' et n' ne peut être nulle; on fera pour simplifier $m' = n' = 1$; on a ainsi $n = -m$, $k = m^2$; on prendra $m = \sqrt{k}$, $n = -\sqrt{k}$. Si l'on remplace m et n par leurs valeurs, les relations (23) deviennent

$$(24) \qquad \frac{c-b}{c-a} = \frac{B}{A}\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad \frac{d-b}{d-a} = \frac{B}{A}\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2.$$

On en déduit

$$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} = \sqrt[4]{\frac{(a-c)(d-b)}{(a-d)(c-b)}}.$$

Si l'on pose, comme au n° 262,

$$H = \sqrt{(a-d)(c-b)}, \quad H' = \sqrt{(a-c)(a-b)},$$

on a

$$(25) \qquad \sqrt{k} = -\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H'}}{\sqrt{H} + \sqrt{H'}}.$$

L'une des équations (24) donne le rapport

$$(26) \qquad \frac{B}{A} = \frac{c-b}{c-a}\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2.$$

On obtient les deux rapports $\frac{C}{A}$ et $\frac{D}{A}$, en remarquant qu'aux valeurs $x = -1$, $x = 1$ correspondent respectivement les valeurs $y = d$, $y = c$ et comparant les expressions (12) et (15); on trouve ainsi

$$(27) \qquad \frac{C}{A} = \frac{d-c}{d-a}\,\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2(1+k)}, \quad \frac{D}{A} = \frac{c-d}{c-a}\,\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2(1+k)}.$$

La formule de transformation est

$$(28)\qquad \frac{y-b}{y-a}=\frac{c-b}{c-a}\left[\frac{(1+\sqrt{k})(1-x\sqrt{k})}{(1-\sqrt{k})(1+x\sqrt{k})}\right]^2,$$

et l'on a (*Fundamenta* de Jacobi)

$$(29)\qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{4\sqrt{k}}{a-b}\sqrt{\frac{AB}{CD}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Transformations réelles.

265. Lorsque le polynôme Y a ses coefficients réels, et que y varie entre des limites telles, que $\sqrt{\pm Y}$ soit réelle, ce qui a lieu dans les applications, on cherche à opérer la transformation à l'aide d'une formule réelle, et de manière que le module k soit inférieur à l'unité et que x varie entre -1 et $+1$. Il y a plusieurs cas à considérer, suivant que les quatre racines du polynôme Y sont réelles, deux réelles et deux imaginaires, ou les quatre imaginaires, et que le polynôme, sous le radical, est précédé du signe + ou du signe −.

Considérons d'abord le cas où les *quatre racines sont réelles*. Nous les supposerons rangées par ordre de grandeurs croissantes, savoir : $a<b<c<d$. Nous opérerons la transformation par une formule du second degré, et nous adopterons de préférence le premier mode, qui est plus simple que le second (n° 263) :

1° Soit d'abord à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour que le radical soit réel, il faut que y varie de b à c, ou de d à $+\infty$ et de $-\infty$ à a.

Dans le premier cas, nous prendrons les formules telles qu'elles ont été établies

$$(30)\quad k=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},\quad k'=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},\quad g=\frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)},$$

$$(31)\qquad y=\frac{b(c-a)-a(c-b)x^2}{(c-a)-(c-b)x^2};$$

le module k et le multiplicateur g sont réels, et le module inférieur à

l'unité. La formule inverse

$$x^2 = \frac{(c-a)(y-b)}{(c-b)(y-a)} = \frac{c-a}{c-b}\left(1 - \frac{b-a}{y-a}\right),$$

déduite de l'équation (17), montre que, quand y croît de b à c, x croît de 0 à 1.

Dans le second cas, nous prendrons les formules que l'on déduit des précédentes, en permutant a et c, b et d; le module et le multiplicateur ne changent pas; la formule de transformation devient

$$(32) \qquad y = \frac{d(c-a) - c(d-a)x^2}{(c-a) - (d-a)x^2}.$$

La formule inverse

$$x^2 = \frac{(c-a)(y-d)}{(d-a)(y-c)} = \frac{c-a}{d-a}\left(1 - \frac{d-c}{y-c}\right)$$

montre que, quand y croît de d à $+\infty$, puis de $-\infty$ à a, x croît de 0 à $\sqrt{\frac{c-a}{d-a}}$, puis de cette quantité à 1.

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{-Y}}$. Pour que le radical soit réel, il faut que y varie de a à b ou de c à d. Dans le premier cas, nous prendrons les formules que l'on déduit de (30) et (31) par une permutation circulaire des quatre lettres a, b, c, d en sens rétrograde, en ayant soin toutefois de multiplier g par $\sqrt{-1}$,

$$(33) \quad k = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}, \quad k' = \sqrt{\frac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)}}, \quad g = \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)(d-b)},$$

$$(34) \qquad y = \frac{a(d-b) + d(b-a)x^2}{(d-b) + (b-a)x^2}, \quad x^2 = \frac{(d-b)(y-a)}{(b-a)(d-y)}.$$

Quand y croît de a à b, x croît de 0 à 1.

On obtient les formules relatives au second cas en permutant dans les formules précédentes a et c, b et d; le module et le multiplicateur

ne changent pas; la formule de transformation devient

$$(35)\qquad y=\frac{c(d-b)-b(d-c)x^2}{(d-b)-(d-c)x^2},\quad x^2=\frac{d-b}{d-c}\left(1-\frac{c-b}{y-b}\right).$$

Quand y croît de c à d, x croît de 0 à 1.

266. On déduit facilement de ce qui précède les formules de transformation relatives au cas où le polynôme placé sous le radical est du troisième degré; car l'expression

$$\sqrt{\frac{\pm Y}{d}}=\sqrt{\mp(y-a)(y-b)(y-c)\left(1-\frac{y}{d}\right)}$$

se réduit à

$$\sqrt{\mp(y-a)(y-b)(y-c)}=\sqrt{\mp Y_1}$$

quand d augmente indéfiniment. Il suffira d'introduire cette hypothèse dans les formules, en ayant soin de diviser g par $\sqrt{d}$.

Supposons les trois racines réelles et rangées par ordre de grandeurs croissantes, $a<b<c$. 1° Soit d'abord à transformer $\frac{dy}{\sqrt{-Y_1}}$; pour que le radical soit réel, il faut que y varie de b à c ou de $-\infty$ à a. Dans le premier cas, on emploiera les formules (30) et (31), qui se réduisent à

$$(36)\qquad k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},\quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},\quad g=\frac{1}{2}\sqrt{c-a},$$

$$(37)\qquad y=\frac{b(c-a)-a(c-b)x^2}{(c-a)-(c-b)x^2},\quad x^2=\frac{c-a}{c-b}\left(1-\frac{b-a}{y-a}\right).$$

Quand y croît de b à c, x croît de 0 à 1. Dans le second cas, on emploiera les formules (30) et (32); le module et le multiplicateur sont les mêmes que dans le cas précédent; la formule de transformation se réduit à

$$(38)\qquad y=c-\frac{c-a}{x^2},\quad x^2=\frac{c-a}{c-y}.$$

Quand y croît de $-\infty$ à a, x croît de 0 à 1.

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y_1}}$. Pour que le radical soit réel,

il faut que y varie de a à b ou de c à $+\infty$. Dans le premier cas, on prendra les formules (33) et (34), qui se réduisent à

$$(39) \qquad k=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \quad k'=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}}, \quad g=\frac{1}{2}\sqrt{c-a},$$

$$(40) \qquad y=a+(b-a)x^2, \quad x^2=\frac{y-a}{b-a}.$$

Quand y croît de a à b, x croît de 0 à 1. Dans le second cas, on prendra les formules (33) et (35). Le module et le multiplicateur sont les mêmes que dans le cas précédent; la formule de transformation devient

$$(41) \qquad y=\frac{c-bx^2}{1-x^2}, \quad x^2=1-\frac{c-b}{y-b}.$$

Quand y croît de c à $+\infty$, x croît de 0 à 1.

267. Considérons actuellement le cas où le polynôme du quatrième degré Y a *deux racines réelles et deux imaginaires*. Soient a et b les deux racines réelles, a étant plus grand que b, $c=\alpha+\beta i$, $d=\alpha-\beta i$ les deux racines imaginaires, β étant un nombre positif. Nous commencerons par opérer la transformation du premier degré la plus simple, celle qui consiste à faire disparaître les termes du premier degré dans le polynôme X (n° 261). On a posé, pour cela, $y=\frac{m+nx}{1+x}$; on détermine les deux constantes m et n à l'aide des formules (1) et (2), qui deviennent ici

$$(42) \qquad \left\{\begin{aligned} m+n &= \frac{2(ab-\alpha^2-\beta^2)}{a+b-2\alpha}, \\ m-n &= 2\,\frac{\sqrt{[(a-\alpha)^2+\beta^2][(b-\alpha)^2+\beta^2]}}{a+b-2\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Pour effectuer le calcul, nous emploierons deux angles auxiliaires φ_1 et φ_2, définis par les formules

$$(43) \qquad \operatorname{tang}\varphi_1=\frac{a-\alpha}{\beta}, \quad \operatorname{tang}\varphi_2=\frac{b-\alpha}{\beta},$$

et nous poserons

$$(44)\qquad \varphi' = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \varphi'' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Des formules (43) on déduit

$$(45)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}\,\dfrac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi''}, \\ \beta = \dfrac{(a-b)\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin 2\varphi''} = \dfrac{a-b}{2}\,\dfrac{\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi''}. \end{cases}$$

Les équations (42) deviennent

$$m + n = (a+b) - (a-b)\,\frac{1 + \cos 2\varphi' \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi' \sin 2\varphi''},$$

$$m - n = (a-b)\,\frac{\cos 2\varphi' + \cos 2\varphi''}{\sin 2\varphi' \sin 2\varphi''},$$

d'où

$$(46)\qquad m = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'', \quad n = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cot\varphi' \cot\varphi''.$$

On en déduit

$$m - a = -\frac{a-b}{2}\,\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi' \cos\varphi''}, \qquad n - a = -\frac{a-b}{2}\,\frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi' \sin\varphi''},$$

$$m - b = \frac{a-b}{2}\,\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi' \cos\varphi''}, \qquad n - b = -\frac{a-b}{2}\,\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi' \sin\varphi''},$$

$$m - \alpha = (a-b)\,\frac{\sin\varphi' \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin 2\varphi'' \cos\varphi'}, \quad n - \alpha = -(a-b)\,\frac{\cos\varphi' \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin 2\varphi'' \sin\varphi'},$$

$$(m-a)(m-b) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos^2\varphi' \cos^2\varphi''},$$

$$(n-a)(n-b) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin^2\varphi' \sin^2\varphi''},$$

$$(m-c)(m-d) = (m-\alpha)^2 + \beta^2 = (a-b)^2\,\frac{\cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2}{\sin^2 2\varphi'' \cos^2\varphi'},$$

$$(n-c)(n-d) = (n-\alpha)^2 + \beta^2 = (a-b)^2\,\frac{\cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2}{\sin^2 2\varphi'' \sin^2\varphi'}.$$

La formule de transformation $y = \frac{m + nx}{1 + x}$ devient

$$(47) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \frac{\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'' + x \cot\varphi' \cot\varphi''}{1+x},$$

et l'on a

$$(48) \quad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = -\frac{2}{a-b} \frac{\cot\varphi' \cos\varphi''}{\sqrt{\mp \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2 \cot^2\varphi' \cot^2\varphi'')(1 + x^2 \cot^2\varphi')}}.$$

On effectuera une seconde transformation en posant

$$(49) \qquad x = \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'' \cos\varphi,$$

ce qui donne

$$(50) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \frac{\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'' + \cos\varphi}{1 + \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'' \cos\varphi},$$

$$(51) \qquad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = \pm \frac{\sqrt{\mp \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}}{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi'' \sin^2\varphi}}.$$

Si l'on pose enfin

$$(52) \qquad k = \sin\varphi'', \quad g = \frac{\beta}{\sqrt{\mp \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}}, \quad h = \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi'',$$

on a

$$(53) \qquad y = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \frac{h + \cos\varphi}{1 + h\cos\varphi},$$

$$(54) \qquad \frac{dy}{\sqrt{\pm Y}} = \frac{\pm d\varphi}{g\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

et l'expression différentielle est ramenée à la forme simple des intégrales elliptiques (n° **230**).

1° Proposons-nous d'abord de transformer l'expression $\frac{dy}{\sqrt{-Y}}$. Le radical n'est réel que si y varie de b à a. Appelons ψ_1 et ψ_2 les angles définis par les formules (43), et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; dans le cas actuel, nous prendrons $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$; de cette manière, $\cos\varphi_1$ et

$\cos\varphi_2$ sont positifs, et le multiplicateur g réel; β étant positif et a plus grand que b, l'angle $\varphi'' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ est positif; puisque $\frac{1+h}{1-h} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$, la constante h est comprise entre -1 et $+1$. La formule de transformation (53) pouvant être mise sous la forme

$$(55) \qquad y = b + \frac{a-b}{1 + \frac{1+h}{1-h}\cot^2\frac{\varphi}{2}} = b + \frac{a-b}{1 + \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\cot^2\frac{\varphi}{2}},$$

on voit que, quand φ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, y croît de b à a. On mettra donc le signe $+$ devant le second membre de l'équation (54).

2° Soit maintenant à transformer $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Le radical est réel quand y varie de a à $+\infty$ et de $-\infty$ à b. Nous prendrons ici $\varphi_2 = \psi_2$ et $\varphi_1 = \psi_1 + \pi$; de cette manière, $\cos\varphi_2$ étant positif, $\cos\varphi_1$ négatif, le multiplicateur g est réel; la constante h est plus grande que 1 en valeur absolue. L'angle $\varphi'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. La formule (55) montre que, quand φ croît de o à l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{h}$, y décroît de b à $-\infty$, et que, quand φ croît de cet angle à π, y décroît de $+\infty$ à a. Il faudra mettre le signe $-$ devant le second membre de l'équation (54).

268. Le cas où le polynôme est du troisième degré et n'a qu'une racine réelle se déduit du précédent; car l'expression

$$\sqrt{\frac{\pm Y}{a}} = \sqrt{\mp(y-b)(y-c)(y-d)\left(1 - \frac{y}{a}\right)}$$

se réduit à

$$\sqrt{\mp(y-b)(y-c)(y-d)} = \sqrt{\mp Y_1},$$

quand a augmente indéfiniment. Il faudra diviser g par $\sqrt{a}$: on a alors $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $h = 1$, et, en prenant $\varphi_2 = \psi_2$,

$$(56) \qquad k = \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\varphi_2}{2}\right), \quad g = \sqrt{\frac{\beta}{\cos\varphi_2}}.$$

La formule de transformation (50) peut être mise sous la forme

$$y = \frac{a\cos\varphi_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + b\cos\varphi_2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi_2\cos^2\frac{\varphi}{2}};$$

si l'on remarque que $a\cos\varphi_1$ tend vers la limite $\mp\beta$, elle se réduit à

$$(57)\qquad y = b \mp \frac{\beta}{\cos\varphi_2}\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}.$$

269. Il nous reste à examiner le cas où le polynôme du quatrième degré Y a ses *quatre racines imaginaires* $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha - \beta i$, $c = \gamma + \delta i$, $d = \gamma - \delta i$, β et δ étant supposés positifs et $\alpha - \gamma$ positif. Nous commencerons encore par effectuer la transformation du premier degré en posant $y = \frac{m + nx}{1 + x}$, de manière à faire disparaître les termes du premier degré (nº 261). On a

$$m + n = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2}{\alpha - \gamma},$$

$$m - n = \frac{\sqrt{[(\alpha-\gamma)^2 + (\beta+\delta)^2][(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2]}}{\alpha - \gamma}.$$

Posons

$$(58)\qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{\beta+\delta}{\alpha-\gamma},\quad \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma},\quad \varphi' = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},\quad \varphi'' = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2},$$

nous aurons

$$m + n = \frac{\alpha\cos 2\varphi'' + \gamma\cos 2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\quad m - n = \frac{\alpha-\gamma}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},$$

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} m &= \frac{\alpha\cos^2\varphi'' - \gamma\sin^2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}, & \beta &= (\alpha-\gamma)\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\\ n &= \frac{-\alpha\sin^2\varphi'' + \gamma\cos^2\varphi'}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}, & \delta &= (\alpha-\gamma)\frac{\sin\varphi''\cos\varphi''}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},\end{aligned}\right.$$

$$(m-\alpha)^2 + \beta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\sin^2\varphi'}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},\quad (n-\alpha)^2 + \beta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\cos^2\varphi'}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},$$

$$(m-\gamma)^2 + \delta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\cos^2\varphi''}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},\quad (n-\gamma)^2 + \delta^2 = (\alpha-\gamma)^2\frac{\sin^2\varphi''}{\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{\cos\varphi'}{\beta\cos\varphi''}\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2\cot^2\varphi')(1 + x^2\operatorname{tang}^2\varphi'')}}.$$

Pour achever la transformation, on posera $x = -\operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi$, d'où

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\sin\varphi'}{\beta\cos\varphi''}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi'\cos^2\varphi''}\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on pose ensuite

$$(60)\qquad k^2 = 1 - \operatorname{tang}^2\varphi' \operatorname{tang}^2\varphi'' = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi'\cos^2\varphi''},\quad g = \frac{\beta\cos\varphi''}{\sin\varphi'},$$

on a finalement

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{d\varphi}{g\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On prendra pour φ_1 et φ_2 des angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, de manière que $\cos\varphi_1$ et $\cos\varphi_2$ soient positifs. Le module k est moindre que 1. La formule de transformation est

$$(61)\qquad y = n + \frac{m-n}{1+x} = n + \frac{2\beta}{\sin 2\varphi'}\,\frac{1}{1 - \operatorname{tang}\varphi' \operatorname{tang}\varphi}.$$

Quand φ croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, y croît de n à $+\infty$; φ croissant ensuite de $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ à $\frac{\pi}{2}$, y croît de $-\infty$ à n.

Remarquons que, dans les deux cas traités aux n^{os} **267** et **269**, si l'on pose $\sin\varphi = t$ pour ramener l'intégrale elliptique à la forme canonique, les formules de transformation (50) et (61) sont irrationnelles par rapport à t.

Les trois intégrales elliptiques.

270. Après l'intégration des expressions rationnelles, les géomètres se sont occupés des expressions irrationnelles, et d'abord de celles qui renferment un radical carré. Lorsque le polynôme placé sous le radical est du premier ou du second degré, l'intégrale s'exprime par des quantités algébriques ou logarithmiques; mais il n'en est plus de même lorsque le polynôme est d'un degré plus élevé. Le cas où le polynôme est du troisième ou du quatrième degré donne naissance à une classe d'intégrales définies, que l'on a appelées *intégrales elliptiques,* parce qu'elles servent à l'évaluation des arcs des sections coniques. Le célèbre

théorème d'Euler, dont nous parlerons plus tard, a été le point de départ des recherches sur ce sujet. Legendre a découvert ensuite un grand nombre de propriétés de ces nouvelles transcendantes (*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, 1794); son *Traité des fonctions elliptiques* contient l'exposé de ses propres découvertes et de celles de ses devanciers.

Considérons l'intégrale définie

$$\int F(y, \sqrt{Y})\, dy, \tag{1}$$

où Y désigne un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré, et $F(y, \sqrt{Y})$ une fonction rationnelle en y et $\sqrt{Y}$. Cette fonction peut être mise sous la forme

$$\frac{M + M'\sqrt{Y}}{N + N'\sqrt{Y}} = \frac{(M + M'\sqrt{Y})(N - N'\sqrt{Y})}{N^2 - N'^2 Y} = \frac{P + P'\sqrt{Y}}{Q},$$

M, M′, N, N′, P, P′, Q désignant des polynômes entiers en y; on en déduit

$$\int F(y, \sqrt{Y})\, dy = \int \frac{P}{Q}\, dy + \int \frac{P'\sqrt{Y}}{Q}\, dy.$$

La première intégrale du second membre, portant sur une fraction rationnelle, s'exprime par une fraction rationnelle et des termes de la forme $\log(y - \alpha)$. Il reste à considérer la seconde intégrale, que l'on écrit

$$\int \frac{P'Y}{Q} \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Nous avons vu comment, par une substitution du premier ou du second degré, on transforme l'expression $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ en une autre $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynôme du quatrième degré en x de la forme canonique $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. L'intégrale précédente se ramène ainsi à l'intégrale

$$\int f(x) \frac{dx}{\sqrt{X}}. \tag{2}$$

$f(x)$ désignant une fraction rationnelle en x. Cette fraction rationnelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{M_1 + M'_1 x}{N_1 + N'_1 x} = \frac{(M_1 + M'_1 x)(N_1 - N'_1 x)}{N_1^2 - N'^2_1 x^2} = \frac{P_1 + P'_1 x}{Q_1},$$

M_1, M'_1, N_1, N'_1, P_1, P'_1, Q_1 désignant des polynômes entiers en x^2. On a ainsi

$$\int f(x) \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{P_1}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{P'_1 x}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

On obtient la seconde intégrale en posant $x^2 = x'$; car alors le radical ne porte plus que sur un polynôme du second degré. Il reste à étudier l'intégrale

$$(3) \qquad \int \frac{P_1}{Q_1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

271. La fraction rationnelle $\frac{P_1}{Q_1}$ peut être décomposée en termes de la forme Ax^{2n}, n étant un nombre entier positif ou négatif, et en termes de la forme $\frac{A}{(x^2 - h^2)^p}$, p étant un nombre entier positif. Considérons d'abord les termes de la première sorte. Soit $X = A + Bx^2 + Cx^4$. On a

$$D_x(x^{2n+1}\sqrt{X}) = (2n+1)x^{2n}\sqrt{X} + \frac{x^{2n+1}(Bx + 2Cx^3)}{\sqrt{X}}$$
$$= \frac{(2n+1)Ax^{2n} + (2n+2)Bx^{2n+2} + (2n+3)Cx^{2n+4}}{\sqrt{X}},$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^{2n+1}\sqrt{X} = (2n+1)A\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}} + (2n+2)B\int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}} \\ + (2n+3)C\int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}}. \end{aligned} \right.$$

Quand n est positif ou nul, cette équation ramène l'intégrale

$$\int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}}$$

aux deux précédentes

$$\int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}}.$$

En opérant ainsi plusieurs fois successivement, on arrive aux deux intégrales

$$(5) \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Quand n est négatif, cette même équation ramène l'intégrale

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{X}}$$

aux deux autres

$$\int \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^{2n+4}\,dx}{\sqrt{X}},$$

et, après plusieurs opérations successives, on arrive encore aux deux intégrales (5).

272. Considérons maintenant les termes de la seconde sorte, on a

$$\begin{aligned} D_x \frac{x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= \frac{\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} + \frac{x(Bx+2Cx^3)}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} - \frac{2(p-1)x^2\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^p} \\ &= \frac{(A+2Bx^2+3Cx^4)(x^2-h^2)-2(p-1)(Ax^2+Bx^4+Cx^6)}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}}. \end{aligned}$$

Posons

$$A+2Bx^2+3Cx^4 = A_1+2B_1(x^2-h^2)+3C(x^2-h^2)^2,$$

les deux constantes A_1 et B_1 ayant les valeurs

$$A_1 = A+2Bh^2+3Ch^4, \quad B_1 = B+3Ch^2.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par $2x\,dx$, et si l'on intègre, on obtient

$$Ax^2+Bx^4+Cx^6 = E+A_1(x^2-h^2)+B_1(x^2-h^2)^2+C(x^2-h^2)^3,$$

en posant $E = h^2(A + Bh^2 + Ch^4)$. Il en résulte

$$D_x \frac{x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} = -\frac{(2p-2)E}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}} - \frac{(2p-3)A_1}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} - \frac{(2p-4)B_1}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} - \frac{(2p-5)C}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}},$$

et par suite

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{-x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= (2p-2)E\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^p\sqrt{X}} + (2p-3)A_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} \\ &+ (2p-4)B_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} + (2p-5)C\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}}.\end{aligned}\right.$$

Si la constante E n'est pas nulle, de cette équation on déduira la première intégrale en fonction des trois suivantes, et, comme l'opération peut être continuée jusqu'à ce que l'on ait $p = 2$, on arrivera à l'intégrale

$$(7)\qquad \int\frac{dx}{(x^2-h^2)\sqrt{X}}$$

et à d'autres de la première sorte, se ramenant, par conséquent, aux deux intégrales (5).

Si l'on avait $E = 0$, l'équation se réduirait à

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{-x\sqrt{X}}{(x^2-h^2)^{p-1}} &= (2p-3)A_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-1}\sqrt{X}} \\ &+ (2p-4)B_1\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-2}\sqrt{X}} + (2p-5)C\int\frac{dx}{(x^2-h^2)^{p-3}\sqrt{X}}.\end{aligned}\right.$$

Nous remarquons que la constante A_1 ne peut être nulle en même temps que E; car on aurait alors $B^2 - 4AC = 0$, et le polynôme X serait carré parfait. La relation précédente ramène l'intégrale cherchée aux deux intégrales (5).

En résumé, l'intégrale

$$\int F(y, \sqrt{Y})\,dy$$

est ainsi ramenée aux trois intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 - h^2)\sqrt{X}}. \tag{9}$$

A la place de la seconde, Legendre considérait l'intégrale

$$\int \sqrt{X}\,dx,$$

qui s'exprime aisément à l'aide des deux premières.

L'*intégrale de première espèce*

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \tag{10}$$

est l'inverse de la fonction elliptique $x = \lambda(z, k)$. A chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de z de la forme

$$z + 2m\omega + m'\omega', \quad \omega - z + 2m\omega + m'\omega'.$$

Intégrale elliptique de seconde espèce.

273. L'intégrale elliptique de seconde espèce est

$$u = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \tag{11}$$

Le radical admet les quatre points critiques $a = 1$, $b = \frac{1}{k}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{k}$ (*fig.* 77, n° **221**), qui sont aussi des points critiques algébriques pour la fonction u. Cette fonction devient infinie avec x, et le point O' sur la sphère est un pôle du second degré pour chacune des branches de la fonction; mais, comme il n'entre dans l'expression que des puissances paires, l'intégrale définie relative au lacet O', ou au circuit qui dans le plan embrasse les quatre points critiques, est nulle, et les périodes se réduisent à deux (n° **113**). A chaque système de cycles

donnant un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce correspond un couple de périodes $2\omega_1$, ω'_1 de l'intégrale de seconde espèce. Il en résulte qu'à chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de u de la forme

$$u + 2m\omega_1 + m'\omega'_1, \quad \omega_1 - u + 2m\omega_1 + m'\omega'_1.$$

Si l'on change de variable en posant $x = \lambda(z, k)$, d'où

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = dz,$$

l'intégrale de seconde espèce prend la forme

$$(12) \qquad u = \zeta(z) = \int_0^z \lambda^2(z)\,dz.$$

Elle devient infinie avec $\lambda(z)$, c'est-à-dire aux points

$$\alpha = \frac{\omega'}{2} + m\omega + m'\omega';$$

si l'on pose $z = \alpha + z'$, on a, dans le voisinage de l'un des points α,

$$\lambda^2(z) = \frac{1}{k^2\lambda^2(z')} = \frac{1}{k^2z'^2} + \beta + \gamma z'^2 + \ldots,$$

$$u = -\frac{1}{k^2z'} + C + \beta z' + \frac{\gamma}{3}z'^3 + \ldots.$$

On en conclut que u est une fonction *méromorphe* de z, admettant comme pôles simples ceux de $\lambda(z)$.

Il est facile d'exprimer cette fonction à l'aide de l'une des fonctions θ ou ϑ, formées avec les deux constantes ω et ω'. De l'équation

$$\lambda^2(z) = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_z^2\log\theta(z)\right] = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - D_z^2\log\vartheta(z)\right],$$

trouvée au n° 169, on déduit en effet

$$(13) \quad \zeta(z) = \frac{1}{k^2}\left[z\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_z\log\theta(z)\right] = \frac{1}{k^2}\left[z\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - D_z\log\vartheta(z)\right].$$

Quand z augmente de ω ou de ω', le second membre éprouve des accroissements constants

$$(14) \qquad \omega_1 = \frac{1}{k^2}\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\omega, \quad \omega'_1 = \frac{1}{k^2}\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\omega' = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} + \frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega';$$

on en déduit la relation

$$(15) \qquad \omega\omega'_1 - \omega'\omega_1 = \frac{2\pi i}{k^2},$$

entre les périodes des intégrales de première et de seconde espèce.

Lorsque le module k est réel et inférieur à l'unité, si z est réelle, la formule (13) ne contient que des quantités réelles; si z est imaginaire et de la forme yi, y étant réelle, le second membre est de la forme Yi, Y étant réelle.

274. Considérons maintenant la fonction inverse x de la variable u, fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x^2},$$

à laquelle on joint la condition initiale $x = 0$ pour $u = 0$. En répétant le raisonnement du n° 219, on voit que, lorsque la variable u se meut dans le voisinage d'un point où la fonction x acquiert l'une des valeurs ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, la fonction reste monotrope. L'étude de l'intégrale définie montre que, quand x partant de l'origine y revient par différents chemins, u acquiert les valeurs $u_1 = m\omega_1 + m'\omega'_1$; réciproquement, si u va de l'origine à l'un de ces points u_1 par un chemin convenable, la fonction x s'annule. L'équation différentielle

$$du = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$

dont le second membre se développe en une série convergente, pour les valeurs de x dont le module est inférieur à 1 et au module de $\frac{1}{k}$, est de

la forme

$$du = \pm(x^2 + ax^4 + \ldots)\,dx;$$

on en déduit

$$u - u_1 = \pm\left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^5}{5} + \ldots\right),$$

$$x = \pm\sqrt[3]{3}\,(u - u_1)^{\frac{1}{3}} + \ldots;$$

ainsi, quand la variable u tourne autour du point u_1, la branche considérée de la fonction x acquiert trois valeurs différentes; ce point est donc un point critique algébrique pour cette branche de la fonction. La fonction x conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de u; on en conclut qu'elle admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de u; car si elle n'en admettait qu'un nombre limité, une fonction symétrique et entière de ces valeurs serait une fonction holomorphe et doublement périodique de u, ce qui est impossible (n° **146**).

Intégrale elliptique de troisième espèce.

275. L'intégrale de troisième espèce est

$$(16)\qquad u = \int_0^x \frac{dx}{(x^2 - h^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

Outre les quatre points critiques du radical $a = 1$, $b = \frac{1}{k}$, $c = -1$, $d = -\frac{1}{k}$, qui sont aussi des points critiques algébriques pour la fonction u, la fonction placée sous le signe d'intégration a deux pôles $x = \pm h$, qui sont des points critiques logarithmiques de la fonction u (n° **60**), et qui fournissent une période polaire

$$\omega'' = \frac{\pi i}{h\sqrt{(1 - h^2)(1 - k^2h^2)}}.$$

Le point O′ sur la sphère étant un point ordinaire, l'intégrale définie relative au circuit qui embrasse tous les points critiques est nulle; il en résulte que, si l'on fait abstraction de la période polaire, toutes les autres périodes se réduisent à deux; à chaque couple de périodes

elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce correspond un couple de périodes $2\omega_2$, ω'_2 de l'intégrale de troisième espèce. Cette intégrale admet donc trois périodes distinctes, de sorte qu'à chaque valeur de x correspondent deux séries de valeurs de u de la forme

$$u + 2m\omega_2 + m'\omega''_2 + m''\omega'', \quad \omega_2 - u + 2m\omega_2 + m'\omega'_2 + m''\omega''.$$

Si l'on change de variable en posant $x = \lambda(z, k)$, et si l'on remplace la constante h par $\lambda(a)$, l'intégrale de troisième espèce prend la forme

$$(17) \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)}.$$

Elle devient infinie aux points critiques logarithmiques

$$z = \pm a + m\omega + m'\omega',$$

et admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de z. On peut aussi l'exprimer à l'aide de la fonction θ.

La fonction doublement périodique $\frac{1}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)}$, aux périodes ω, ω', a deux infinis simples $z = \pm a$; les résidus correspondants sont

$$\pm \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)}.$$

On a donc, d'après le théorème de M. Hermite (n° 168),

$$\frac{1}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)} = \mathrm{H} + \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)} \mathrm{D}_z \log \frac{\theta_1(z-a)}{\theta_1(z+a)},$$

et, en remplaçant z par $z + \frac{\omega'}{2}$,

$$\frac{k^2\lambda^2(z)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = \mathrm{H} + \frac{1}{2\lambda(a)\lambda'(a)} \mathrm{D}_z \log \frac{\theta(z-a)}{\theta(z+a)}.$$

Si l'on fait $z = 0$ dans cette dernière équation, on obtient la constante

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\lambda(a)\lambda'(a)} \mathrm{D}_a \log \theta(a).$$

Les deux équations précédentes deviennent ainsi

$$(18)\qquad \frac{\lambda(a)\lambda'(a)}{\lambda^2(z)-\lambda^2(a)} = D_a \log\theta(a) + \frac{1}{2} D_z \log\frac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)},$$

$$(19)\qquad \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\lambda^2(z)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = D_a \log\theta(a) + \frac{1}{2} D_z \log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)}.$$

On en déduit

$$(20)\qquad \int_0^z \frac{\lambda(a)\lambda'(a)\,dz}{\lambda^2(z)-\lambda^2(a)} = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a-z)}{\vartheta_1(a+z)},$$

$$(21)\qquad \int_0^z \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\lambda^2(z)\,dz}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)} = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-z)}{\vartheta(a+z)},$$

les logarithmes s'annulant pour $z=0$.

C'est à Jacobi que l'on doit l'expression des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce par la fonction θ (*Fundamenta*); l'intégrale (21) est celle que Jacobi appelait spécialement *intégrale de troisième espèce,* et il l'a désignée par le symbole $\Pi(z, a, k)$, ou, plus simplement $\Pi(z, a)$, en sous-entendant le module k. La variable z est l'*argument,* la constante a le *paramètre* de l'intégrale. On a ainsi

$$(22)\qquad \Pi(z,a) = z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)} = z\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-z)}{\vartheta(a+z)}.$$

Quand z augmente de ω ou de ω', le second membre éprouve des accroissements constants

$$(23)\qquad \omega_2 = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega,\quad \omega'_2 = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega' + \frac{2\pi a i}{\omega}.$$

D'ailleurs le logarithme donne la période polaire $\omega'' = \pi i$. On en déduit la relation

$$(24)\qquad \omega\omega'_2 - \omega'\omega_2 = 2\pi a i,$$

entre les périodes des intégrales de première et de troisième espèce.

276. Examinons maintenant la fonction inverse x de u, fonction définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = (x^2 - h^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

à laquelle on joint la condition initiale $x = 0$ pour $u = 0$. On verra, comme précédemment, que, lorsque la variable u se meut dans le voisinage d'un point où la fonction acquiert l'une des valeurs ± 1, $\pm \frac{1}{k}$, la fonction reste monotrope. L'étude de l'intégrale définie (16) montre que, quand x s'éloigne à l'infini par un chemin déterminé, u tend vers une valeur finie u_1; réciproquement, quand u va de l'origine au point u_1 par un chemin convenable, x devient infinie; en posant $x = \frac{1}{x'}$, on a

$$du = -\frac{x'^2\,dx'}{(1 - h^2x'^2)\sqrt{(1 - x'^2)(k^2 - x'^2)}} = \mp\left(\frac{x'^2}{k} + ax'^4 + \ldots\right)dx',$$

$$u - u_1 = \mp\left(\frac{x'^3}{3k} + \frac{ax'^5}{5} + \ldots\right),$$

$$x' = \pm\sqrt[3]{3k}\,(u - u_1)^{\frac{1}{3}} + \ldots.$$

Ainsi, quand la variable u tourne autour du point u_1, la branche considérée de la fonction x acquiert trois valeurs différentes; ce point est donc un point critique algébrique pour cette branche de la fonction. La fonction x admet une infinité de valeurs pour chaque valeur de u; car si elle n'admettait qu'un nombre limité, une fonction symétrique de ces valeurs serait une fonction monotrope triplement périodique, ce qui est impossible (n° 143). L'étude de l'intégrale définie (16) montre aussi que u ne devient infinie que quand x tend vers l'une des valeurs $\pm h$; on en conclut que, réciproquement, toutes les branches de la fonction x tendent vers l'une des deux valeurs $\pm h$, quand la variable u s'éloigne à l'infini; sur la sphère, le point $u = \infty$ est un point d'indétermination, et la fonction x se comporte comme une exponentielle (n° 59).

277. De la formule (22) on déduit les suivantes :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi\left(z, a+\frac{\omega}{2}\right) &= z\,\frac{\theta_3'(a)}{\theta_3(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_3(a-z)}{\theta_3(n+z)},\\ \Pi\left(z, a+\frac{\omega'}{2}\right) &= z\,\frac{\theta_1'(a)}{\theta_1(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_1(a-z)}{\theta_1(a+z)},\\ \Pi\left(z, a+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) &= z\,\frac{\theta_2'(a)}{\theta_2(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta_2(a-z)}{\theta_2(a+z)}, \end{aligned}\right.$$

et celles-ci donnent

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi\left(z, a+\frac{\omega}{2}\right) - \Pi(z, a) &= z\,\frac{\nu'(a)}{\nu(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\nu(a-z)}{\nu(a+z)},\\ \Pi\left(z, a+\frac{\omega'}{2}\right) - \Pi(z, a) &= z\,\frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\lambda(a-z)}{\lambda(a+z)},\\ \Pi\left(z, a+\frac{\omega+\omega'}{2}\right) - \Pi(z, a) &= z\,\frac{\mu'(a)}{\mu(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\mu(a-z)}{\mu(a+z)}. \end{aligned}\right.$$

Si, dans la formule (22), on permute les lettres z et a, il vient

$$\Pi(a, z) = a\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)},$$

d'où

$$(27)\quad \Pi(z, a) - \Pi(a, z) = z\,\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} - a\,\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = k^2[a\zeta(z) - z\zeta(a)].$$

Cette dernière relation effectue la permutation du paramètre et de l'argument.

De la formule (22) on déduit encore la relation

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi(z, a) &= \Pi\left(\frac{a+z}{2}, \frac{a+z}{2}\right) - \Pi\left(\frac{a-z}{2}, \frac{a-z}{2}\right)\\ &\quad - \frac{a+z}{2}\,\frac{\theta'\left(\frac{a+z}{2}\right)}{\theta\left(\frac{a+z}{2}\right)} + \frac{a-z}{2}\,\frac{\theta'\left(\frac{a-z}{2}\right)}{\theta\left(\frac{a-z}{2}\right)} + z\,\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}, \end{aligned}\right.$$

que l'on met sous la forme

$$(29)\quad \begin{cases} \Pi(z,a) = \Pi\left(\frac{a+z}{2}, \frac{a+z}{2}\right) - \Pi\left(\frac{a-z}{2}, \frac{a-z}{2}\right) \\ \qquad + k^2\frac{a+z}{2}\zeta\left(\frac{a+z}{2}\right) - k^2\frac{a-z}{2}\zeta\left(\frac{a-z}{2}\right) - k^2 z\zeta(a). \end{cases}$$

L'intégrale de troisième espèce $\Pi(z, a)$, qui dépend des trois quantités k, a, z, s'exprime ainsi par une somme de fonctions dont chacune ne dépend que de deux quantités.

278. Dans l'intégrale (21), représentons le dénominateur par $1 + n\lambda^2(z)$, c'est-à-dire posons $n = -k^2\lambda^2(a)$. Si la quantité donnée n est réelle, le module k réel, positif, et moindre que l'unité, et qu'on veuille calculer a, plusieurs cas se présentent : 1° si n est positive, on posera $\lambda^2(ai) = -\frac{n}{k^2}$, a étant réelle et positive (n° 236), et l'intégrale sera représentée par $\Pi(z, ai)$; 2° si n est comprise entre 0 et $-k^2$, on posera $\lambda^2(a) = -\frac{n}{k^2}$, a étant réelle et positive, et l'intégrale sera $\Pi(z, a)$; 3° si n est comprise entre $-k^2$ et -1, on posera $\lambda^2\left(ai + \frac{\omega}{2}\right) = -\frac{n}{k^2}$, a étant encore réelle et positive (n° 225), et l'intégrale sera $\Pi\left(z, ai + \frac{\omega}{2}\right)$; 4° si n est comprise entre -1 et $-\infty$, on posera $\lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right) = -\frac{n}{k^2}$, a étant toujours réelle et positive, ce qui donne l'intégrale $\Pi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right)$. D'après les formules (25), le troisième cas se ramène au premier, et le quatrième au second ; et, par conséquent, dans l'intégrale de troisième espèce, lorsque la quantité n est réelle, on peut supposer le paramètre a réel ou de la forme ai, a étant réelle.

Considérons le cas où la variable z est réelle. Si le paramètre a est réel, le second membre de l'équation (22) ne contient que des quantités réelles. Si le paramètre a est imaginaire et de la forme $a'i$, d'après la définition, la fonction Π est imaginaire et de la forme Ai; les termes du second membre présentent la même forme, mais chacune des deux

fonctions $\theta(a-z)$, $\theta(a+z)$ dépend de trois quantités réelles distinctes k, z et a'.

Considérons maintenant le cas où z est imaginaire et de la forme yi. Lorsque le paramètre a est réel, ce cas se ramène au précédent par la permutation du paramètre et de l'argument. Lorsque le paramètre a est imaginaire et de la forme $a'i$, les deux fonctions $\theta(a-z)$, $\theta(a+z)$ sont de la forme $\theta(bi)$, b étant réel, et on les obtient sans difficulté.

Remarques sur les périodes.

279. Considérons deux périodes correspondantes quelconques Ω et Ω_1 des intégrales elliptiques de première et de seconde espèces; ces périodes sont les intégrales définies

$$\Omega = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \Omega_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta x},$$

relatives à un même cycle partant de l'origine et y revenant; ce sont des fonctions du module k qui ont pour dérivées

$$\frac{d\Omega}{dk} = k\int \frac{x^2\,dx}{(1-k^2x^2)\Delta x}, \quad \frac{d\Omega_1}{dk} = k\int \frac{x^4\,dx}{(1-k^2x^2)\Delta x}.$$

De l'égalité

$$D_x \frac{x(1-x^2)}{\Delta x} = \frac{1-x^2}{\Delta x} - \frac{k'^2x^2}{(1-k^2x^2)\Delta x},$$

on déduit par l'intégration

$$\frac{d\Omega}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\Omega - \Omega_1). \tag{30}$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d\Omega}{dk} - k^2\frac{d\Omega_1}{dk} = k\Omega_1,$$

d'où

$$\frac{d\Omega_1}{dk} = \frac{1}{kk'^2}[\Omega - (2-k^2)\Omega_1]. \tag{31}$$

Des deux équations différentielles simultanées (30) et (31) on déduit les équations différentielles du second ordre

$$(32)\qquad \frac{\left(kk'^2\dfrac{d\Omega}{dk}\right)}{dk} = k\Omega, \qquad \frac{d\left(k^3k'^2\dfrac{d\Omega_1}{dk}\right)}{dk} = 3k^3\Omega_1,$$

auxquelles satisfont séparément les périodes Ω et Ω_1.

Si l'on considère en particulier les cycles qui se rapportent à un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce, il résulte de ce qui précède que les premières périodes 2ω, $2\omega_1$ satisfont aux équations différentielles simultanées (30) et (31), ainsi qu'aux équations du second ordre (32), et que les secondes périodes ω', ω'_1 satisfont aussi à ces mêmes équations. En remplaçant dans les équations

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\omega - \omega_1), \qquad \frac{d\omega'}{dk} = \frac{k}{k'^2}(\omega' - \omega'_1)$$

ω_1 et ω'_1 par leurs valeurs données par les formules (14), on obtient les deux équations différentielles du premier ordre

$$(33)\qquad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{kk'^2}\left[k^2 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right]\omega,$$

$$(34)\qquad \frac{d\omega'}{dk} = \frac{1}{kk'^2}\left[k^2 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega',$$

auxquelles satisfont ω, ω'; on en déduit

$$(35)\qquad \omega\frac{d\omega'}{dk} - \omega'\frac{d\omega}{dk} = -\frac{2\pi i}{kk'^2}.$$

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES ENTIÈRES.

Développement de la fonction inverse.

280. Si l'on pose $u = \lambda(z)$, on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-(1+k^2)u^2+k^2u^4}}.$$

Le second membre est développable suivant les puissances entières de u, pour les valeurs ayant un module inférieur à 1 ou au module de $\frac{1}{k}$. On obtient ce développement à l'aide d'une formule

$$(1-2\alpha z+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{z}{1}\mathrm{D}_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{z^2}{1.2}\mathrm{D}_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots,$$

établie au n° 97. En remplaçant, dans cette formule, z par ku^2 et posant $\alpha = \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$, on en déduit

$$[1-(1+k^2)u^2+k^2u^4]^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{ku^2}{1}\mathrm{D}_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{k^2u^4}{1.2}\mathrm{D}_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots,$$

et, par suite, en intégrant,

$$(1)\qquad z = u+\frac{k}{1}\frac{u^3}{3}\mathrm{D}_\alpha\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)+\frac{k^2}{1.2}\frac{u^5}{5}\mathrm{D}_\alpha^2\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2+\ldots.$$

Nous représenterons cette série par

$$(2)\qquad z = u+a_1u^3+a_2u^5+\ldots.$$

Un coefficient quelconque

(3) $$a_n = \frac{1}{2n+1}\,\frac{k^n}{1.2\ldots n}\,D_\alpha^n\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^n$$

est un polynôme entier en k, pair, réciproque et du degré $2n$. Les premiers coefficients sont

$$3a_1 = \alpha k,$$
$$5a_2 = \frac{3\alpha^2-1}{1.2}k^2,$$
$$7a_3 = \frac{15\alpha^3-9\alpha}{1.2.3}k^3,$$
$$9a_4 = \frac{105\alpha^4-90\alpha^2+9}{1.2.3.4}k^4,$$
$$11a_5 = \frac{945\alpha^5-1050\alpha^3+225\alpha}{1.2.3.4.5}k^5,$$
$$13a_6 = \frac{10395\alpha^6-14175\alpha^4+4725\alpha^2-225}{1.2.3.4.5.6}k^6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En remplaçant $k\alpha$ par $\frac{k^2+1}{2}$, on a

$$3a_1 = \frac{1+k^2}{2},$$
$$5a_2 = \frac{3+2k^2+3k^4}{2.4},$$
$$7a_3 = \frac{15+9k^2+9k^4+15k^6}{2.4.6},$$
$$9a_4 = \frac{105+60k^2+54k^4+60k^6+105k^8}{2.4.6.8},$$
$$11a_5 = \frac{945+525k^2+450k^4+450k^6+525k^8+945k^{10}}{2.4.6.8.10},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Du développement précédent on déduit celui de z^n, suivant les puissances de u. Si l'on pose

(4) $$z^n = u^n + a_1^{(n)}u^{n+2} + a_2^{(n)}u^{n+4} + \ldots,$$

on a, en effet,

$$(5) \qquad a_p^{(n)} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_u^{2p}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right]_{u=0},$$

$\frac{z}{u}$ étant une fonction de u, donnée par la série (2).

Développement des fonctions elliptiques.

281. Les fonctions $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, ayant les mêmes infinis, se développent en séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de z, et convergentes dans un même cercle, qui a pour rayon la distance de l'origine au pôle le plus voisin. Lorsque le multiplicateur g est égal à l'unité et le module k réel, positif et plus petit que 1, si l'on choisit les périodes comme nous l'avons expliqué aux nos 228 et 229, le rayon du cercle de convergence est $\frac{\omega'}{2i}$.

La fonction $\lambda(z)$ étant impaire, son développement est de la forme

$$(6) \qquad \lambda(z) = \frac{z}{1} - \mathfrak{A}_1\frac{z^3}{1.2.3} + \mathfrak{A}_2\frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

De l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dz} = 1 - (1+k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

on déduit

$$\frac{d^2\lambda}{dz^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3,$$

$$\frac{d^3\lambda}{dz^3} = -(1+k^2-6k^2\lambda^2)\frac{d\lambda}{dz},$$

$$\frac{d^4\lambda}{dz^4} = -(1+k^2-6k^2\lambda^2)\frac{d^2\lambda}{dz^2} + 12k^2\lambda\frac{d\lambda}{dz},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

En faisant $\lambda = 0$, on obtient les valeurs des dérivées pour $z = 0$ et, par conséquent, les coefficients de la série. Ces coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. D'après sa définition par l'équation différentielle (no 221), la fonction $\lambda(z)$ se réduit à $\sin z$, lorsque le module k est nul et le multiplicateur g égal à l'unité; il en résulte que les premiers termes de tous les polynômes, ordonnés par

rapport aux puissances croissantes de k, sont égaux à l'unité, ce qui est d'ailleurs évident par le calcul lui-même.

La relation

$$\lambda\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\lambda(z, k),$$

établie au nº 234, fait voir que le polynôme $\mathfrak{A}_n$ satisfait à la relation

$$(7) \qquad \mathfrak{A}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{A}_n\left(\frac{1}{k}\right),$$

et, par conséquent, qu'il est de degré $2n$ et réciproque.

Nous remarquerons encore la propriété suivante : si l'on pose

$$x = \sqrt{2k}\,\lambda(z), \quad \zeta = z\sqrt{2k},$$

la série prend la forme

$$x = \zeta - \frac{\mathfrak{A}_1}{2k}\frac{\zeta^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{A}_2}{(2k)^2}\frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et l'équation différentielle devient

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 = 1 - \alpha x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\zeta^2} &= -\alpha x + \frac{1}{2}x^3, \\ \frac{d^3x}{d\zeta^3} &= -\left(\alpha - \frac{3}{2}x^2\right)\frac{dx}{d\zeta}, \\ \frac{d^4x}{d\zeta^4} &= -\left(\alpha - \frac{3}{2}x^2\right)\frac{d^2x}{d\zeta^2} + 3x\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

les valeurs des dérivées successives, pour $x = 0$, étant des fonctions entières de α, à coefficients entiers, on en conclut que $\mathfrak{A}_n$ est égal au produit de $(2k)^n$ par une fonction entière de α, à coefficients entiers.

Du développement précédent on déduit celui de $\lambda^n(z)$, suivant les

puissances de z. Soit

$$(8) \qquad \lambda^n(z) = \mathfrak{A}_0^{(n)} \frac{z^n}{1.2\ldots n} - \mathfrak{A}_1^{(n)} \frac{z^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} + \mathfrak{A}_2^{(n)} \frac{z^{n+4}}{1.2\ldots(n+4)} + \ldots,$$

on a

$$(9) \qquad \mathfrak{A}_p^{(n)} = (-1)^p (2p+1)(2p+2)\ldots(2p+n)\left[\mathrm{D}_z^{2p}\left(\frac{u}{z}\right)^n\right]_{z=0}.$$

$\frac{u}{z}$ étant une fonction de z, donnée par la série (6).

La formule de Lagrange établit des relations entre les coefficients des séries (6) et (8) et ceux des séries inverses (2) et (4). D'une part, si l'on regarde u comme une fonction implicite de z, définie par l'équation

$$u = z\frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)},$$

dans laquelle $\frac{z}{u}$ désigne la fonction de u, donnée par la série (2), on a

$$(10) \qquad \mathfrak{A}_p = (-1)^p \left[\mathrm{D}_u^{2p} \frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)^{2p+1}}\right]_{u=0},$$

$$(11) \qquad \mathfrak{A}_p^{(n)} = (-1)^p (2p+1)(2p+2)\ldots(2p+n-1)n \left[\mathrm{D}_u^{2p} \frac{1}{\left(\frac{z}{u}\right)^{2p+n}}\right]_{u=0}.$$

D'autre part, si l'on regarde z comme une fonction implicite de u, définie par l'équation

$$z = u\frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)},$$

dans laquelle $\frac{u}{z}$ désigne la fonction de z, donnée par la série (6), on a

$$(12) \qquad a_p = \frac{1}{1.2\ldots(2p+1)}\left[\mathrm{D}_z^{2p} \frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)^{2p+1}}\right]_{z=0},$$

$$(13) \qquad a_p^{(n)} = \frac{n}{2p+n}\,\frac{1}{1.2\ldots2p}\left[\mathrm{D}_z^{2p} \frac{1}{\left(\frac{u}{z}\right)^{2p+n}}\right]_{z=0}.$$

282. Le développement de la fonction paire $\mu(z)$ est de la forme

$$(14)\qquad \mu(z) = 1 - \mathfrak{B}_1 \frac{z^2}{1.2} + \mathfrak{B}_2 \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

De l'équation différentielle (n° 159)

$$\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2 = 1 - k^2 + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4$$

on déduit

$$\frac{d^2\mu}{dz^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

$$\frac{d^3\mu}{dz^3} = -[1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)]\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{d^4\mu}{dz^4} = -[1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)]\frac{d^2\mu}{dz^2} - 3(2k)^2\mu\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en faisant $\mu = 1$, on obtient les valeurs des dérivées successives pour $z = 0$ et, par conséquent, les coefficients de la série. Ces coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. La fonction $\mu(z)$ se réduisant à $\cos z$, lorsque le module k est nul, les premiers termes de tous ces polynômes, ordonnés par rapport aux puissances croissantes de k, sont égaux à l'unité.

Remarquons que les valeurs des premières dérivées sont des fonctions entières de $2k$, à coefficients entiers, et que la même propriété se continue, parce que la quantité $1 + (2k)^2 - 6k^2(1 - \mu^2)$, qui entre dans l'expression de la seconde dérivée, se réduit à $1 + (2k)^2$ et sa dérivée à $3(2k)^2$, de sorte que, dans le calcul ultérieur, les coefficients de tous les termes, à partir du second, seront des fonctions entières de $2k$.

Le développement de la fonction paire $\nu(z)$ est de la même forme

$$(15)\qquad \nu(z) = 1 - \mathfrak{C}_1 \frac{z^2}{1.2} + \mathfrak{C}_2 \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots;$$

l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2 = -(1 - k^2) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4$$

montre, comme précédemment, que les coefficients sont des polynômes entiers en k, pairs et à coefficients entiers. La fonction $\nu(z)$ se réduisant à une constante, lorsque le module k est nul, les coefficients $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2,\ldots$ s'annulent et, par conséquent, renferment k^2 en facteur commun.

La relation

$$\mu\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \nu(z, k),$$

démontrée au n° 234, fait voir que les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ satisfont à la relation

$$(16) \qquad \mathfrak{C}_n(k) = k^{2n}\mathfrak{B}_n\left(\frac{1}{k}\right).$$

On en conclut que le polynôme $\mathfrak{C}_n(k)$ est du degré $2n$, et, comme il n'a pas de terme indépendant de k, que le polynôme $\mathfrak{B}_n(k)$ est du degré $2n-2$.

Méthode de M. Hermite.

283. Le calcul des coefficients par les dérivées successives est impraticable. M. Hermite a donné une méthode qui permet de trouver directement un coefficient quelconque $\mathfrak{B}_n$ du développement de $\mu(z)$ et qui n'exige que la résolution d'équations du premier degré. Cette méthode repose sur une formule que l'on peut établir de la manière suivante : considérons la fonction

$$\varphi(z) = \mathrm{A}\,\frac{\lambda(z)\nu(z)}{\mu(z)},$$

qui admet les deux périodes ω et ω' et qui satisfait aux relations

$$\varphi\left(z + \frac{\omega+\omega'}{2}\right) = -\varphi(z),$$

$$\varphi\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)\varphi(z) = \mathrm{A}^2.$$

La quantité $\frac{\omega+\omega'}{2}$ joue, dans les propriétés de cette fonction, le même

rôle que la quantité ω dans celles de la fonction proposée $\lambda(z)$. Déterminons la constante A, de manière que la fonction φ ait une valeur égale à l'unité pour $z = \frac{\omega + \omega'}{4}$. De la relation

$$\mu\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)\mu(z) = -\frac{ik'}{k} \quad (\text{n}^\circ\ 77),$$

on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega + \omega'}{4}\right) = \sqrt{\frac{-ik'}{k}},$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{\omega + \omega'}{k}\right) = \sqrt{\frac{k + ik'}{4}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{-ik'(k + ik')};$$

on fera donc

$$\text{A} = k - ik'.$$

De cette manière, la fonction $\varphi(z)$ est une fonction λ, admettant les périodes elliptiques $\omega + \omega'$, ω', au lieu de 2ω, ω'. Si l'on désigne par g_1 et k_1 le multiplicateur et le module de cette nouvelle fonction λ, on a

$$g_1 = \text{A} = k - ik', \quad k_1 = \frac{1}{\text{A}^2} = \frac{k + ik'}{k - ik'},$$

et l'on obtient ainsi la formule

$$(17) \qquad \lambda\left[(k - ik')z, \frac{k + ik'}{k - ik'}\right] = (k - ik')\frac{\lambda(z, k)\nu(z, k)}{\mu(z, k)}.$$

On en déduit

$$(18) \qquad \mu\left[(k - ik')z, \frac{k + ik'}{k - ik'}\right] = (k - ik')\frac{k\mu^2(z, k) + ik'}{\mu(z, k)},$$

et, en changeant le signe de i,

$$(19) \qquad \mu\left[(k + ik')z, \frac{k - ik'}{k + ik'}\right] = (k + ik')\frac{k\mu^2(z, k) - ik'}{\mu(z, k)};$$

la combinaison de ces deux relations donne

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &(k+ik')\mu\left[(k-ik')z,\ \frac{k+ik'}{k-ik'}\right]\\ &+(k-ik')\mu\left[(k+ik')z,\ \frac{k-ik'}{k+ik'}\right]=2k\mu(z,k). \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $k=\cos\gamma$, cette dernière équation prend la forme

$$(21)\qquad e^{\gamma i}\mu(ze^{-\gamma i}, e^{2\gamma i})+e^{-\gamma i}\mu(ze^{\gamma i}, e^{-2\gamma i})=2\cos\gamma\,\mu(z,\cos\gamma).$$

En remplaçant les fonctions μ par leurs développements en séries, on reconnaît que le polynôme $\mathfrak{B}_n(k)$, pair et du degré $2n-2$, satisfait à la relation

$$(22)\qquad e^{(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{-2\gamma i})+e^{-(2n-1)\gamma i}\mathfrak{B}_n(e^{2\gamma i})=2\cos\gamma\,\mathfrak{B}_n(\cos\gamma).$$

Soit

$$(23)\qquad \mathfrak{B}_n(k)=b_0+b_1(2k)^2+b_2(2k)^4+\ldots+b_{n-1}(2k)^{2n-2},$$

la relation précédente devient

$$(24)\qquad \sum_{q=0}^{q=n-1}2^{2q}b_q\cos(2n-4q-1)\gamma=\sum_{p=0}^{p=n-1}2^{2p}b_p\cos^{2p+1}\gamma.$$

Si l'on remplace les puissances de $\cos\gamma$ par leurs expressions en fonction des cosinus des multiples de l'arc γ, expressions données par la formule

$$\begin{aligned} 2^{2p}\cos^{2p+1}\gamma&=\cos(2p+1)\gamma+\frac{2p+1}{1}\cos(2p-1)\gamma\\ &+\frac{(2p+1)2p}{1.2}\cos(2p-3)\gamma+\ldots+\frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1.2\,..p}\cos\gamma, \end{aligned}$$

et, si l'on ordonne le second membre par rapport à ces cosinus, on la transforme en la suivante :

$$(25)\quad \sum_{q=0}^{q=n-1} 2^{2q} b_q \cos(2n-4q-1)\gamma = \sum_{p=0}^{p=n-1} \left[b_p + \frac{2p+3}{1} b_{p+1} + \frac{(2p+5)(2p+4)}{1.2} b_{p+2} + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+p+1)}{1.2\ldots(n-p-1)} b_{n-1} \right] \cos(2p+1)\gamma,$$

Cette égalité devant avoir lieu, quel que soit γ, les coefficients des mêmes cosinus dans les deux membres doivent être égaux entre eux. A une valeur donnée de p correspond pour q l'une des deux valeurs $\frac{n-p-1}{2}$, $\frac{n+p}{2}$, suivant que le nombre $2n-4q-1$ est positif ou négatif; on a donc

$$(26)\quad 2^{n-p-1} b_{\frac{n-p-1}{2}} \quad \text{ou} \quad 2^{n+p} b_{\frac{n+p}{2}} = b_p + \frac{2p+3}{1} b_{p+1} + \frac{(2p+5)(2p+4)}{1.2} b_{p+2} + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+p+1)}{1.2\ldots(n-p-1)} b_{n-1}.$$

En attribuant à p les n valeurs décroissantes $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4, \ldots, 0$, on obtient ainsi un système de n équations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned}
b_0 &= b_{n-1},\\
2^{2n-2} b_{n-1} &= b_{n-2} + \frac{2n-1}{1} b_{n-1},\\
2^2 b_1 &= b_{n-3} + \frac{2n-3}{1} b_{n-2} + \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2} b_{n-1},\\
2^{2n-4} b_{n-2} &= b_{n-4} + \frac{2n-5}{1} b_{n-3} + \frac{(2n-3)(2n-4)}{1.2} b_{n-2} + \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3} b_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\left.\begin{array}{r} 2^{n-1} b_{\frac{n-1}{2}} \\ 2^n b_{\frac{n}{2}} \end{array}\right\} &= b_0 + \frac{3}{1} b_1 + \frac{5.4}{1.2} b_2 + \ldots + \frac{(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} b_{n-1},
\end{aligned}$$

entre les n nombres entiers cherchés b_0, b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$; mais ces

équations se réduisent à $n - 1$ équations distinctes; car, en les ajoutant membre à membre, on a la même identité qu'en faisant $y = 0$ dans l'équation (21). On connaît le premier coefficient $b_0 = 1$; le système des $n - 1$ équations linéaires permettra de déterminer les autres. Remarquons que le dernier coefficient b_{n-1} est aussi égal à 1.

284. Appliquons cette méthode au cas où $n = 7$; nous aurons à résoudre les cinq équations

$$2^{12} = b_5 + \frac{13}{1},$$

$$2^2 b_1 = b_4 + \frac{11}{1} b_5 + \frac{13.12}{1.2},$$

$$2^{10} b_5 = b_3 + \frac{9}{1} b_4 + \frac{11.10}{1.2} b_5 + \frac{13.12.11}{1.2.3},$$

$$2^4 b_2 = b_2 + \frac{7}{1} b_3 + \frac{9.8}{1.2} b_4 + \frac{11.10.9}{1.2.3} b_5 + \frac{13.12.11.10}{1.2.3.4},$$

$$2^8 b_4 = b_1 + \frac{5}{1} b_2 + \frac{7.6}{1.2} b_3 + \frac{9.8.7}{1.2.3} b_4 + \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} b_5 + \frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5}.$$

On en déduit

$$b_1 = 74733, \quad b_2 = 1434066, \quad b_3 = 1670672, \quad b_4 = 253941, \quad b_5 = 4083.$$

Voici les premiers coefficients du développement de $\mu(z)$:

$\mathfrak{B}_1 = 1,$

$\mathfrak{B}_2 = 1 + (2k)^2,$

$\mathfrak{B}_3 = 1 + 11(2k)^2 + (2k)^4,$

$\mathfrak{B}_4 = 1 + 102(2k)^2 + 57(2k)^4 + (2k)^6,$

$\mathfrak{B}_5 = 1 + 922(2k)^2 + 1923(2k)^4 + 247(2k)^6 + (2k)^8,$

$\mathfrak{B}_6 = 1 + 8303(2k)^2 + 54415(2k)^4 + 24040(2k)^6 + 1013(2k)^8 + (2k)^{10},$

$\mathfrak{B}_7 = 1 + 74733(2k)^2 + 1434066(2k)^4 + 1670672(2k)^6 + 253941(2k)^8$
$\quad + 4083(2k)^{10} + (2k)^{12},$

$\mathfrak{B}_8 = 1 + 672604(2k)^2 + 36644374(2k)^4 + 99026018(2k)^6 + 38517533(2k)^8$
$\quad + 2477514(2k)^{10} + 16369(2k)^{12} + (2k)^{14},$

. . . .

On en déduit immédiatement, d'après la relation (16), ceux du développement de $\nu(z)$

$$\mathfrak{C}_1 = k^2,$$
$$\mathfrak{C}_2 = k^2(k^2+2^2),$$
$$\mathfrak{C}_3 = k^2(k^4+11.2^2k^2+2^4),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Une fois que l'on connaît les développements de $\mu(z)$ et de $\nu(z)$, on obtient aisément celui de $\lambda(z)$; car la relation $\lambda'(z)=\mu(z)\nu(z)$ donne

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\mathfrak{B}_{n-1}\mathfrak{C}_1 + \frac{2n(2n-1(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\mathfrak{B}_{n-2}\mathfrak{C}_2 + \dots + \mathfrak{C}_n;$$

en groupant les termes deux à deux, on a un polynôme en k, réciproque et du degré $2n$. On trouve ainsi

$$\mathfrak{A}_1 = 1+k^2,$$
$$\mathfrak{A}_2 = (1+k^4)+14k^2,$$
$$\mathfrak{A}_3 = (1+k^6)+135k^2(1+k^2),$$
$$\mathfrak{A}_4 = (1+k^8)+1228k^2(1+k^4)+5478k^4,$$
$$\mathfrak{A}_5 = (1+k^{10})+11069k^2(1+k^6)+165826k^4(1+k^2),$$
$$\mathfrak{A}_6 = (1+k^{12})+99642k^2(1+k^8)+4494351k^4(1+k^4)+13180268k^6,$$
$$\mathfrak{A}_7 = (1+k^{14})+896803k^2(1+k^{10})+116294673k^4(1+k^6)+834687179k^6(1+k^2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ces coefficients, exprimés à l'aide de la quantité α, comme on l'a dit au n° **281**, prennent la forme plus simple

$$\mathfrak{A}_1 = (2k)\alpha,$$
$$\mathfrak{A}_2 = (2k)^2(\alpha^2+3),$$
$$\mathfrak{A}_3 = (2k)^3(\alpha^3+33\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_4 = (2k)^4(\alpha^4+306\alpha^2+189),$$
$$\mathfrak{A}_5 = (2k)^5(\alpha^5+2766\alpha^3+8289\alpha),$$
$$\mathfrak{A}_6 = (2k)^6(\alpha^6+24909\alpha^4+255987\alpha^2+68607),$$
$$\mathfrak{A}_7 = (2k)^7(\alpha^7+224199\alpha^5+6988167\alpha^3+7660737a),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En multipliant par lui-même le développement de $\lambda(z)$, on obtient celui de $\lambda^2(z)$, que nous avons représenté par

$$\lambda^2(z) = \mathfrak{A}_0^{(2)} \frac{z^2}{1.2} - \mathfrak{A}_1^{(2)} \frac{z^4}{1.2.3.4} + \mathfrak{A}_2^{(2)} \frac{z^6}{1.2\ldots6} - \ldots \tag{27}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0^{(2)} &= 2,\\
\mathfrak{A}_1^{(2)} &= 2^4 k\alpha,\\
\mathfrak{A}_2^{(2)} &= 2^4 k^2(2^3\alpha^2 + 9),\\
\mathfrak{A}_3^{(2)} &= 2^8 k^3(2^2\alpha^3 + 27\alpha),\\
\mathfrak{A}_4^{(2)} &= 2^9 k^4(2^4\alpha^4 + 486\alpha^2 + 189),\\
\mathfrak{A}_5^{(2)} &= 2^{12} k^5(2^4\alpha^5 + 2016\alpha^3 + 3429\alpha),\\
\mathfrak{A}_6^{(2)} &= 2^{11} k^6(2^8\alpha^6 + 130\,464\alpha^4 + 667\,872\alpha^2 + 130\,977),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La fonction $\lambda^2(z)$ se réduisant à $\sin^2 z$ ou à $\frac{1-\cos 2z}{2}$, lorsque le module k devient nul et, par suite, $k\alpha$ égal à $\frac{1}{2}$, le coefficient du premier terme de $\mathfrak{A}_p^{(2)}$ est 2^{3p+1}.

Expression de $\lambda^{2n+1}(z)$ en fonction de $\lambda(z)$ et de ses dérivées.

285. Nous avons vu (nº **166**) qu'une puissance impaire de $\lambda(z)$ est égale à une fonction linéaire de $\lambda(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs, et que si l'on pose

$$\frac{1}{\lambda^{2n+1}(z)} = \frac{1}{z^{2n+1}} + \frac{A_{2n-1}}{z^{2n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z} + \ldots,$$

le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, on a

$$\left\{\begin{aligned}
&k^{2n}\lambda^{2n+1}(z) = A_1\lambda(z) + \frac{A_3}{1.2}\lambda''(z) + \ldots\\
&\qquad + \frac{A_{2n-1}}{1.2\ldots(2n-2)}\lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2\ldots2n}\lambda^{(2n)}(z).
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

On peut exprimer les coefficients A_1, A_3,... au moyen des coef-

ficients $a_p^{(n)}$ considérés au n° 280. On a, en effet,

$$\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1} = 1 + A_{2n-1} z^2 + A_{2n-3} z^4 + \ldots + A_1 z^{2n} + \ldots;$$

d'où

$$A_{2n+1-2p} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_z^{2p}\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1}\right]_{z=0}.$$

Mais, si dans la formule (13) on remplace n par $2n-2p+1$, on a

$$a_p^{(2n+1-2p)} = \frac{2n-2p+1}{2n+1}\,\frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[D_z^{2p}\left(\frac{z}{\lambda(z)}\right)^{2n+1}\right]_{z=0};$$

on en déduit

$$(29)\qquad A_{2n+1-2p} = \frac{2n+1}{2n+1-2p}\, a_p^{(2n+1-2p)},$$

et l'équation (28) devient

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{k^{2n}\lambda^{2n+1}(z)}{2n+1} &= \frac{a_n}{1}\lambda(z) + \frac{a_{n-1}^{(3)}}{1.2.3}\lambda''(z) + \ldots \\ &+ \frac{a_1^{(2n-1)}}{1.2\ldots(2n-1)}\lambda^{(2n-2)}(z) + \frac{1}{1.2\ldots(2n+1)}\lambda^{(2n)}(z). \end{aligned}\right.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega'}{2}$, on a l'expression de $\frac{1}{\lambda^{2n+1}(z)}$ par une fonction linéaire de $\lambda\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)$ et de ses dérivées.

Expression de $\lambda^{2n}(z)$ en fonction de $\lambda^2(z)$ et de ses dérivées.

286. Nous avons vu (n° 167) qu'une puissance paire de $\lambda(z)$ est égale à une fonction linéaire de $\lambda^2(z)$ et de ses dérivées d'ordres pairs, et que, si l'on pose

$$\frac{1}{\lambda^{2n}(z)} = \frac{1}{z^{2n}} + \frac{A_{2n-2}}{z^{2n-2}} + \ldots + \frac{A_2}{z^2} + \ldots,$$

on a

$$(31)\quad k^{2n-2} D\lambda^{2n}(z) = \frac{A_2}{1} D\lambda^2(z) + \frac{A_4}{1.2.3} D^3\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)} D^{2n-1}\lambda^2(z).$$

Les coefficients A_2, A_4, ... s'expriment aussi par les coefficients $a_p^{(n)}$; on a

$$(32) \qquad A_{2n-2p} = \frac{2n}{2n-2p} a_p^{(2n-2p)},$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{k^{2n-2} D\lambda^{2n}(z)}{2n} = \frac{a_{n-1}^{(2)}}{1.2} D\lambda^2(z) + \frac{a_{n-2}^{(4)}}{1.2.3.4} D^3\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots 2n} D^{2n-1}\lambda^2(z).$$

Si l'on intègre de o à z, en observant que, d'après la série (27), la valeur de $D^{2p}\lambda^2(z)$, pour $z = 0$, est égale à $(-1)^{p-1}\mathfrak{A}_{p-1}^{(2)}$, on a finalement

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{k^{2n-2}\lambda^{2n}(z)}{2n} &= \frac{a_{n-1}^{(2)}}{1.2}\lambda^2(z) + \frac{a_{n-2}^{(4)}}{1.2.3.4} D^2\lambda^2(z) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots 2n} D^{2n-2}\lambda^2(z) \\ &- \left[\frac{a_{n-2}^{(4)}\mathfrak{A}_0^{(2)}}{1.2.3.4} - \frac{a_{n-3}^{(6)}\mathfrak{A}_1^{(2)}}{1.2\ldots 6} + \ldots + (-1)^n \frac{\mathfrak{A}_{n-2}^{(2)}}{1.2\ldots 2n}\right]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant z par $z + \frac{\omega'}{2}$, on a l'expression de $\frac{1}{\lambda^{2n}(z)}$ par une fonction linéaire de $\lambda^2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$ et de ses dérivées.

Fonctions de M. Weierstrass.

287. D'après les relations établies au n° 169, lorsque le multiplicateur g est égal à l'unité, les fonctions θ satisfont aux équations différentielles

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &D^2 \log\theta(z) + k^2\lambda^2(z) = H, \quad D^2\log\theta_1(z) + \frac{1}{\lambda^2(z)} = H, \\ &D^2\log\theta_2(z) + \frac{\nu^2(z)}{\mu^2(z)} = H, \quad D^2\log\theta_3(z) + k^2\frac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)} = H, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles H désigne la constante $\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}$. On simplifie ces équations en substituant aux fonctions θ les fonctions Al (initiales du mot *alle*) de M. Weierstrass, fonctions définies par les formules

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{Al}(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta(z)}{\theta(0)}, \quad \mathrm{Al}_1(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_1(z)}{\theta'_1(0)}, \\ &\mathrm{Al}_2(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_2(z)}{\theta_2(0)}, \quad \mathrm{Al}_3(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}}\frac{\theta_3(z)}{\theta_3(0)}. \end{aligned} \right.$$

En désignant par H la nouvelle constante $\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}$ égale à $\mathrm{H} + \frac{2\pi i}{\omega\omega'}$, on a aussi (nº 173)

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \frac{\vartheta(z)}{\vartheta(0)}, & \mathrm{Al}_1(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta'_1(0)}, \\ \mathrm{Al}_2(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)}, & \mathrm{Al}_3(z) = e^{\frac{-Hz^2}{2}} \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)}. \end{cases}$$

Les trois fonctions $\mathrm{Al}(z)$, $\mathrm{Al}_2(z)$, $\mathrm{Al}_3(z)$ sont paires et se réduisent à l'unité pour $z = 0$; la fonction $\mathrm{Al}_1(z)$ est impaire et sa dérivée est égale à l'unité pour $z = 0$. Comme on a

$$(4)\quad \lambda(z) = \frac{\mathrm{Al}_1(z)}{\mathrm{Al}(z)}, \quad \mu(z) = \frac{\mathrm{Al}_2(z)}{\mathrm{Al}(z)}, \quad \nu(z) = \frac{\mathrm{Al}_3(z)}{\mathrm{Al}(z)},$$

les quatre fonctions Al satisfont aux relations

$$(5)\quad \mathrm{Al}_2^2 + \mathrm{Al}_1^2 = \mathrm{Al}_3^2 + k^2\mathrm{Al}_1^2 = \mathrm{Al}^2.$$

Les équations (1) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} D^2 \log \mathrm{Al}(z) + k^2\lambda^2(z) = 0, & D^2 \log \mathrm{Al}_1(z) + \dfrac{1}{\lambda^2(z)} = 0, \\ D^2 \log \mathrm{Al}_2(z) + \dfrac{\nu^2(z)}{\mu^2(z)} = 0, & D^2 \log \mathrm{Al}_3(z) + k^2 \dfrac{\mu^2(z)}{\nu^2(z)} = 0; \end{cases}$$

on peut les mettre sous la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\dfrac{d^2\mathrm{Al}}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}_1^2 = 0, & \mathrm{Al}_1\dfrac{d^2\mathrm{Al}_1}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_1}{dz}\right)^2 + \mathrm{Al}^2 = 0, \\ \mathrm{Al}_2\dfrac{d^2\mathrm{Al}_2}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_2}{dz}\right)^2 + \mathrm{Al}_3^2 = 0, & \mathrm{Al}_3\dfrac{d^2\mathrm{Al}_3}{dz^2} - \left(\dfrac{d\mathrm{Al}_3}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}_2^2 = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathrm{Al}(z)$, étant holomorphes, sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières de z, et convergentes pour toutes les valeurs de z. Nous représenterons ces séries par

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(z) = 1 - \mathfrak{a}^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_1(z) = z - \mathfrak{a}_1^{(1)}\dfrac{z^3}{1.2.3} + \mathfrak{a}_1^{(2)}\dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_2(z) = 1 - \mathfrak{a}_2^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}_2^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \mathrm{Al}_3(z) = 1 - \mathfrak{a}_3^{(1)}\dfrac{z^2}{1.2} + \mathfrak{a}_3^{(2)}\dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots. \end{cases}$$

On obtient les coefficients des deux dernières séries en différentiant plusieurs fois successivement les deux dernières des équations (7), faisant ensuite $z = 0$ et tenant compte des conditions initiales $\mathrm{Al}_2(0) = \mathrm{Al}_3(0) = 1$, $\mathrm{Al}'_2(0) = \mathrm{Al}'_3(0) = 0$; ceci montre que les coefficients $\mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{a}_3$ sont des polynômes entiers en k, pairs, et à coefficients entiers. La première des équations (7), mise sous la forme

$$\mathrm{Al}\frac{d^2\mathrm{Al}}{dz^2} - \left(\frac{d\mathrm{Al}}{dz}\right)^2 + k^2\mathrm{Al}^2 - k^2\mathrm{Al}_2^2 = 0,$$

et différentiée plusieurs fois successivement, donne les coefficients du développement de $\mathrm{Al}(z)$ à l'aide de ceux du développement de $\mathrm{Al}_2(z)$. De la relation $\mathrm{Al}_1(z) = \lambda(z)\mathrm{Al}(z)$, on déduira enfin ceux du développement de $\mathrm{Al}_1(z)$. Ces coefficients sont aussi des polynômes entiers en k, pairs, et à coefficients entiers. Les séries par lesquelles s'expriment les quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$ étant convergentes pour toutes les valeurs de z et de k, il en résulte que ces fonctions sont holomorphes, non-seulement par rapport à z, mais encore par rapport à k, pour toutes les valeurs de ces variables.

288. Les fonctions Al n'admettent aucune période, mais elles rentrent dans la catégorie des fonctions intermédiaires dont nous avons parlé dans le Chapitre III du Livre IV; quand on remplace z par $z + \omega$ ou par $z + \omega'$, elles sont multipliées par les quantités

$$\pm e^{-k^2\omega_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}, \quad \pm e^{-k^2\omega'_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

ω_1 et ω'_1 étant les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce données par les formules (14) du n° 273.

D'après les formules du n° 201, lorsque le module k est nul, la première période ω devient égale à π, la seconde ω' infinie, et la quantité q est nulle; les deux fonctions $\mathrm{Al}(z)$ et $\mathrm{Al}_3(z)$ se réduisent à l'unité, la fonction $\mathrm{Al}_1(z)$ à $\sin z$, la fonction $\mathrm{Al}_2(z)$ à $\cos z$.

D'après leur définition (n°s 73 et 173), les fonctions θ et ϑ sont homogènes et du degré zéro par rapport aux trois quantités z, ω, ω' qu'elles renferment; elles ne changent pas lorsqu'on multiplie ces trois quantités par une même quantité, et, par conséquent, les fonctions $\theta(z, g, k)$, $\vartheta(z, g, k)$ s'expriment à l'aide de fonctions dont le multiplicateur est

égal à l'unité; elles sont respectivement égales aux fonctions $\theta(gz, k)$, $\vartheta(gz, k)$. Nous avons trouvé (n° 234) les relations qui existent entre les fonctions θ ou les fonctions ϑ relatives à deux modules réciproques; des relations (35),

$$\frac{\vartheta_3\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\vartheta_2(z, k)} = \frac{\vartheta_2\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\vartheta_3(z, k)} = \frac{\vartheta\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{i}\,\vartheta(z, k)} = \frac{\vartheta_1\left(kz, \frac{1}{k}\right)}{\sqrt{i}\,\vartheta(z, k)} = 1,$$

on déduit les relations

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(z, k), & \mathrm{Al}_1\left(kz, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{Al}_1(z, k), \\ \mathrm{Al}_2\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}_3(z, k), & \mathrm{Al}_3\left(kz, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}_2(z, k), \end{cases}$$

entre les fonctions Al relatives à deux modules réciproques.

On conclut de là que les coefficients des séries satisfont aux relations

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), & \mathfrak{a}_1^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_1^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), \\ \mathfrak{a}_3^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_2^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right), & \mathfrak{a}_2^{(n)} = k^{2n}\mathfrak{a}_3^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

Il en résulte que les polynômes $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_1^{(n)}$ sont réciproques par rapport à k, et que les polynômes $\mathfrak{a}_2^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ se déduisent l'un de l'autre. Les polynômes $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ s'annulant pour $k = 0$ et les deux autres se réduisant à l'unité, $\mathfrak{a}^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_2^{(n)}$ sont du degré $2n - 2$, $\mathfrak{a}_1^{(n)}$ et $\mathfrak{a}_3^{(n)}$ du degré $2n$.

En éliminant $\lambda(z)$ entre la première des équations (6) et l'équation

$$\lambda'^2(z) = [1 - \lambda^2(z)][1 - k^2\lambda^2(z)],$$

on arrive à l'équation différentielle du troisième ordre

$$(11)\quad [\mathrm{D}^3 \log \mathrm{Al}(z)]^2 + 4\mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(z)[1 + \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(z)][k^2 + \mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(z)] = 0.$$

Quand on remplace z par l'une des quantités $z + \frac{\omega}{2}$, $z + \frac{\omega'}{2}$, $z + \frac{\omega + \omega'}{2}$, la fonction $\mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}(z)$ se change en $\mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}_3(z)$, $\mathrm{D}^2 \log \mathrm{Al}_1(z)$,

$D^2 \log Al_2(z)$; il en résulte que les quatre fonctions $\log Al(z)$ satisfont à cette même équation différentielle.

289. On abrége le calcul des séries à l'aide d'équations aux différentielles partielles, auxquelles satisfont les fonctions holomorphes $Al(z)$ des deux variables z et k. Considérons d'abord les fonctions θ, représentées par les formules (8) du n° 74; le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, la période ω, donnée par la formule (31) du n° 205, est une fonction de q; les fonctions θ dépendent donc uniquement des deux quantités z et q. De l'expression

$$\theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

on déduit

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{4\pi}{\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n q^{n^2} \sin\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2}{\omega^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n n^2 q^{n^2} \cos\frac{2n\pi z}{\omega},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial \log q} = 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n n^2 q^{n^2}\cos\frac{2n\pi z}{\omega} + \frac{4\pi z}{\omega}\frac{d\log\omega}{d\log q}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n n q^{n^2}\sin\frac{2n\pi z}{\omega};$$

d'où

$$\frac{\partial\theta}{\partial\log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q}\, z\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

En répétant le même calcul, on reconnaît que les trois autres fonctions θ satisfont à cette même équation aux différentielles partielles. Des formules (33) et (34) du n° 279 on tire

$$d\log\omega = \frac{k^2 - H}{kk'^2}\,dk,$$

$$d\log q = \pi i\, d\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{2\pi^2}{kk'^2\omega^2}\,dk,$$

et l'équation (12) devient

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + 2(k^2 - H)z\frac{\partial\theta}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial\theta}{\partial k} = 0. \tag{13}$$

290. Remplaçons maintenant la fonction θ par sa valeur

$$\theta(z) = \theta(0) e^{\frac{Hz^2}{2}} \mathrm{Al}(z);$$

l'équation se transforme en la suivante :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathrm{Al}}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k} + \left(2k^2 \mathrm{H} - \mathrm{H}^2 + kk'^2 \frac{d\mathrm{H}}{dk}\right) z^2 \mathrm{Al} \\ &\qquad + \left[\mathrm{H} + 2kk'^2 \frac{d \log \theta(0)}{dk}\right] \mathrm{Al} = 0. \end{aligned} \right.$$

De la relation

$$\mathrm{H} = k^2 - \frac{kk'^2}{\omega} \frac{d\omega}{dk},$$

on déduit

$$\frac{d\mathrm{H}}{dk} = 2k - \frac{1}{\omega} \frac{d\left(kk'^2 \frac{d\omega}{dk}\right)}{dk} + \frac{kk'^2}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2,$$

et, en vertu de l'équation (32) du n° 279,

$$\frac{d\mathrm{H}}{dk} = k + kk'^2 \left(\frac{d \log \omega}{dk}\right)^2 = \frac{k^2 - 2k^2 \mathrm{H} + \mathrm{H}^2}{kk'^2}.$$

Le coefficient du quatrième terme de l'équation (14) se réduit ainsi à k^2. L'équation (13) est la même pour les quatre fonctions θ; les équations analogues à l'équation (14), et qui se rapportent aux quatre fonctions Al, ne diffèrent que par le coefficient du dernier terme; il suffit de remplacer dans ce coefficient $\theta(0)$ par l'une des quantités $\theta'_1(0)$, $\theta_2(0)$, $\theta_3(0)$. Des relations

$$\theta(0) = \sqrt{\frac{\omega k'}{\pi}}, \quad \theta'_1(0) = \sqrt{\frac{\omega k k'}{\pi}}, \quad \theta_2(0) = \sqrt{\frac{\omega k}{\pi}}, \quad \theta_3(0) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}},$$

établies au n° 205, on déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= -2kk'^2 \frac{d \log \theta(0)}{dk} = k'^2 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta'_1(0)}{dk} \\ &= 1 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta_2(0)}{dk} = k^2 - 2kk'^2 \frac{d \log \theta_3(0)}{dk}, \end{aligned}$$

et l'on obtient les quatre équations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathrm{Al}}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k} + k^2z^2\mathrm{Al} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{Al}_1}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \mathrm{Al}_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2z^2)\mathrm{Al}_1 = 0,\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{Al}_2}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial \mathrm{Al}_2}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \mathrm{Al}_2}{\partial k} + (1 + k^2z^2)\mathrm{Al}_2 = 0,\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{Al}_3}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial \mathrm{Al}_3}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \mathrm{Al}_3}{\partial k} + (k^2 + k^2z^2)\mathrm{Al}_3 = 0,
\end{aligned}\right.$$

qui sont dues à M. Weierstrass (*Journal de Crelle*, 1856).

Il est aisé de reconnaître que les quatre fonctions Al, $\sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1$, $\sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2$, $\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3$ satisfont à la même équation

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial u}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial u}{\partial k} + k^2z^2u = 0.$$

291. Les équations (15) permettent d'exprimer un coefficient quelconque de l'une des séries à l'aide des deux coefficients précédents. Calculons d'abord le développement de $\mathrm{Al}(z)$; en substituant la série dans la première des équations (15) et égalant à zéro le coefficient de z^{2m}, on obtient la relation

$$(17)\qquad \mathfrak{a}^{(n+1)} = 4nk^2\mathfrak{a}^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}^{(n)}}{dk} - 2n(2n-1)k^2\mathfrak{a}^{(n-1)}.$$

Le premier coefficient est égal à l'unité; en faisant $n = 0$, on trouve $\mathfrak{a}^{(1)} = 0$; en faisant $n = 1$, on trouve $\mathfrak{a}^{(2)} = -2k^2$, et ainsi de suite. Les polynômes étant réciproques, on abrége le calcul en posant $\mathfrak{a}^{(n)} = k^n\mathfrak{b}^{(n)}$, $k + \frac{1}{k} = \beta$; la relation précédente devient

$$(18)\qquad \mathfrak{b}^{(n+1)} = 2n\beta\mathfrak{b}^{(n)} - 2(\beta^2 - 4)\frac{d\mathfrak{b}^{(n)}}{d\beta} - 2n(2n-1)\mathfrak{b}^{(n-1)},$$

et l'on trouve

$$\mathfrak{b}^{(1)} = 0,$$
$$\mathfrak{b}^{(2)} = -2,$$
$$\mathfrak{b}^{(3)} = -2^3\beta,$$
$$\mathfrak{b}^{(4)} = -2^2(2^3\beta^2 + 1),$$
$$\mathfrak{b}^{(5)} = -2^5(2^2\beta^3 + 3\beta),$$
$$\mathfrak{b}^{(6)} = -2^3(2^6\beta^4 + 2^3.15\beta^2 + 51),$$
$$\mathfrak{b}^{(7)} = -2^5(2^6\beta^5 + 2^5.7\beta^3 + 237\beta),$$
$$\mathfrak{b}^{(8)} = -2^4(2^9\beta^6 + 2^6.45\beta^4 + 2^4.345\beta^2 - 849),$$
$$\mathfrak{b}^{(9)} = -2^8(2^7\beta^7 + 2^5.33\beta^5 + 2^2.795\beta^3 - 2439\beta),$$
$$\mathfrak{b}^{(10)} = -2^5(2^{12}\beta^8 + 2^9.91\beta^6 + 2^6.3165\beta^4 - 2^4.34137\beta^2 - 26199),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En considérant les premiers coefficients, on remarque que $\mathfrak{b}^{(2n'-1)}$ et $\mathfrak{b}^{(2n')}$ sont divisibles respectivement par $2^{n'+1}$ et par $2^{n'}$; la relation (18) montre que cette propriété est générale.

Si l'on remplace β par sa valeur $k + \frac{1}{k}$, on a

$$-\mathfrak{a}^{(1)} = 0$$
$$-\mathfrak{a}^{(2)} = 2k^2,$$
$$-\mathfrak{a}^{(3)} = 8(k^2 + k^4),$$
$$-\mathfrak{a}^{(4)} = 32(k^2 + k^6) + 68k^4,$$
$$-\mathfrak{a}^{(5)} = 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6),$$
$$-\mathfrak{a}^{(6)} = 512(k^2 + k^{10}) + 3008(k^4 + k^8) + 5400k^6,$$
$$-\mathfrak{a}^{(7)} = 2048(k^2 + k^{12}) + 17408(k^4 + k^{10}) + 49568(k^6 + k^8),$$
$$-\mathfrak{a}^{(8)} = 8192(k^2 + k^{14}) + 95232(k^4 + k^{12}) + 395520(k^6 + k^{10}) + 603376k^8,$$
$$-\mathfrak{a}^{(9)} = 32768(k^2 + k^{16}) + 499712(k^4 + k^{14}) + 2853888(k^6 + k^{12}) + 5668096(k^8 + k^{10}),$$
$$-\mathfrak{a}^{(10)} = 131072(k^2 + k^{18}) + 2539520(k^4 + k^{16}) + 19097600(k^6 + k^{14}) + 38153728(k^8 + k^{12}) + 42090784k^{10},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les coefficients du développement de $\mathrm{Al}_1(z)$ sont donnés par la relation

$$(19)\quad \mathfrak{a}_1^{(n+1)} = [1 + (4n+1)k^2]\mathfrak{a}_1^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}_1^{(n)}}{dk} - 2n(2n+1)k^2\mathfrak{a}_1^{(n-1)};$$

ces coefficients étant aussi réciproques, on posera, comme précédemment,

$$\mathfrak{a}_1^{(n)} = k^n \mathfrak{b}_1^{(n)},$$

ce qui met la relation sous la forme

$$(20) \qquad \mathfrak{b}_1^{(n+1)} = (2n+1)\beta\mathfrak{b}_1^{(n)} - 2(\beta^2 - 4)\frac{d\mathfrak{b}_1^{(n)}}{d\beta} - 2n(2n+1)\mathfrak{b}_1^{(n-1)}.$$

On trouve ainsi

$$\mathfrak{b}_1^{(1)} = \beta,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(2)} = \beta^2 + 2,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(3)} = \beta^3 + 2.3\beta,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(4)} = \beta^4 + 2^2.3\beta^2 - 2^2.9,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(5)} = \beta^5 + 2^2.5\beta^3 - 2^2.141\beta,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(6)} = \beta^6 + 2.15\beta^4 - 2^2.1479\beta^2 - 2^3.69,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(7)} = \beta^7 + 2.21\beta^5 - 2^2.13851\beta^3 - 2^3.1731\beta,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(8)} = \beta^8 + 2^3.7\beta^6 - 2^3.62907\beta^4 - 2^5.8355\beta^2 + 2^4.321,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(9)} = \beta^9 + 2^3.9\beta^7 - 2^3.567255\beta^5 - 2^5.140937\beta^3 - 2^4.26487\beta,$$
$$\mathfrak{b}_1^{(10)} = \beta^{10} + 2.45\beta^8 - 2^3.5107185\beta^6 - 2^4.4252365\beta^4 - 2^4.1500435\beta^2 - 2^5.160839,$$

....

ou, en remplaçant β par sa valeur,

$$\mathfrak{a}_1^{(1)} = 1 + k^2,$$
$$\mathfrak{a}_1^{(2)} = 1 + k^4 + 4k^2,$$
$$\mathfrak{a}_1^{(3)} = 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4),$$
$$\mathfrak{a}_1^{(4)} = 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4,$$
$$\mathfrak{a}_1^{(5)} = 1 + k^{10} + 25(k^2 + k^8) - 494(k^4 + k^6),$$
$$\mathfrak{a}_1^{(6)} = 1 + k^{12} + 36(k^2 + k^{10}) - 5781(k^4 + k^8) - 12184k^6,$$
$$\mathfrak{a}_1^{(7)} = 1 + k^{14} + 49(k^2 + k^{12}) - 55173(k^4 + k^{10}) - 179605(k^6 + k^8),$$
$$\mathfrak{a}_1^{(8)} = 1 + k^{16} + 64(k^2 + k^{14}) - 502892(k^4 + k^{12}) - 2279488(k^6 + k^{10}) - 3547930k^8,$$
$$\mathfrak{a}_1^{(9)} = 1 + k^{18} + 81(k^2 + k^{16}) - 4537500(k^4 + k^{14}) - 27198588(k^6 + k^{12}), - 59331498(k^8 + k^{10}),$$
$$\mathfrak{a}_1^{(10)} = 1 + k^{20} + 100(k^2 + k^{18}) - 40856715(k^4 + k^{16}) - 313180080(k^6 + k^{14}) - 909015270(k^8 + k^{12}) - 1278530856k^{10},$$

....

On calculera le développement de $\mathrm{Al}_2(z)$ au moyen de la relation

$$(21)\qquad \mathfrak{a}_2^{(n+1)} = (1 + 4nk^2)\mathfrak{a}_2^{(n)} + 2k(1-k^2)\frac{d\mathfrak{a}_2^{(n)}}{dk} - 2n(2n-1)k^2\mathfrak{a}_2^{(n-1)},$$

et l'on abrégerait un peu le calcul en posant $2k^2 = h$, et remarquant que les coefficients sont des polynômes en h à coefficients entiers. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_2^{(1)} &= 1,\\
\mathfrak{a}_2^{(2)} &= 1 + 2k^2,\\
\mathfrak{a}_2^{(3)} &= 1 + 6k^2 + 8k^4,\\
\mathfrak{a}_2^{(4)} &= 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6,\\
\mathfrak{a}_2^{(5)} &= 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8,\\
\mathfrak{a}_2^{(6)} &= 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10},\\
\mathfrak{a}_2^{(7)} &= 1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12},\\
\mathfrak{a}_2^{(8)} &= 1 + 56k^2 + 169320k^4 + 628064k^6 + 757264k^8 + 370944k^{10} + 93144k^{12},\\
&\quad + 8192k^{14},\\
\mathfrak{a}_2^{(9)} &= 1 + 72k^2 + 1515368k^4 + 7594592k^6 + 12998928k^8 + 9100288k^{10},\\
&\quad + 2725888k^{12} + 491520k^{14} + 32768k^{16},\\
\mathfrak{a}_2^{(10)} &= 1 + 90k^2 + 13623480k^4 + 89348080k^6 + 211064400k^8 + 219361824k^{10}\\
&\quad + 100242944k^{12} + 18450432k^{14} + 2506752k^{16} + 131072k^{18},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le développement de $\mathrm{Al}_3(z)$ se déduit de celui de $\mathrm{Al}_2(z)$, en vertu de la relation $\mathfrak{a}_3^{(n)}(k) = k^{2n}\mathfrak{a}_2^{(n)}\left(\frac{1}{k}\right)$; on a ainsi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_3^{(1)} &= k^2,\\
\mathfrak{a}_3^{(2)} &= 2k^2 + k^4,\\
\mathfrak{a}_3^{(3)} &= 8k^2 + 6k^4 + k^6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On obtient une vérification très-simple des calculs précédents en remarquant que, si le module k est égal à l'unité, la quantité p est nulle, et que les quatre fonctions Al deviennent respectivement

$$\mathrm{Al}(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}\cosh z,\quad \mathrm{Al}_1(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}\sinh z,\quad \mathrm{Al}_2(z) = \mathrm{Al}_3(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

Développement de $\lambda(z)$.

292. D'après le théorème du n° 99, la fonction $\lambda(z)$, qui admet la période 2ω, est développable en une série de la forme

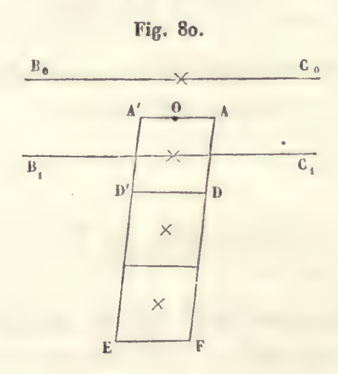
$$\lambda(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathrm{A}_m e^{\frac{m\pi z i}{\omega}},$$

et convergente dans une bande limitée par deux droites parallèles à la direction ω. On a posé $t = e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$; aux valeurs $z = \frac{\omega'}{2} + m\omega + n\omega'$, qui rendent la fonction $\lambda(z)$ infinie, correspondent les valeurs $t = \pm e^{\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{2\omega}}$, dont les modules varient en progression géométrique, et les arguments en progression arithmétique. Dans le plan sur lequel on figure la variable z, les pôles sont disposés par files parallèles à la direction ω. Dans le plan sur lequel on figure la variable t, les valeurs correspondantes de t sont marquées par des points placés sur deux spirales qui, d'une part, s'éloignent à l'infini, d'autre part se rapprochent indéfiniment de l'origine; ces points sont les pôles de la fonction λ, considérée comme une fonction de t. La série, ordonnée suivant les puissances entières de t, positives ou négatives, est convergente pour les valeurs de t comprises entre deux circonférences ayant pour centre l'origine et passant par les points $t = e^{\frac{(2n+1)\pi\omega' i}{2\omega}}$, $t = e^{\frac{(2n-1)\pi\omega' i}{2\omega}}$; la série sera donc convergente pour les valeurs de z, comprises entre deux droites

parallèles à la direction ω et passant par les points $z=(2n+1)\frac{\omega'}{2}$, $z=(2n-1)\frac{\omega'}{2}$, c'est-à-dire entre deux files voisines.

Supposons $n=0$; la série sera convergente dans la bande comprise

Fig. 80.



entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1 à la direction ω, menées par les points $z=\frac{\omega'}{2}$, $z=-\frac{\omega'}{2}$ (*fig.* 80). Les coefficients de la série sont donnés par l'intégrale définie

$$A_m=\frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+2\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}}dz,$$

relative à une ligne située dans la bande. Nous remarquons d'abord que $A_{-m}=-A_m$; car, en posant $z=-z'$, on a

$$A_{-m}=\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\lambda(z)e^{\frac{m\pi z i}{\omega}}dz=-\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega}\lambda(z')e^{-\frac{m\pi z' i}{\omega}}dz'=-A_m.$$

Nous remarquons ensuite que

$$A_m=\frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}}dz+\frac{1}{2\omega}\int_{z_0+\omega}^{z_0+2\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}}dz,$$

et, en remplaçant z par $\omega+z$ dans la seconde partie,

$$A_m=\frac{1-(-1)^m}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+\omega}\lambda(z)e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}}dz.$$

Il en résulte que $A_{2m} = 0$ et que

$$A_{2m-1} = \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \lambda(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}} dz.$$

Pour évaluer ce dernier coefficient, considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i} \int \lambda(z) e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}} dz$$

relative au contour du parallélogramme A'EFA, dont les sommets A et A' correspondent à $z = \pm \frac{\omega}{2}$, et les sommets F et E à $z = \pm \frac{\omega}{2} - n'\omega'$; les parties relatives aux deux côtés opposés FA, A'E sont égales et de signes contraires; la partie relative au côté EF est infiniment petite, quand n' est très-grand; l'intégrale se réduit donc à la partie relative au côté AA', c'est-à-dire à $-\frac{\omega}{2\pi i} A_{2m-1}$. Mais l'intégrale définie relative au contour du parallélogramme est égale à la somme des résidus relatifs aux infinis $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$, n variant de 1 à n'. L'un de ces résidus étant égal à $\frac{1}{gk} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}}$, on a

$$A_{2m-1} = -\frac{2\pi i}{g\omega k} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}} = -\frac{2\pi i}{g\omega k} \frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1-q^{2m-1}},$$

et la série devient

$$(1) \qquad \lambda(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}}{1-q^{2m-1}} \sin\frac{(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Développement de $\mu(z)$.

293. Les mêmes considérations s'appliquent à la fonction $\mu(z)$, qui admet aussi la période 2ω et les mêmes infinis que $\lambda(z)$. En effectuant

le développement dans la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1, on aura

$$A_m = \frac{1}{2\omega}\int_{z_0}^{z_0+2\omega} \mu(z)e^{-\frac{m\pi z i}{\omega}}dz.$$

Ici $A_{-m} = A_m$; on a d'ailleurs $A_{2m} = 0$ et

$$A_{2m-1} = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \mu(z)e^{-(2m-1)\frac{\pi z i}{\omega}}dz.$$

On obtiendra le coefficient A_{2m-1}, comme précédemment, par la considération de l'intégrale définie relative au contour du parallélogramme A'EFA; le résidu relatif à l'un des infinis $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$ étant égal à $\frac{(-1)^{n-1}i}{gk}q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}}$, on aura

$$A_{2m-1} = \frac{2\pi}{g\omega k}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{(2n-1)\frac{2m-1}{2}} = \frac{2\pi}{g\omega k}\frac{q^{\frac{2m-1}{2}}}{1+q^{2m-1}};$$

d'où

$$(2) \qquad \mu(z) = \frac{4\pi\sqrt{q}}{g\omega k}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{m-1}}{1+q^{2m-1}}\cos\frac{(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Développement de $\nu(z)$.

294. Cette fonction admettant la période ω, la série sera de la forme

$$\nu(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}},$$

et, pour la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1, on aura

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \nu(z)e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}dz.$$

On a ici $A_{-m} = A_m$. Pour évaluer le coefficient A_0, considérons l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \nu(z)\,dz,$$

relative au contour du parallélogramme A'D'DA (*fig.* 80), dont les sommets D et D' correspondent aux valeurs $z = \pm\frac{\omega}{2} - \omega'$; les parties relatives aux deux côtés A'D', DA étant égales et de signes contraires, celles relatives aux deux côtés D'D, AA' étant égales, l'intégrale relative au contour se réduit à deux fois l'intégrale relative au côté AA', c'est-à-dire à $-\frac{\omega}{\pi i}A_0$. Mais cette intégrale est égale au résidu relatif au pôle $-\frac{\omega'}{2}$, situé dans le parallélogramme; on en conclut que $A_0 = \frac{\pi}{g\omega}$.

On évaluera un autre coefficient A_m par la considération du parallélogramme A'EFA, comme précédemment, et l'on trouvera

$$A_m = \frac{2\pi}{g\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}q^{(2n-1)m} = \frac{2\pi}{g\omega}\,\frac{q^m}{1+q^{2m}}.$$

On obtient ainsi la série

$$(3)\qquad \nu(z) = \frac{\pi}{g\omega}\left(1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos\frac{2m\pi z}{\omega}\right).$$

Développement des fonctions D log$\theta(z)$.

295. La fonction méromorphe $D\log\theta(z) = \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$ admet la période ω; elle devient infinie aux mêmes points que les fonctions elliptiques; elle est donc développable en une série de la forme

$$D\log\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{2m\pi z}{\omega}},$$

et convergente dans la bande comprise entre les parallèles B_0C_0, B_1C_1 (*fig.* 80). Les coefficients sont donnés par la formule

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} D\log\theta(z)\, e^{-\frac{2m\pi z i}{\omega}}\, dz.$$

La fonction $D\log\theta(z)$ étant impaire, on a $A_0 = 0$ et $A_{-m} = -A_m$. On déterminera le coefficient A_m à l'aide du parallélogramme A′EFA, comme précédemment; les parties de l'intégrale relative aux deux côtés opposés A′E, FA étant égales et de signes contraires, et celle relative au côté EF étant infiniment petite, l'intégrale relative au contour de ce parallélogramme se réduit à $-\frac{\omega}{2\pi i}A_m$. Le résidu relatif au point $\alpha = -(2n-1)\frac{\omega'}{2}$ est égal à $q^{(2n-1)m}$, puisque le résidu de $D\log\theta(z)$ est égal à l'unité. On a donc

$$A_m = -\frac{2\pi i}{\omega}\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{(2n-1)m} = -\frac{2\pi i}{\omega}\,\frac{q^m}{1-q^{2m}},$$

et la série devient

$$(4)\qquad D\log\theta(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega}.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$, on en déduit la série

$$(5)\qquad D\log\theta_3(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

convergente dans la même bande.

296. Le développement de la fonction $D\log\theta_1(z)$ ne peut pas s'effectuer dans cette bande, à cause des infinis $z = m\omega$, situés sur la droite AA′; mais on évite cette difficulté en développant la fonction

$$\varphi(z) = D\log\frac{\theta_1(z)}{\sin\frac{\pi z}{\omega}} = D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega},$$

qui n'a plus ces infinis. Cette fonction impaire, admettant la période ω, est développable en une série de la forme

$$\varphi(z) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \left(e^{\frac{2m\pi z i}{\omega}} - e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}}\right),$$

et convergente dans la bande comprise entre les parallèles à la direction ω menées par les points $z = \pm\omega'$. Pour évaluer les coefficients

$$A_m = \frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} \varphi(z) e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}} dz,$$

on considère l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int \varphi(z) e^{\frac{-2m\pi z i}{\omega}} dz,$$

relative au contour d'un parallélogramme A'EFA, dont les sommets A et A' sont les points $z = \pm\frac{\omega}{2}$, et les sommets F et E les points $z = \pm\frac{\omega}{2} - (2n'+1)\frac{\omega'}{2}$. Les parties relatives aux côtés A'E, EA se détruisant, et celle relative au côté EF étant infiniment petite, l'intégrale se réduit à $-\frac{\omega}{2\pi i}A_m$. D'autre part, la somme des résidus relatifs aux pôles $\alpha = -n\omega'$, situés dans ce parallélogramme, est $\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}$. On a donc

$$A_m = -\frac{2\pi i}{\omega}\,\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}},$$

et par suite

$$\varphi(z) = \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

(6) $$D\log\theta_1(z) = \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega}.$$

En remplaçant z par $z+\frac{\omega}{2}$, on obtient la série

$$(7) \qquad \mathrm{D}\log\theta_2(z) = -\frac{\pi}{\omega}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

convergente dans la même étendue.

Développement des logarithmes des fonctions elliptiques.

297. Des développements que nous venons de trouver, on déduit immédiatement ceux des logarithmes des rapports des fonctions θ deux à deux. On a, par exemple,

$$\mathrm{D}\log\lambda(z) = \mathrm{D}\log\theta_1(z) - \mathrm{D}\log\theta(z),$$
$$\mathrm{D}\log\mu(z) = \mathrm{D}\log\theta_2(z) - \mathrm{D}\log\theta(z),$$
$$\mathrm{D}\log\nu(z) = \mathrm{D}\log\theta_3(z) - \mathrm{D}\log\theta(z),$$

et par suite

$$(8) \qquad \mathrm{D}\log\lambda(z) = \frac{\pi}{\omega}\cot\frac{\pi z}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^m}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

$$(9) \qquad \mathrm{D}\log\mu(z) = -\frac{\pi}{\omega}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m}\sin\frac{2m\pi z}{\omega},$$

$$(10) \qquad \mathrm{D}\log\nu(z) = -\frac{8\pi}{\omega}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2(2m-1)}}\sin\frac{2(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Ces séries sont convergentes dans la partie du plan comprise entre les parallèles à la direction ω menées par les points $\pm\frac{\omega'}{2}$. Par l'intégration, on obtiendrait les développements des fonctions $\log\theta(z)$ et des fonctions $\log\lambda(z)$, $\log\mu(z)$, $\log\nu(z)$.

298. Remarque I. — L'équation (9) donne une démonstration simple d'une propriété remarquable des nombres entiers. Le premier

membre est égal à $\frac{-g\lambda(z)\nu(z)}{\mu(z)}$; sa dérivée, pour $z=0$, se réduit à $-g^2$; en prenant de même la dérivée du second membre et faisant $z=0$, on obtient l'équation

$$(11)\qquad \frac{g^2\omega^2}{\pi^2}=1+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{mq^m}{1+(-1)^m q^m}.$$

Mais nous avons trouvé (n° 205)

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{g\omega}{\pi}}=\theta_3(0)=1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{m^2}.$$

Il en résulte l'identité

$$(13)\qquad 1+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{mq^m}{1+(-1)^m q^m}=\left(1+2\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{m^2}\right)^4.$$

Le premier membre, ordonné par rapport aux puissances croissantes de q, contient toutes les puissances de q, et dans le second membre, ordonné de la même manière, chacun des exposants est la somme de quatre carrés; à cause de l'identité, on en conclut que tout nombre entier est la somme de quatre carrés.

299. Remarque II. — L'équation différentielle

$$\frac{du}{dz}=\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

à laquelle satisfait la fonction $u=\lambda(z)$, dont le multiplicateur est égal à l'unité, peut s'écrire

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\sqrt{1-k^2u^2}\,dz=\nu(z)\,dz;$$

on en déduit

$$\arcsin u=\int_0^z \nu(z)\,dz,$$

et, en vertu de la série (3),

$$(14)\qquad \arcsin\lambda(z) = \frac{\pi z}{\omega} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^m}{m(1+q^{2m})}\sin\frac{2m\pi z}{\omega}.$$

La même équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{du}{\sqrt{1-k^2u^2}} = \sqrt{1-u^2}\,dz = \mu(z)\,dz;$$

on en déduit

$$\frac{1}{k}\arcsin ku = \int_0^z \mu(z)\,dz,$$

et, en vertu de la série (2),

$$(15)\qquad \arcsin k\lambda(z) = 4\sqrt{q}\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{m-1}}{(2m-1)(1+q^{2m-1})}\sin\frac{(2m-1)\pi z}{\omega}.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $z = \frac{\omega}{2}$, on obtient la série

$$(16)\qquad \arcsin k = 4\sqrt{q}\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m-1}q^{m-1}}{(2m-1)(1+q^{2m-1})},$$

ou, d'après une remarque faite au n° 68,

$$(17)\qquad \arcsin k = 4\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m-1}\operatorname{arc\,tang} q^{\frac{2m-1}{2}}.$$

Les développements exposés dans ce Chapitre ont été trouvés par Jacobi (*Fundamenta nova*).

LIVRE VII.

ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS θ.

Formule fondamentale.

300. Les fonctions

$$\mathrm{A}\frac{\theta_1(z-x)\,\theta_1(z+x-a-b)}{\theta_1(z-a)\,\theta_1(z-b)},\quad \mathrm{B}\frac{\theta_1(z-y)\,\theta_1(z+y-a-b)}{\theta_1(z-a)\,\theta_1(z-b)}$$

admettant les deux périodes ω, ω', leur somme

$$\varphi(z)=\frac{\mathrm{A}\,\theta_1(z-x)\,\theta_1(z+x-a-b)+\mathrm{B}\,\theta_1(z-y)\,\theta_1(z+y-a-b)}{\theta_1(z-a)\,\theta_1(z-b)}$$

admet ces mêmes périodes; c'est une fonction méromorphe doublement périodique du second ordre, dont les infinis sont a et b. Or on peut disposer des coefficients A et B, de manière que le numérateur s'annule pour $z=a$ et pour $z=b$; il suffit pour cela que ces coefficients satisfassent à la condition

$$\mathrm{A}\,\theta_1(x-a)\,\theta_1(x-b)+\mathrm{B}\,\theta_1(y-a)\,\theta_1(y-b)=0,$$

qui, à cause de la symétrie, est la même pour les deux racines; alors

la fonction $\varphi(z)$, qui ne devient plus infinie, est une constante. L'un des coefficients restant arbitraire, on peut en disposer de manière que cette valeur constante soit égale à l'unité. On a ainsi l'équation

$$\theta_1(z-a)\theta_1(z-b) = \mathrm{A}\,\theta_1(z-x)\theta_1(z+x-a-b) + \mathrm{B}\,\theta_1(z-y)\theta_1(z+y-a-b).$$

Si l'on y fait successivement $z=y$, $z=x$, on obtient les coefficients

$$\mathrm{A} = -\frac{\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)}{\theta_1(x-y)\theta_1(x+y-a-b)},\quad \mathrm{B} = \frac{\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)}{\theta_1(x-y)\theta_1(x+y-a-b)},$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} &\theta_1(x-a)\theta_1(x-b)\theta_1(y+z-a-b)\theta_1(y-z)\\ +&\theta_1(y-a)\theta_1(y-b)\theta_1(z+x-a-b)\theta_1(z-x)\\ +&\theta_1(z-a)\theta_1(z-b)\theta_1(x+y-a-b)\theta_1(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Nous y remplacerons a et b par $-a$ et $-b$, et nous l'écrirons sous la forme

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{ \begin{aligned} &\theta_1(x+a)\theta_1(x+b)\theta_1(y+z+a+b)\theta_1(y-z)\\ +&\theta_1(y+a)\theta_1(y+b)\theta_1(z+x+a+b)\theta_1(z-x)\\ +&\theta_1(z+a)\theta_1(z+b)\theta_1(x+y+a+b)\theta_1(x-y) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation renferme cinq quantités arbitraires x, y, z, a, b. On déduit le deuxième terme du premier, et le troisième du deuxième, par la permutation circulaire des lettres x, y, z. Le premier membre est une fonction symétrique des deux quantités a et b, et une fonction alternée des trois quantités x, y, z deux à deux. On vérifie aisément que l'équation ne change pas lorsqu'on ajoute ω ou ω' à l'une quelconque des cinq quantités x, y, z, a, b, et qu'elle ne change pas non plus lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ aux cinq quantités à la fois.

301. De cette équation fondamentale on déduit un grand nombre d'équations de même forme, en ajoutant, soit $\frac{\omega}{2}$, soit $\frac{\omega'}{2}$, soit $\frac{\omega+\omega'}{2}$, à une ou à plusieurs des cinq quantités x, y, z, a, b, ce qui remplace les

fonctions θ_1 par d'autres fonctions θ. Chacune des lettres x, y, z entre dans deux des quatre fonctions θ qui composent chaque terme de l'équation ; chacune des lettres a et b entre aussi dans deux de ces fonctions. Quelles que soient les quatre fonctions θ qui composent un terme, on reconnaît que, lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ à l'une des quantités x, y, z, deux fonctions θ sont remplacées par d'autres, et, au signe près, les trois termes de l'équation sont multipliés par un même facteur dont on peut faire abstraction ; il en est de même lorsqu'on ajoute $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ à l'une des quantités a et b. Le premier membre de chacune des équations renferme douze fonctions portant sur les quantités

$$\begin{array}{l}(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),\\ (y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x),\\ (z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),\end{array}$$

que nous supposerons toujours disposées dans le même ordre, ce qui nous dispensera de les écrire. Chacune des quatre fonctions θ pouvant porter sur douze quantités, les équations renferment en tout 12×4 ou 48 fonctions θ.

Nous déduirons toutes ces équations de l'équation fondamentale, en attribuant à chacune des cinq lettres x, y, z, a, b qu'elle renferme quatre valeurs différentes ; par exemple, nous attribuerons à x les quatre valeurs x, $x+\frac{\omega}{2}$, $x+\frac{\omega'}{2}$, $x+\frac{\omega+\omega'}{2}\cdot$ Puisque l'équation ne change pas lorsque les cinq lettres éprouvent la même modification, nous pouvons laisser invariable l'une des lettres et nous borner à attribuer à chacune des quatre autres les quatre valeurs dont elle est susceptible, ce qui donnera 4^4 ou 256 équations différentes. Lorsque les deux lettres a et b éprouvent une même modification, l'équation reste symétrique par rapport à a et à b ; mais si une seule de ces lettres est modifiée, ou si elles éprouvent des modifications différentes, l'équation cesse d'être symétrique. Lorsqu'une seule des trois lettres x, y, z, par exemple x, est modifiée, ou lorsque les deux lettres y et z éprouvent la même modification, le premier membre de l'équation est encore alterne par rapport aux deux lettres y et z ; mais il cesse de l'être par rapport à x et

à y et par rapport à x et à z. Nous sommes conduits de la sorte à ranger les 256 équations en six classes, de la manière suivante.

302. Première classe. *Relations alternes par rapport à deux quelconques des lettres x, y, z et symétriques en a et b.* — On les déduit de l'équation fondamentale en ajoutant aux deux lettres a et b la même quantité $0, \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}$, ce qui donne les *quatre* équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 + \theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 + \theta\ \theta\ \theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 &= 0,\\
\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 &= 0.
\end{aligned}$$

303. Deuxième classe. *Relations alternes par rapport à deux quelconques des lettres x, y, z, mais non symétriques en a et b.* — On les déduit de l'équation fondamentale en ajoutant aux deux lettres a et b des quantités différentes; comme on peut ajouter les six couples de quantités

$$\left(0, \frac{\omega'}{2}\right), \quad \left(0, \frac{\omega}{2}\right), \quad \left(0, \frac{\omega+\omega'}{2}\right), \quad \left(\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega}{2}\right), \quad \left(\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}\right), \quad \left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)$$

dans un ordre ou dans l'autre, on obtient *douze* équations de la seconde classe. On a d'abord les six équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\theta\ \theta\ \theta_1 + \theta_1\theta\ \theta\ \theta_1 + \theta_1\theta\ \theta\ \theta_1 &= 0,\\
\theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 + \theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 + \theta_1\theta_2\theta_2\theta_1 &= 0,\\
\theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_3\theta_3\theta_1 &= 0,\\
\theta\ \theta_2\theta_3\theta_1 + \theta\ \theta_2\theta_3\theta_1 + \theta\ \theta_2\theta_3\theta_1 &= 0,\\
\theta\ \theta_3\theta_2\theta_1 + \theta\ \theta_3\theta_2\theta_1 + \theta\ \theta_3\theta_2\theta_1 &= 0,\\
\theta_2\theta_3\theta\ \theta_1 + \theta_2\theta_3\theta\ \theta_1 + \theta_2\theta_3\theta\ \theta_1 &= 0.
\end{aligned}$$

En ajoutant aux lettres a et b les mêmes quantités en ordre inverse, on obtient six autres équations qui se déduisent des précédentes par la permutation des lettres a et b; afin de laisser les quantités $x+a$, $x+b, \ldots$ dans le même ordre, on permutera dans chaque terme les deux premières fonctions θ considérées comme de purs symboles, de

manière que la fonction qui portait sur $x+a$ porte maintenant sur $x+b$, et réciproquement.

304. TROISIÈME CLASSE. *Relations alternes par rapport à deux des lettres x, y, z et symétriques en a et b.* — Si, dans les équations de la première classe, on ajoute à x l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on forme douze équations symétriques en a et b, et alternes par rapport à y et z :

$$\theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta\;\theta + \theta_1\theta_1\theta\;\theta = 0,$$
$$\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta\;\theta\;\theta\;\theta + \theta\;\theta\;\theta\;\theta = 0,$$
$$\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta\;\theta - \theta_2\theta_2\theta\;\theta = 0,$$
$$\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta\;\theta - \theta_3\theta_3\theta\;\theta = 0;$$

$$\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 = 0,$$
$$\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 - \theta\;\theta\;\theta_2\theta_2 + \theta\;\theta\;\theta_2\theta_2 = 0,$$
$$\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 = 0,$$
$$\theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 - \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 = 0;$$

$$\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 - \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 = 0,$$
$$\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1 - \theta\;\theta\;\theta_3\theta_3 + \theta\;\theta\;\theta_3\theta_3 = 0,$$
$$\theta\;\theta\;\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 - \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 = 0,$$
$$\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 - \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 = 0.$$

On a de même douze équations alternes par rapport à z et x, et douze alternes par rapport à x et y, ce qui fait $4\times3\times3$ ou 36 équations de la troisième classe. Des premières on déduit les secondes en permutant circulairement les trois lettres x, y, z; ceci revient à permuter circulairement les trois termes considérés comme des symboles, en laissant toujours les quantités $x+a$, $x+b$,... dans le même ordre; on déduit de même les troisièmes des secondes.

305. QUATRIÈME CLASSE. *Relations alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, mais non symétriques en a et b.* — Elles se déduisent de celles de la seconde classe de la même manière que la troisième classe de la première. Si, dans les équations de la seconde classe, on ajoute à x l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on forme 12×3 ou 36 équa-

tions non symétriques en a et b, et alternes par rapport à y et z. On a d'abord les 18 équations

$$
\begin{aligned}
&\theta\,\theta_1\,\theta\,\theta_1 - \theta_1\,\theta\,\theta_1\,\theta + \theta_1\,\theta\,\theta_1\,\theta = 0,\\
&\theta\,\theta_3\,\theta_2\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,\theta + \theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,\theta = 0,\\
&\theta\,\theta_2\,\theta_3\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_3\,\theta_2\,\theta + \theta_1\,\theta_3\,\theta_2\,\theta = 0,\\
&\theta_1\,\theta_3\,\theta_3\,\theta_1 - \theta\,\theta_2\,\theta_2\,\theta + \theta\,\theta_2\,\theta_2\,\theta = 0,\\
&\theta_1\,\theta_2\,\theta_2\,\theta_1 - \theta\,\theta_3\,\theta_3\,\theta + \theta\,\theta_3\,\theta_3\,\theta = 0,\\
&\theta_3\,\theta\,\theta\,\theta_1 + \theta_2\,\theta_3\,\theta_1\,\theta - \theta_2\,\theta_3\,\theta_1\,\theta = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_2\,\theta_3\,\theta\,\theta_1 - \theta_1\,\theta\,\theta_3\,\theta_2 + \theta_1\,\theta\,\theta_3\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_2\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_2 + \theta_1\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_2\,\theta\,\theta_3\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_3\,\theta\,\theta_2 + \theta_1\,\theta_3\,\theta\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_3\,\theta_1\,\theta_3\,\theta_1 + \theta\,\theta_2\,\theta\,\theta_2 - \theta\,\theta_2\,\theta\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_3\,\theta\,\theta_2\,\theta_1 + \theta\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_2 - \theta\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_2 = 0,\\
&\theta_1\,\theta\,\theta\,\theta_1 + \theta_2\,\theta_3\,\theta_3\,\theta_2 - \theta_2\,\theta_3\,\theta_3\,\theta_2 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_3\,\theta_2\,\theta\,\theta_1 - \theta_1\,\theta\,\theta_2\,\theta_3 + \theta_1\,\theta\,\theta_2\,\theta_3 = 0,\\
&\theta_3\,\theta\,\theta_2\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_2\,\theta\,\theta_3 + \theta_1\,\theta_2\,\theta\,\theta_3 = 0,\\
&\theta_3\,\theta_1\,\theta_3\,\theta_1 - \theta_1\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_3 + \theta_1\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_3 = 0,\\
&\theta_2\,\theta\,\theta_3\,\theta_1 + \theta\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_3 - \theta\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_3 = 0,\\
&\theta_2\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_1 + \theta\,\theta_3\,\theta\,\theta_3 - \theta\,\theta_3\,\theta\,\theta_3 = 0,\\
&\theta\,\theta_1\,\theta\,\theta_1 - \theta_2\,\theta_3\,\theta_2\,\theta_3 + \theta_2\,\theta_3\,\theta_2\,\theta_3 = 0.
\end{aligned}
$$

On obtient les 18 autres en permutant dans chaque terme les deux premières fonctions θ. On a, de même, 36 équations alternes par rapport à z et x, que l'on déduit des précédentes par la permutation circulaire des termes, et 36 équations alternes par rapport à x et y, ce qui fait en tout $12 \times 3 \times 3 = 108$ équations de la quatrième classe.

306. Cinquième classe. *Relations non alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, et symétriques en a et b.* — On les déduit des équations de la première classe, en ajoutant aux trois lettres x, y, z trois quantités différentes, prises à volonté parmi les quatre quantités 0, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$; mais nous pouvons exclure la dernière $\frac{\omega+\omega'}{2}$; car supposons que l'on ajoute à x, y, z respectivement 0, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$;

en retranchant des cinq lettres la même quantité $\frac{\omega'}{2}$, ce qui ne change pas l'équation, on ramène ce cas à celui où l'on ajoute $-\frac{\omega'}{2}$, o, $\frac{\omega}{2}$, ou $\frac{\omega'}{2}$, o, $\frac{\omega}{2}$. De même, supposons que l'on ajoute à x, y, z respectivement $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$; en retranchant des cinq lettres la même quantité $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on ramène ce cas à celui où l'on ajoute $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, o. Ainsi nous pouvons nous borner à ajouter à x, y, z les trois quantités o, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$ prises dans un ordre quelconque; nous obtiendrons de la sorte 4×6, ou 24 équations de la cinquième classe.

En remplaçant, dans les équations de la première classe, y par $y+\frac{\omega'}{2}$ et z par $z+\frac{\omega}{2}$, sans changer x, on forme les quatre équations

$$\begin{aligned}
\theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 + \theta\,\theta\,\theta_2\theta_2 - \theta_2\theta_2\theta\,\theta &= 0,\\
\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2 - \theta_3\theta_3\theta\,\theta &= 0,\\
\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 - \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 - \theta_1\theta_1\theta\,\theta &= 0,\\
\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 - \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 - \theta\,\theta\,\theta\,\theta &= 0.
\end{aligned}$$

Concevons maintenant que l'on permute deux quelconques des trois lettres x, y, z, par exemple y et z; les douze quantités

$$\begin{aligned}
&(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),\\
&(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x),\\
&(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),
\end{aligned}$$

sur lesquelles portent les douze fonctions θ qui entrent dans chaque équation, deviennent

$$\begin{aligned}
&(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ -y+z),\\
&(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ -x+y),\\
&(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ -z+x).
\end{aligned}$$

Comme on peut changer le signe de la quantité sur laquelle porte la dernière fonction θ dans chaque terme, puisque cette fonction est paire,

on substituera à ces quantités les suivantes :

$$\begin{gathered}(x+a,\ x+b,\ y+z+a+b,\ y-z),\\(z+a,\ z+b,\ x+y+a+b,\ x-y),\\(y+a,\ y+b,\ z+x+a+b,\ z-x).\end{gathered}$$

Pour rétablir l'ordre primitif, il suffit de permuter les deux derniers termes de l'équation. Il résulte de là que l'on peut, dans les quatre équations précédentes, permuter les termes deux à deux de toutes les manières possibles; les trois termes de chaque équation présentant six arrangements, on a ainsi les 24 équations de la cinquième classe.

307. Sixième classe. *Relations non alternes par rapport à deux des lettres x, y, z, et non symétriques en a et b.* — Elles se déduisent de celles de la deuxième classe, comme la cinquième classe de la première, ce qui fait 12×6 ou 72 équations. Si, dans les 12 équations de la deuxième classe, on remplace y par $y+\frac{\omega'}{2}$ et z par $z+\frac{\omega}{2}$, sans changer x, on obtient les 6 équations

$$\begin{gathered}\theta_1\,\theta\;\theta_2\,\theta_3+\theta\;\theta_1\,\theta_3\,\theta_2-\theta_2\,\theta_3\,\theta_1\,\theta=0,\\ \theta_1\,\theta_2\,\theta\;\theta_3-\theta\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1\,\theta_3\,\theta=0,\\ \theta_1\,\theta_3\,\theta_1\,\theta_3-\theta\;\theta_2\,\theta\;\theta_2+\theta_2\,\theta\;\theta_2\,\theta=0,\\ \theta\;\theta_2\,\theta_1\,\theta_3-\theta_1\,\theta_3\,\theta\;\theta_2-\theta_3\,\theta_1\,\theta_2\,\theta=0,\\ \theta\;\theta_3\,\theta\;\theta_3-\theta_1\,\theta_2\,\theta_1\,\theta_2-\theta_3\,\theta\;\theta_3\,\theta=0,\\ \theta_2.\theta_3\,\theta_2\,\theta_3-\theta_3\,\theta_2\,\theta_3\,\theta_2+\theta_1\,\theta\;\theta_1\,\theta=0,\end{gathered}$$

et les 6 que l'on en déduit en permutant dans chaque terme les deux premières fonctions θ. En permutant ensuite les termes deux à deux, comme nous l'avons expliqué, on formera les 72 équations cherchées.

Équations à deux lettres.

308. Première espèce. — Les équations précédentes renferment cinq quantités arbitraires x, y, z, a, b. Si l'on attribue à quelques-unes de ces lettres des valeurs déterminées, ou si l'on établit entre elles certaines relations, les équations ne renfermeront plus qu'un moindre

nombre de quantités. Supposons que l'on fasse $x=y=z=0$; les quatre fonctions θ, qui composent chaque terme, porteront sur les quantités a, b, $a+b$, o; les équations des quatre premières classes, qui sont alternes au moins par rapport à deux des lettres x, y, z, se réduisent à des identités; les équations des deux dernières classes, étant indépendantes de l'ordre des termes, se réduisent à seize équations distinctes, savoir : quatre pour la cinquième classe et douze pour la sixième. On a ainsi un premier groupe de quatre équations

$$\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0)+\theta(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0)-\theta_2(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta(a)\theta(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0)+\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0)-\theta_3(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta_2(a)\theta_2(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0)-\theta_3(a)\theta_3(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0)-\theta_1(a)\theta_1(b)\theta(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta_3(a)\theta_3(b)\theta_3(a+b)\theta_3(0)-\theta_2(a)\theta_2(b)\theta_2(a+b)\theta_2(0)-\theta(a)\theta(b)\theta(a+b)\theta(0)=0,$$

et un second groupe formé des six équations

$$\theta_1(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta_3(0)+\theta(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta_2(0)-\theta_2(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta_2(a)\theta_3(b)\theta_2(a+b)\theta_3(0)-\theta_3(a)\theta_2(b)\theta_3(a+b)\theta_2(0)+\theta_1(a)\theta(b)\theta_1(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta_1(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta_3(0)-\theta(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta_2(0)+\theta_2(a)\theta(b)\theta_2(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta(a)\theta_2(b)\theta_1(a+b)\theta_3(0)-\theta_1(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta_2(0)-\theta_3(a)\theta_1(b)\theta_2(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta_1(a)\theta_2(b)\theta(a+b)\theta_3(0)-\theta(a)\theta_3(b)\theta_1(a+b)\theta_2(0)+\theta_2(a)\theta_1(b)\theta_3(a+b)\theta(0)=0,$$
$$\theta(a)\theta_3(b)\theta(a+b)\theta_3(0)-\theta_1(a)\theta_2(b)\theta_1(a+b)\theta_2(0)-\theta_3(a)\theta(b)\theta_3(a+b)\theta(0)=0,$$

et des six qu'on en déduit en permutant a et b, ou, ce qui est la même chose, les deux premières fonctions θ dans chaque terme. Ces seize équations trinômes entre les quatre quantités $\theta(a+b)$ déterminent les rapports de trois de ces quantités à la quatrième, et, par conséquent, se réduisent à un système de trois équations distinctes.

309. Seconde espèce. — Supposons que l'on fasse $y=z=0$ et $b=-a$, les douze quantités sur lesquelles portent les fonctions θ, dans chaque équation, deviennent

$$(x+a,\ x-a,\ 0,\ 0),\quad (a,\ -a,\ x,\ -x),\quad (a,\ -a,\ x,\ x).$$

Les deux quantités y et z étant égales, les équations des deux premières classes se réduisent à des identités. La troisième classe se com-

pose de trois groupes de douze équations; celles du premier groupe, étant alternes par rapport à y et z, se réduisent aussi à des identités; celles du troisième groupe, se déduisant de celles du deuxième par la permutation de y et z, se confondent avec celles-ci; il suffit donc de considérer les douze équations du deuxième groupe. La cinquième classe se compose de deux groupes de douze équations, tels que le second se déduit du premier par la permutation des deux derniers termes; ces deux groupes se confondant, il suffit de considérer les douze équations du premier groupe. Ainsi la troisième et la cinquième classe donnent les 24 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta^2(x) - \theta^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_1(x+a)\,\theta_1(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) - \theta^2(a)\,\theta_2^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) + \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_3^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta^2(x) = \theta^2(a)\,\theta_2^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_2^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta^2(a)\,\theta^2(x),\\
\theta_2(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_3^2(0) &= -\theta^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta^2(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_2^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta^2(x) = \theta^2(a)\,\theta_3^2(x) - \theta_1^2(a)\,\theta_2^2(x),\\
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_2^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta_2^2(x) = \theta_1^2(a)\,\theta^2(x) + \theta_2^2(a)\,\theta_3^2(x),\\
\theta_3(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3^2(0) &= \theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x) + \theta_3^2(a)\,\theta_3^2(x) = \theta_2^2(a)\,\theta_2^2(x) + \theta^2(a)\,\theta^2(x).
\end{aligned}$$

Les deuxièmes membres proviennent de la troisième classe, les troisièmes de la cinquième classe. Les premiers membres étant symétriques ou alternes par rapport à x et a, les deuxièmes et les troisièmes membres jouissent de la même propriété. Les produits $\theta\,(x+a)\,\theta\,(x-a)$, formés d'une même fonction θ, sont égaux, d'après cela, à des expressions binômes renfermant les carrés de deux fonctions $\theta\,(x)$ et les carrés de deux fonctions $\theta\,(a)$.

Remarquons que les six expressions d'un même produit peuvent se déduire de l'une d'entre elles, à l'aide des deux relations linéaires qui existent entre les quatre fonctions $\theta^2\,(x)$ et de celles qui existent entre les quatre fonctions $\theta^2\,(a)$ (n° 157).

310. La quatrième classe se compose de trois groupes de 36 équations; le premier groupe se réduisant à des identités, et le troisième se confondant avec le deuxième, il suffit de considérer celui-ci. Dans ce deuxième groupe, il y a 12 équations qui renferment la quantité nulle $\theta_1(0)$, et qui, par conséquent, se réduisent à des identités; il en reste 24, qui se confondent deux à deux; le nombre des équations distinctes est donc 12. On reconnaît d'ailleurs que la sixième classe donne les mêmes équations que la quatrième. Ces équations sont les six suivantes :

$$\theta_1(x+a)\,\theta\,(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0) = \theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta\,(x)\,\theta_1(x) + \theta_1(a)\,\theta\,(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$

$$\theta_1(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta\,(0) = \theta\,(a)\,\theta_3(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x) + \theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_3(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta_1(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta\,(0) = \theta\,(a)\,\theta_2(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x) + \theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_2(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta\,(x+a)\,\theta_2(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta\,(0) = \theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x) + \theta\,(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta\,(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta\,(0) = \theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x) + \theta\,(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta\,(x),$$

$$\theta_2(x+a)\,\theta_3(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0) = -\,\theta_1(a)\,\theta(a)\,\theta(x)\,\theta_1(x) + \theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$

et les six qu'on en déduit, en remplaçant a par $-a$. Les deuxièmes membres, comme les premiers, sont symétriques ou alternes par rapport à x et a. Les produits $\theta(x+a)\,\theta(x-a)$, formés de deux fonctions θ différentes, sont égaux à des binômes renfermant chacun les quatre fonctions $\theta(x)$ et les quatre fonctions $\theta(a)$.

Formules de Jacobi.

311. Des relations précédentes on déduit aisément des formules remarquables trouvées par Jacobi (*Journal de Crelle*, 1845). Soient a, b, c, d quatre quantités arbitraires; si l'on désigne par a', b', c', d' quatre quantités nouvelles définies par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} 2a' = -a+b+c+d, & 2b' = a-b+c+d, \\ 2c' = a+b-c+d, & 2d' = a+b+c-d, \end{cases}$$

on a réciproquement

$$(2)\qquad \begin{cases} 2a = -a'+b'+c'+d', & 2b = a'-b'+c'+d', \\ 2c = a'+b'-c'+d', & 2d = a'+b'+c'-d'. \end{cases}$$

On peut remplacer ces deux systèmes de formules par les relations équivalentes

$$(3)\qquad a+a'=b+b'=c+c'=d+d',\quad a+b=c'+d'.$$

On a aussi la relation

$$(4)\qquad a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2.$$

Supposons maintenant que, dans les six classes d'équations générales, on fasse $a=\alpha$, $b=-\alpha$, c'est-à-dire $a+b=0$; chacune d'elles renfermera les douze quantités

$$(x+\alpha, x-\alpha, y+z, y-z),\ (y+\alpha, y-\alpha, z+x, z-x),\ (z+\alpha, z-\alpha, x+y, x-y),$$

dans l'ordre où nous les avons écrites. Si l'on pose

$$x+\alpha=a,\quad x-\alpha=b,\quad y+z=c,\quad y-z=d,$$

d'où

$$x=\frac{a+b}{2},\quad \alpha=\frac{a-b}{2},\quad y=\frac{c+d}{2},\quad z=\frac{c-d}{2},$$

on aura

$$y+\alpha=b',\quad y-\alpha=a',\quad z+x=d',\quad z-x=-c'.$$

Dans chaque équation, les quatre facteurs du premier terme porteront sur a, b, c, d les quatre facteurs du second terme sur b', a', d', $-c'$; afin de conserver l'ordre alphabétique des lettres, on permutera dans le second terme les deux premiers facteurs entre eux, ainsi que les deux derniers, en ayant soin, avant la permutation, de changer le signe de la quantité qui entre dans le dernier facteur.

Dans le troisième terme entrent les quantités

$$z+\alpha=\frac{a-b+c-d}{2},\qquad x+y=\frac{a+b+c+d}{2},$$
$$z-\alpha=\frac{-a+b+c-d}{2},\qquad x-y=\frac{a+b-c-d}{2},$$

que nous désignerons par a'', b'', c'', d''. De cette manière, dans chacune des équations, les quatre fonctions qui forment le premier terme por-

teront sur les quantités a, b, c, d, celles du second sur a', b', c', d', et celles du troisième sur a'', b'', c'', d'', dans l'ordre alphabétique des lettres.

312. Cela posé, considérons celles de ces équations qui renferment le terme $\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3$, que nous supposerons placé au troisième rang par des permutations circulaires, et égalons les valeurs qu'on en tire pour $\theta_3(a'')\theta_3(b'')\theta_3(c'')\theta_3(d'')$; nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta\,\theta + (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)' = \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + (\theta\,\theta\,\theta\,\theta)' \\ &= \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)' = \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3 + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)'. \end{aligned}\right.$$

En égalant les valeurs de $\theta(a'')\theta(b'')\theta(c'')\theta(d'')$, on a de même

$$(6)\qquad \theta\theta\theta\theta + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 = (\theta\theta\theta\theta)' + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)'.$$

Les termes non accentués renferment les lettres a, b, c, d, les termes accentués les lettres a', b', c', d'. Les relations (5) et (6) ont la même forme que les relations (3); les deux suites de quantités

$$(\text{A})\quad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta\,\theta, & \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2, & \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1, & \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)', & (\theta\,\theta\,\theta\,\theta)', & (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)', & (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)' \end{matrix}\right.$$

y jouent le même rôle que les deux suites de quantités

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d' \end{matrix}$$

dans les équations (3). On en déduit les formules

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 2(\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)' &= -\theta\theta\theta\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta\,\theta\,\theta\,\theta) &= \theta\theta\theta\theta - \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)' &= \theta\theta\theta\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 - \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 + \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \\ 2(\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)' &= \theta\theta\theta\theta + \theta_2\theta_2\theta_2\theta_2 + \theta_1\theta_1\theta_1\theta_1 - \theta_3\theta_3\theta_3\theta_3, \end{aligned}\right.$$

analogues aux formules (1). On en déduit ainsi la relation

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(\theta\,\theta\,\theta\,\theta)^2 + (\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)^2 + (\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)^2 + (\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)^2 \\ &= [(\theta_2\theta_2\theta_2\theta_2)']^2 + [(\theta\,\theta\,\theta\,\theta)']^2 + [(\theta_3\theta_3\theta_3\theta_3)']^2 + [(\theta_1\theta_1\theta_1\theta_1)']^2, \end{aligned}\right.$$

analogue à la relation (4).

A cause de la symétrie des formules, il est clair que l'on peut permuter à volonté deux termes de l'une des lignes A, pourvu que l'on permute aussi les termes correspondants de l'autre ligne. Les relations ne changent pas.

313. En égalant de même les valeurs de $(\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)''$ et celles de $(\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)''$, on obtient les relations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + (\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)' = \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' \\ &= \theta_1\theta_1\theta\,\theta + (\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)' = \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2 + (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)', \\ &\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + \theta_1\theta_1\theta\,\theta = (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' + (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta_1\theta_1, & \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3, & \theta_1\theta_1\theta\,\theta, & \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ (\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)', & (\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)', & (\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)', & (\theta_1\theta_1\theta\,\theta)'. \end{matrix}\right.$$

On en déduit les formules

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} 2(\theta_2\theta_2\theta_3\theta_3)' &= -\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\,\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta\,\theta\,\theta_1\theta_1)' &= \theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 - \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\,\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta_3\theta_3\theta_2\theta_2)' &= \theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 - \theta_1\theta_1\theta\,\theta + \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2, \\ 2(\theta_1\theta_1\theta\,\theta)' &= \theta\,\theta\,\theta_1\theta_1 + \theta_2\theta_2\theta_3\theta_3 + \theta_1\theta_1\theta\,\theta - \theta_3\theta_3\theta_2\theta_2. \end{aligned}\right.$$

En égalant les valeurs de $(\theta_2\theta_2\theta\,\theta)''$ et celles de $(\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)''$, on obtient les relations

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2 + (\theta_1\theta_1\theta_3\theta_3)' = \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3 + (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)' \\ &= \theta_2\theta_2\theta\,\theta + (\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)' = \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1 + (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)', \\ &\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2 + \theta_2\theta_2\theta\,\theta = (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)' + (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta_2\theta_2, & \theta_1\theta_1\theta_3\theta_3, & \theta_2\theta_2\theta\,\theta, & \theta_3\theta_3\theta_1\theta_1, \\ (\theta_1\theta_1\theta_3\theta_3)', & (\theta\,\theta\,\theta_2\theta_2)', & (\theta_3\theta_3\theta_1\theta_1)', & (\theta_2\theta_2\theta\,\theta)'. \end{matrix}\right.$$

En égalant les valeurs de $(\theta_3\theta_3\theta\,\theta)''$ et celles de $(\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)''$, on

obtient les relations

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3+(\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2)'=\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2+(\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)'\\ =\;&\theta_3\theta_3\theta\,\theta+(\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)'=\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1+(\theta_3\theta_3\theta\,\theta)',\\ &\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3+\theta_3\theta_3\theta\,\theta=(\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)'+(\theta_3\theta_3\theta\,\theta)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{matrix} \theta\,\theta\,\theta_3\theta_3, & \theta_1\theta_1\theta_2\theta_2, & \theta_3\theta_3\theta\,\theta, & \theta_2\theta_2\theta_1\theta_1,\\ (\theta_1\theta_1\theta_2\theta_2)', & (\theta\,\theta\,\theta_3\theta_3)', & (\theta_2\theta_2\theta_1\theta_1)', & (\theta_3\theta_3\theta\,\theta)'. \end{matrix}\right.$$

Dans les trois groupes de relations caractérisés par les dispositions (B), (C), (D), on peut, à cause de la symétrie des relations, permuter deux termes de l'une des lignes et les deux termes correspondants de la seconde ligne. La symétrie des formules (1) et (2) permet aussi de permuter deux quelconques des lettres a, b, c, d; ceci revient à changer l'ordre des facteurs dans les relations précédentes. Nous avons ainsi toutes les relations où la même fonction forme deux facteurs d'un terme, et une autre les deux autres facteurs.

314. En égalant les valeurs de $(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)''$ et celles de $(\theta\theta_1\theta_2\theta_3)''$, on obtient aussi les relations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3+(\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3)'=\theta_3\theta_2\theta_1\theta+(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)'\\ =\;&\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1+(\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1)'=\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2+(\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)',\\ &\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_2\theta_3\theta\,\theta_1=(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)'+(\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)', \end{aligned}\right.$$

analogues aux relations (3), par rapport aux deux suites de quantités

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{matrix} \theta\theta_1\theta_2\theta_3, & \theta_3\theta_2\theta_1\theta, & \theta_2\theta_3\theta\theta_1, & \theta_1\theta\theta_3\theta_2,\\ (\theta\theta_1\theta_2\theta_3)', & (\theta_3\theta_2\theta_1\theta)', & (\theta_2\theta_3\theta\theta_1)', & (\theta_1\theta\theta_3\theta_2)'. \end{matrix}\right.$$

On en déduit les formules

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} 2(\theta\,\theta_1\theta_2\theta_3)'&=-\theta\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_2\theta_1\theta+\theta_2\theta_3\theta\theta_1+\theta_1\theta\theta_3\theta_2,\\ 2(\theta_3\theta_2\theta_1\theta)'&=\theta\theta_1\theta_2\theta_3-\theta_3\theta_2\theta_1\theta+\theta_2\theta_3\theta\theta_1+\theta_1\theta\theta_3\theta_2,\\ 2(\theta_2\theta_3\theta_1\theta)'&=\theta\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_2\theta_1\theta-\theta_2\theta_3\theta\theta_1+\theta_1\theta\theta_3\theta_2,\\ 2(\theta_1\theta\,\theta_3\theta_2)'&=\theta\theta_1\theta_2\theta_3+\theta_3\theta_2\theta_1\theta+\theta_2\theta_3\theta\theta_1-\theta_1\theta\theta_3\theta_2. \end{aligned}\right.$$

Chaque terme est formé des quatre fonctions θ. On obtient toutes les relations de cette sorte, en permutant de la même manière les facteurs dans tous les termes.

315. Si, dans les équations générales, on fait $x = y = 0$, les douze fonctions θ, qui entrent dans chacune d'elles, portent sur les quantités

$$(a, b, a+b+z, -z), \quad (a, b, a+b+z, z), \quad (z+a, z+b, a+b, 0).$$

Les équations de la troisième classe qui contiennent l'un des termes $\theta\theta\theta\theta$, $\theta\theta\theta_3\theta_3$, $\theta\theta\theta_2\theta_2$, donnent

$$\begin{aligned}
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta(a+b)\,\theta(0)\\
&\quad= \theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z),\\
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta_3(a+b)\,\theta_3(0)\\
&\quad= \theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b+z) + \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z),\\
&\theta(a+z)\,\theta(b+z)\,\theta_2(a+b)\,\theta_2(0)\\
&\quad= \theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b+z) + \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z).
\end{aligned}$$

En divisant membre à membre les équations précédentes et celles que l'on obtient en remplaçant z par $-z$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(a+z)\,\theta(b+z)}{\theta(a-z)\,\theta(b-z)} &= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b+z) + \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(z)\,\theta(a+b-z) - \theta_1(a)\,\theta_1(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}\\
&= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b+z) + \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_3(z)\,\theta_3(a+b-z) - \theta_2(a)\,\theta_2(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}\\
&= \frac{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b+z) + \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\,\theta(b)\,\theta_2(z)\,\theta_2(a+b-z) - \theta_3(a)\,\theta_3(b)\,\theta_1(z)\,\theta_1(a+b-z)}.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne le premier membre par N, on en déduit

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda(a)\,\lambda(b) &= \frac{1}{k}\,\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta(a+b-z) - \theta(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)},\\
\mu(a)\,\mu(b) &= \frac{k'}{k}\,\frac{\theta_3(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta_3(a+b-z) - \theta_3(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)},\\
\nu(a)\,\nu(b) &= k'\,\frac{\theta_2(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{\mathrm{N}\theta_2(a+b-z) - \theta_2(a+b+z)}{\mathrm{N}\theta_1(a+b-z) + \theta_1(a+b+z)}.
\end{aligned}\right.$$

316. Ces dernières relations permettent de résoudre une question de Calcul intégral, intéressante par son analogie avec les fonctions abéliennes (*Académie des Sciences; Savants étrangers*, 1851; *Mémoire de Rosenhain*). Les deux équations différentielles simultanées

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{\Delta u}+\frac{dv}{\Delta v}=dx,\\ &\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)u^2}{1-k^2\lambda^2(a)u^2}\right]\frac{du}{\Delta u}+\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)v^2}{1-k^2\lambda^2(a)v^2}\right]\frac{dv}{\Delta v}=dy,\end{aligned}\right.$$

auxquelles on joint les conditions initiales $u=0$, $v=0$, $\Delta u=1$, $\Delta v=1$ pour $x=0$ et $y=0$, Δu et Δv désignant les deux radicaux $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$, $\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}$, définissent deux fonctions u et v des deux variables indépendantes x et y. On peut les mettre sous la forme

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^u\frac{du}{\Delta u}+\int_0^v\frac{dv}{\Delta v}=x,\\ &\int_0^u\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)u^2}{1-k^2\lambda^2(a)u^2}\right]\frac{du}{\Delta u}+\int_0^v\left[-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)v^2}{1-k^2\lambda^2(a)v^2}\right]\frac{dv}{\Delta v}=y.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$z=\int_0^u\frac{du}{\Delta u},\quad t=\int_0^v\frac{dv}{\Delta v},$$

d'où $u=\lambda(z)$, $v=\lambda(t)$, ces équations deviennent, en vertu de la formule (21) du n° 275,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &z+t=x,\\ &\frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-t)}{\theta(a+t)}=y,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &z+t=x,\\ &\frac{\theta(z+a)\theta(t+a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)}=e^{-2y}.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant a, b, z par z, t, a dans les équations (15), et remar-

quant que la quantité N devient égale à e^{-2y}, on a

$$(20)\quad \begin{cases} \lambda(z)\lambda(t) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\theta(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta(x-a) - e^{y}\theta(x+a)}{e^{-y}\theta_1(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}, \\ \mu(z)\mu(t) = \dfrac{k'}{k}\dfrac{\theta_3(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta_3(x-a) - e^{y}\theta_3(x+a)}{e^{-y}\theta_2(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}, \\ \nu(z)\nu(t) = k'\dfrac{\theta_2(a)}{\theta_1(a)}\dfrac{e^{-y}\theta_2(x-a) - e^{y}\theta_2(x+a)}{e^{-y}\theta_1(x-a)+e^{y}\theta_1(x+a)}. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations sont des fonctions monotropes des deux variables indépendantes x et y. La première donne le produit uv, la seconde donne $\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}$, d'où l'on déduira u^2+v^2. On en conclut que u^2 et v^2 sont les racines d'une équation du second degré

$$(21)\qquad \varphi^2 - P\varphi + Q = 0,$$

dont les coefficients P et Q sont des fonctions monotropes des deux variables x et y. A chaque système de valeurs de x et y correspond un seul système de valeurs de u^2 et v^2; ces valeurs de u^2 et de v^2 se permutent, quand les variables x et y arrivent aux mêmes points par différents chemins.

A l'inspection des équations (20), on reconnaît que les quantités u^2v^2 et u^2+v^2 reprennent les mêmes valeurs quand on augmente x de ω, y ne changeant pas, ou y de πi, x ne changeant pas, ou simultanément x de ω' et y de $\frac{2\pi a i}{\omega}$. On en conclut que les deux fonctions monotropes P et Q reprennent les mêmes valeurs pour tous les systèmes de valeurs de x et de y compris dans les formules

$$x + m\omega + m''\omega', \quad y + m'\pi i + m''\frac{2\pi a i}{\omega},$$

m, m', m'' étant des nombres entiers quelconques. Ces deux fonctions admettent donc trois systèmes de périodes conjuguées :

$$\begin{array}{llll} \text{pour } x, & \omega, & 0, & \omega'; \\ \text{pour } y, & 0, & \pi i, & \dfrac{2\pi a i}{\omega}. \end{array}$$

CHAPITRE II.

ADDITION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

317. Nous avons trouvé (nº **308**) seize équations trinômes, linéaires et homogènes, entre les quatre quantités $\theta(a+b)$, $\theta_1(a+b)$, $\theta_2(a+b)$, $\theta_3(a+b)$, qui déterminent leurs rapports et qui, par conséquent, peuvent se réduire à trois d'entre elles. Si l'on divise tous les termes par le produit $\theta(a)\,\theta(b)\,\theta(a+b)\,\theta(0)$, elles se transforment en des relations linéaires entre les trois quantités $\lambda(a+b)$, $\mu(a+b)$, $\nu(a+b)$. Les quatre premières

$$\mu(a+b)+\lambda(a)\lambda(b)\nu(a+b)-\mu(a)\mu(b)=0,$$
$$\nu(a+b)+k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a+b)-\nu(a)\nu(b)=0,$$
$$\nu(a)\nu(b)\mu(a+b)-\mu(a)\mu(b)\nu(a+b)+k'^2\lambda(a)\lambda(b)=0,$$
$$\nu(a)\nu(b)\nu(a+b)-k^2\mu(a)\mu(b)\mu(a+b)-k'^2,$$

sont symétriques en a et b; les douze autres sont les suivantes :

$$\lambda(a)\mu(a+b)+\lambda(b)\nu(a+b)-\mu(a)\nu(b)\lambda(a+b)=0,$$
$$\mu(a)\nu(b)\mu(a+b)-\nu(a)\mu(b)\nu(a+b)+k'^2\lambda(a)\lambda(a+b)=0,$$
$$\lambda(a)\nu(b)\lambda(a+b)+\mu(a)\mu(a+b)-\mu(b)=0,$$
$$\mu(b)\lambda(a+b)-\lambda(b)\nu(a)\mu(a+b)-\lambda(a)\nu(b)=0,$$
$$\nu(b)\lambda(a+b)-\lambda(b)\mu(a)\nu(a+b)-\lambda(a)\mu(b)=0,$$
$$\nu(a)\nu(a+b)+k^2\lambda(a)\mu(b)\lambda(a+b)-\nu(b)=0,$$

et les six qu'on en déduit par la permutation des lettres a et b.

318. Les deux premières donnent $\mu(a+b)$ et $\nu(a+b)$; en substituant ces expressions dans la cinquième, ou dans l'une des suivantes,

on trouve $\lambda(a+b)$. On obtient ainsi les formules

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda(a+b)=\dfrac{\lambda(a)\mu(b)\nu(b)+\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a+b)=\dfrac{\mu(a)\mu(b)-\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a+b)=\dfrac{\nu(a)\nu(b)-k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \end{cases}$$

relatives à l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Quand on connaît les valeurs des fonctions elliptiques pour les arguments a et b, elles donnent leurs valeurs pour un argument $a+b$ égal à la somme des deux premiers.

A l'aide de ces formules et de celles du n° 235, on peut, lorsque le module k est réel, positif et inférieur à l'unité, calculer les valeurs des fonctions elliptiques $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$ pour une valeur imaginaire $z=x+yi$ attribuée à l'argument.

Les relations de seconde espèce conduisent encore plus rapidement à ces formules. Considérons, en effet, les trois équations (n° 310)

$$\theta_1(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta_2(0)=\theta_2(a)\,\theta_3(a)\,\theta(x)\,\theta_1(x)+\theta_1(a)\,\theta(a)\,\theta_3(x)\,\theta_2(x),$$
$$\theta_2(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_2(0)\,\theta(0)=\theta(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta(x)-\theta_1(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta_1(x),$$
$$\theta_3(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta_3(0)\,\theta(0)=\theta(a)\,\theta_3(a)\,\theta_3(x)\,\theta(x)-\theta_1(a)\,\theta_2(a)\,\theta_2(x)\,\theta_1(x),$$

et divisons chacune d'elles membre à membre par la quatrième équation du n° 309

$$\theta(x+a)\,\theta(x-a)\,\theta^2(0)=\theta^2(a)\,\theta^2(x)-\theta_1^2(a)\,\theta_1^2(x),$$

nous obtiendrons immédiatement les formules (1).

319. Les formules précédentes, dans lesquelles on remplace b par $-b$, deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda(a-b)=\dfrac{\lambda(a)\mu(b)\nu(b)-\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \mu(a-b)=\dfrac{\mu(a)\mu(b)+\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}, \\ \nu(a-b)=\dfrac{\nu(a)\nu(b)+k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)}. \end{cases}$$

On en déduit un grand nombre de relations, parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

$$
(3)\quad \left\{ \begin{aligned}
\lambda(a+b)+\lambda(a-b) &= \frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\mu(a+b)+\mu(a-b) &= \frac{2\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\nu(a+b)+\nu(a-b) &= \frac{2\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(4)\quad \left\{ \begin{aligned}
\lambda(a+b)-\lambda(a-b) &= \frac{2\lambda(b)\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\mu(a+b)-\mu(a-b) &= -\frac{2\lambda(a)\lambda(b)\nu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\nu(a+b)-\nu(a-b) &= -\frac{2k^2\lambda(a)\lambda(b)\mu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(5)\quad \left\{ \begin{aligned}
\lambda(a+b)\lambda(a-b) &= \frac{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\mu(a+b)\mu(a-b) &= \frac{\frac{1}{k^2}\left[\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2\right]}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\nu(a+b)\nu(a-b) &= \frac{k^2\mu^2(a)\mu^2(b)+k'^2}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)};
\end{aligned} \right.
$$

$$
(6)\quad \left\{ \begin{aligned}
\mu(a+b)\nu(a-b)+\mu(a-b)\nu(a+b) &= \frac{2\mu(a)\nu(a)\mu(b)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\mu(a+b)\nu(a-b)-\mu(a-b)\nu(a+b) &= \frac{-2k'^2\lambda(a)\lambda(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\lambda(a+b)\nu(a-b)+\lambda(a-b)\nu(a+b) &= \frac{2\lambda(a)\nu(a)\mu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\lambda(a+b)\nu(a-b)-\lambda(a-b)\nu(a+b) &= \frac{2\lambda(b)\nu(b)\mu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\lambda(a+b)\mu(a-b)+\lambda(a-b)\mu(a+b) &= \frac{2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)},\\
\lambda(a+b)\mu(a-b)-\lambda(a-b)\mu(a+b) &= \frac{2\lambda(b)\mu(b)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^3(b)}.
\end{aligned} \right.
$$

Le groupe (5) résulte immédiatement des relations du n° 309.

La première des équations (4) peut être mise sous la forme

$$(7) \qquad \lambda(a+b)-\lambda(a-b)=\frac{1}{k}\,\mathrm{D}_a \log\frac{1+k\lambda(a)\lambda(b)}{1-k\lambda(a)\lambda(b)};$$

on a aussi

$$(8) \qquad \lambda^2(a+b)-\lambda^2(a-b)=-\frac{1}{k^2}\,\mathrm{D}^2_{ab}\log[1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(b)].$$

Jacobi s'est servi de ces dernières formules pour trouver les développements des n^{os} **285** et **286**.

320. Si, dans les relations (3), on ajoute à a l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$, on obtient les neuf relations

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda(a+b)}+\frac{1}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(b)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)},\\
&\frac{1}{\mu(a+b)}+\frac{1}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\mu(a)\mu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{1}{\nu(a+b)}+\frac{1}{\nu(a-b)}=\frac{2\nu(a)\nu(b)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\mu(a+b)}{\nu(a+b)}+\frac{\mu(a-b)}{\nu(a-b)}=\frac{2\mu(a)\mu(b)\nu(a)\nu(b)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\nu(a+b)}{\mu(a+b)}+\frac{\nu(a-b)}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\mu(a)\mu(b)\nu(a)\nu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{\nu(a+b)}{\lambda(a+b)}+\frac{\nu(a-b)}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(a)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)},\\
&\frac{\lambda(a+b)}{\nu(a+b)}+\frac{\lambda(a-b)}{\nu(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(b)\nu(a)}{k'^2+k^2\mu^2(a)\mu^2(b)},\\
&\frac{\lambda(a+b)}{\mu(a+b)}+\frac{\lambda(a-b)}{\mu(a-b)}=\frac{2k^2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{\nu^2(a)\nu^2(b)-k'^2},\\
&\frac{\mu(a+b)}{\lambda(a+b)}+\frac{\mu(a-b)}{\lambda(a-b)}=\frac{2\lambda(a)\mu(a)\nu(b)}{\lambda^2(a)-\lambda^2(b)}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (4) donneraient, de la même manière, neuf relations analogues aux précédentes.

321. *Remarque.* — Nous avons dit (n° **260**) que le problème de la

transformation est de trouver une fonction y de x, telle que l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, où Y désigne un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré en y, se transforme en un autre de même forme $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X étant aussi un polynôme entier du troisième ou du quatrième degré en x. La formule $\lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t)+\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}$, dans laquelle on regarde z comme une variable et t comme une constante, opère la transformation la plus simple. Si l'on pose, en effet, $x=\lambda(z)$, $y=\lambda(z+t)$, et que l'on représente par a la constante $\lambda(t)$, cette formule devient

$$(10) \qquad y = \frac{x\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} + a\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2a^2x^2};$$

mais on a

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad d(z+t) = dz = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

d'où

$$(11) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Ainsi, quand on remplace y par sa valeur donnée par l'équation (10), la première expression différentielle se transforme en une autre tout à fait semblable. Cette fonction y de x est l'intégrale de l'équation différentielle (11), à laquelle on joint la condition initiale $y=a$ pour $x=0$.

La découverte d'Euler, à laquelle nous avons fait allusion au n° 270, et qui a été le premier pas dans l'étude des fonctions elliptiques, consiste dans l'intégration, sous forme algébrique, de l'équation différentielle

$$(12) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0.$$

La formule de l'addition donne immédiatement cette intégrale; car, si l'on pose $x=\lambda(z,k)$, $y=\lambda(t,k)$, l'équation précédente se réduit

à $dz + dt = 0$; l'intégrale générale est $z + t = C$, ou bien

$$\lambda(z+t) = \lambda(C) = C',$$

C et C′ étant des constantes arbitraires. En développant $\lambda(z+t)$, d'après la formule (3), on obtient l'intégrale trouvée par Euler

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C'. \tag{13}$$

Autre méthode.

322. On peut obtenir directement les formules de l'addition sans recourir aux propriétés des fonctions θ. La fonction

$$f(z) = \lambda(z+t) + \lambda(z-t),$$

dans laquelle on regarde t comme une constante et z comme la variable, est impaire et admet les périodes 2ω, ω', comme la fonction $\lambda(z)$. Elle est du quatrième ordre; car elle a quatre infinis dans chacun des parallélogrammes du réseau construit sur les périodes, savoir les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} - t$, $z = \omega + \frac{\omega'}{2} - t$ de $\lambda(z+t)$ et les deux infinis $z = \frac{\omega'}{2} + t$, $z = \omega + \frac{\omega'}{2} + t$ de $\lambda(z-t)$. Les quatre zéros sont 0, ω, $\frac{\omega'}{2}$, $\omega + \frac{\omega'}{2}$; les deux premiers sont les zéros, les deux derniers les infinis de $\lambda(z)$. On a d'ailleurs $f(\omega - z) = f(z)$. D'après le théorème du n° 160, cette fonction est égale à une fraction rationnelle du second degré en $\lambda(z)$. La fonction s'annulant quand $\lambda(z)$ devient infinie, le numérateur est du premier degré, le dénominateur du second degré; la fonction étant impaire, le numérateur est impair, le dénominateur pair. Le dénominateur, devant s'annuler pour les quatre valeurs de z, qui rendent $f(z)$ infinie, est de la forme

$$\left[\lambda(z) - \lambda\left(\frac{\omega'}{2} - t\right)\right]\left[\lambda(z) - \lambda\left(\frac{\omega'}{2} + t\right)\right] = \lambda^2(z) - \lambda^2\left(\frac{\omega'}{2} + t\right);$$

on a donc

$$f(z) = \frac{A\lambda(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On déterminera la constante A en prenant la dérivée et faisant $z = 0$, ce qui donne

$$2\lambda'(t) = A\lambda'(0),$$

d'où

$$A = 2\mu(t)\nu(t).$$

On obtient ainsi

$$(14) \qquad \lambda(z+t) + \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(z)\mu(t)\nu(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En permutant les lettres z et t, on en déduit

$$(15) \qquad \lambda(z+t) - \lambda(z-t) = \frac{2\lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En ajoutant ces deux expressions membre à membre, on arrive à la formule

$$(16) \qquad \lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\mu(t)\nu(t) + \lambda(t)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

323. La fonction paire

$$F(z) = \mu(z+t) + \mu(z-t),$$

qui admet les périodes 2ω, $\omega + \omega'$, comme la fonction $\mu(z)$, et a les quatre infinis $z = \pm\frac{\omega'}{2} \mp t$ des deux fonctions $\mu(z+t)$, $\mu(z-t)$, est aussi du quatrième ordre; les zéros sont $\pm\frac{\omega}{2}$ et $\pm\frac{\omega'}{2}$; les deux premiers sont les zéros, les deux derniers les infinis de $\mu(z)$. D'après le même théorème, cette fonction paire est égale à une fraction rationnelle du second degré en $\mu(z)$. La fonction s'annulant quand $\mu(z)$ devient infini, le numérateur est du premier degré, le dénominateur du second degré; la fonction s'annulant avec $\mu(z)$, le numéra-

teur ne contient pas de terme constant; on a donc

$$F(z)=\frac{A\mu(z)}{\left[\mu(z)-\mu\left(\frac{\omega'}{2}-t\right)\right]\left[\left(\mu(z)-\mu\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)\right)\right]}=\frac{A'\mu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

En faisant $z=0$, on détermine la constante $A'=2\mu(t)$. On obtient ainsi

$$(17)\qquad \mu(z+t)+\mu(z-t)=\frac{2\mu(z)\mu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Considérons maintenant la fonction impaire

$$\mu(z+t)-\mu(z-t),$$

qui admet les quatre zéros 0, ω, $\pm\frac{\omega+\omega'}{2}$, dont les deux premiers sont ceux de $\lambda(z)$, et les deux derniers ceux de $\nu(z)$. La fonction paire

$$\varphi(z)=\frac{\mu(z+t)-\mu(z-t)}{\lambda(z)\nu(z)},$$

qui admet les périodes ω, ω' et les deux infinis $z=\pm\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)$, est du second ordre par rapport à ces périodes; elle a un zéro double $z=\frac{\omega'}{2}$. Elle est donc égale à une fraction rationnelle du premier degré en $\lambda^2(z)$, et l'on a

$$\varphi(z)=\frac{A}{\lambda^2(z)-\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}+t\right)}=\frac{A'}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

d'où

$$\mu(z+t)-\mu(z-t)=\frac{A'\lambda(z)\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

En prenant la dérivée et faisant $z=0$, on trouve

$$2\mu'(t)=A'\lambda'(0),$$

d'où

$$A'=-2\lambda(t)\nu(t),$$

et par suite

$$(18)\qquad \mu(z+t)-\mu(z-t)=-\frac{2\lambda(z)\nu(z)\lambda(t)\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Des deux expressions précédentes, on déduit la formule

$$(19)\qquad \mu(z+t)=\frac{\mu(z)\mu(t)-\lambda(z)\lambda(t)\nu(z)\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On arrive, de la même manière, à la formule

$$(20)\qquad \nu(z+t)=\frac{\nu(z)\nu(t)-k^2\lambda(z)\lambda(t)\mu(z)\mu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

Ce mode de démonstration des trois formules relatives à l'addition est dû à M. Liouville.

Addition des arguments dans les intégrales elliptiques de seconde espèce.

324. Nous avons trouvé (n° 273) l'expression de l'intégrale de seconde espèce par la fonction θ, savoir

$$\zeta(z)=\int_0^z \lambda^2(z)\,dz=\frac{1}{k^2}\left[z\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-D_z\log\theta(z)\right].$$

En remplaçant, dans cette formule, z successivement par $z+t$ et par $z-t$, on a

$$\zeta(z+t)=\frac{1}{k^2}\left[(z+t)\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-D_z\log\theta(z+t)\right],$$
$$\zeta(z-t)=\frac{1}{k^2}\left[(z-t)\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}-D_z\log\theta(z-t)\right],$$

d'où l'on déduit

$$(21)\qquad \zeta(z+t)+\zeta(z-t)-2\zeta(z)=-\frac{1}{k^2}D_z\log\frac{\theta(z+t)\,\theta(z-t)}{\theta^2(z)}.$$

Pour transformer cette expression, nous nous servirons de la re-

lation

$$(22)\qquad \theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0)=\theta^2(t)\theta^2(z)-\theta_1^2(t)\theta_1^2(z),$$

qui est l'une de celles du nº 309, et qu'il est facile de trouver directement, en remarquant que la fonction

$$\frac{A\theta^2(z)+B\theta_1^2(z)}{\theta(z+t)\theta(z-t)}$$

admet les deux périodes ω et ω', et disposant des coefficients A et B de manière que le numérateur s'annule pour les valeurs $z=\frac{\omega'}{2}\pm t$ qui annulent le dénominateur; il suffit pour cela que ces coefficients satisfassent à la relation $A\theta_1^2(t)+B\theta^2(t)=0$; la fonction est alors une constante; on détermine ensuite le coefficient A de manière qu'elle se réduise à l'unité pour $z=0$, d'où $A\theta^2(0)=\theta^2(t)$ et, par suite, $B\theta^2(0)=-\theta_1^2(t)$. On a ainsi

$$\frac{\theta^2(t)\theta^2(z)-\theta_1^2(t)\theta_1^2(z)}{\theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0)}=1,$$

ce qui est la relation cherchée.

De cette relation, on déduit

$$(23)\qquad \frac{\theta(z+t)\theta(z-t)\theta^2(0)}{\theta^2(z)\theta^2(t)}=1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t);$$

en remplaçant dans l'équation (21), on a

$$\zeta(z+t)+\zeta(z-t)-2\zeta(z)=\frac{2\lambda^2(t)\lambda(z)\mu(z)\nu(z)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et, si l'on permute les lettres z et t,

$$\zeta(z+t)-\zeta(z-t)-2\zeta(t)=\frac{2\lambda^2(z)\lambda(t)\mu(t)\nu(t)}{1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)}.$$

On en conclut

$$(24)\qquad \zeta(z+t)=\zeta(z)+\zeta(t)+\lambda(z)\lambda(t)\lambda(z+t).$$

Quand le module k est réel, positif et plus petit que un, cette formule permet de calculer la valeur de la fonction $\zeta(z)$ pour une valeur imaginaire $x+yi$ attribuée à z.

Addition des arguments et des paramètres dans les intégrales de troisième espèce.

325. Addition des arguments. — De la formule

$$(25)\qquad \Pi(z,a)=z\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\theta(a-z)}{\theta(a+z)},$$

trouvée au n° 275, on déduit

$$(26)\quad \Pi(z+t,a)-\Pi(z,a)-\Pi(t,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(t+a)\theta(z+t-a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)\theta(z+t+a)}.$$

On peut transformer le second membre de plusieurs manières. Si, dans la deuxième équation de la troisième classe (n° 304), on fait $x=y=0$, il vient

$$\theta(a+z)\theta(b+z)\theta(a+b)\theta(0)=\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b+z)+\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b+z),$$

et, en remplaçant z par $-z$,

$$\theta(a-z)\theta(b-z)\theta(a+b)\theta(0)=\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b-z)-\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b-z);$$

d'où

$$\frac{\theta(a+z)\theta(b+z)}{\theta(a-z)\theta(b-z)}=\frac{\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b+z)+\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b+z)}{\theta(a)\theta(b)\theta(z)\theta(a+b-z)-\theta_1(a)\theta_1(b)\theta_1(z)\theta_1(a+b-z)}.$$

On en déduit

$$\frac{\theta(a+z)\theta(b+z)\theta(a+b-z)}{\theta(a-z)\theta(b-z)\theta(a+b+z)}=\frac{1+k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b+z)}{1-k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b-z)}$$

et, en remplaçant a, b, z par z, t, a,

$$(27)\quad \frac{\theta(z+a)\theta(t+a)\theta(z+t-a)}{\theta(z-a)\theta(t-a)\theta(z+t+a)}=\frac{1+k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t+a)}{1-k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t-a)}.$$

On a ainsi la formule trouvée par Legendre

$$(28)\quad \Pi(z+t,a)-\Pi(z,a)-\Pi(t,a)=\frac{1}{2}\log\frac{1+k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t+a)}{1-k^2\lambda(z)\lambda(t)\lambda(a)\lambda(z+t-a)}.$$

326. L'équation (23), dans laquelle on remplace z et t successivement par $z+a$, $t+b$, et par $z-a$, $t-b$, devient

$$\frac{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(0)}{\theta^2(z+a)\theta^2(t+b)}=1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b),$$
$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(0)}{\theta^2(z-a)\theta^2(t-b)}=1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b);$$

on en déduit, en divisant membre à membre,

$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(z+a)\theta^2(t+b)}{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(z-a)\theta^2(t-b)}=\frac{1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)}{1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)}$$

et, en permutant les lettres a et b,

$$\frac{\theta(z+t-a-b)\theta(z-t+a-b)\theta^2(z+b)\theta^2(t+a)}{\theta(z+t+a+b)\theta(z-t-a+b)\theta^2(z-b)\theta^2(t-a)}=\frac{1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)}{1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)}.$$

En multipliant les deux dernières équations membre à membre, on a

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\theta^2(z+a)\theta^2(z+b)\theta^2(t+a)\theta^2(t+b)\theta^2(z+t-a-b)}{\theta^2(z-a)\theta^2(z-b)\theta^2(t-a)\theta^2(t-b)\theta^2(z+t+a+b)}\\&\quad=\frac{[1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)][1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)][1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)]}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $b=0$, cette équation se simplifie et devient

$$(30)\quad \frac{\theta^2(z+a)\theta^2(t+a)\theta^2(z+t-a)}{\theta^2(z-a)\theta^2(t-a)\theta^2(z+t+a)}=\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+a)]}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(31)\quad \Pi(z+t,a)-\Pi(z,a)-\Pi(t,a)=\frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(t)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t+a)]}.$$

327. Addition des paramètres. — En effectuant la permutation du paramètre et de l'argument, d'après l'équation (27) du n° 277, on a

$$\Pi(z,a+b)-\Pi(a+b,z)=k^2[(a+b)\zeta(z)-z\zeta(a+b)].$$

En remplaçant $\Pi(a+b, z)$ et $\zeta(a+b)$ par leurs valeurs tirées des équations (26) et (24), on arrive à l'équation

$$(32)\quad \begin{cases} \Pi(z, a+b) - \Pi(z, a) - \Pi(z, b) \\ \quad = -k^2 z \lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(z+b)\theta(z-a-b)}{\theta(z-a)\theta(z-b)\theta(z+a+b)}, \end{cases}$$

qui, à l'aide des relations (27) ou (30), se met sous les deux formes

$$(33)\quad \begin{cases} \Pi(z, a+b) - \Pi(z, a) - \Pi(z, b) \\ \quad = -k^2 z \lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{2}\log\frac{1 + k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b+z)}{1 - k^2\lambda(a)\lambda(b)\lambda(z)\lambda(a+b-z)} \\ \quad = -k^2 z \lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) + \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(b)\lambda^2(z-a)][1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z-b)]}{[1-k^2\lambda^2(b)\lambda^2(z+a)][1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z+b)]}. \end{cases}$$

328. Formules générales. — Proposons-nous enfin de calculer la fonction $\Pi(z+t, a+b)$. Si, dans l'équation (32), on remplace z par $z+t$, qu'on substitue ensuite à $\Pi(z+t, a)$ et à $\Pi(z+t, b)$ leurs valeurs tirées de l'équation (26), il vient

$$(34)\quad \begin{cases} \Pi(z+t, a+b) - \Pi(z, a) - \Pi(z, b) - \Pi(t, a) - \Pi(t, b) \\ \quad = -k^2(z+t)\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) \\ \qquad + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(z+a)\theta(z+b)\theta(t+a)\theta(t+b)\theta(z+t-a-b)}{\theta(z-a)\theta(z-b)\theta(t-a)\theta(t-b)\theta(z+t+a+b)}, \end{cases}$$

et, en vertu de la relation (29),

$$(35)\quad \begin{cases} \Pi(z+t, a+b) - \Pi(z, a) - \Pi(z, b) - \Pi(t, a) - \Pi(t, b) \\ \quad = -k^2(z+t)\lambda(a)\lambda(b)\lambda(a+b) \\ \qquad + \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\lambda^2(z-a)\lambda^2(t-b)][1-k^2\lambda^2(z-b)\lambda^2(t-a)]}{[1-k^2\lambda^2(z+a)\lambda^2(t+b)][1-k^2\lambda^2(z+b)\lambda^2(t+a)]}. \end{cases}$$

A l'aide de cette formule, le calcul de la fonction $\Pi(z, a)$, quand on attribue à l'argument et au paramètre des valeurs imaginaires quelconques, est ramené aux cas où ces deux quantités sont réelles, ou imaginaires et de la forme αi.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION DE L'ARGUMENT.

329. Nous avons vu (nº 75) que les quatre fonctions θ satisfont aux relations

$$(1)\qquad \frac{\theta(z+\omega)}{\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+\omega)}{-\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+\omega)}{-\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+\omega)}{\theta_3(z)} = 1,$$

$$(2)\qquad \frac{\theta(z+\omega')}{-\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+\omega')}{-\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+\omega')}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+\omega')}{\theta_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')},$$

$$(3)\qquad \frac{\theta(z+n\omega')}{(-1)^n\theta(z)} = \frac{\theta_1(z+n\omega')}{(-1)^n\theta_1(z)} = \frac{\theta_2(z+n\omega')}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_3(z+n\omega')}{\theta_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2nz+n^2\omega')},$$

$$(4)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{-\theta_1(z)} = 1,$$

$$(5)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta_1(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{i\theta(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)},$$

$$(6)\qquad \frac{\theta\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_2(z)} = \frac{\theta_2\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{-i\theta(z)} = \frac{\theta_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_3(z)} = \frac{\theta_3\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{i\theta_1(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4}\right)}.$$

Nous nous servirons aussi, dans ce Chapitre, de quatre des relations du nº 309, savoir

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta(z+a)\,\theta(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_1^2(a)\,\theta_1^2(z),\\
\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)\,\theta^2(0) &= -\theta_1^2(a)\,\theta^2(z) + \theta^2(a)\,\theta_1^2(z),\\
\theta_2(z+a)\,\theta_2(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta_2^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_3^2(a)\,\theta_1^2(z),\\
\theta_3(z+a)\,\theta_3(z-a)\,\theta^2(0) &= \theta_3^2(a)\,\theta^2(z) - \theta_2^2(a)\,\theta_1^2(z).
\end{aligned}\right.$$

Multiplication par un nombre impair.

330. La fonction $\theta_1(nz)$ admet les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + m'\frac{\omega'}{n}$, m et m' étant des nombres entiers quelconques; elle satisfait aux relations

$$\theta_1(nz + n\omega) = -\theta_1(nz),$$
$$\theta_1(nz + n\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}\theta_1(nz).$$

La fonction

$$f_1(z) = \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

formée par le produit des n^2 fonctions $\theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant n valeurs entières consécutives à chacun des nombres p et q, admet les mêmes zéros et satisfait aux relations

$$f_1(z + \omega) = -f_1(z),$$
$$f_1(z + \omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left[2n^2 z + n^2\omega' + 2\Sigma\left(p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)\right]}f_1(z).$$

Si l'on attribue à chacun des nombres p et q les n valeurs consécutives

$$-\frac{n-1}{2}, \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \ldots, \quad \frac{n-1}{2},$$

les n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$ étant égales deux à deux et de signes contraires, leur somme est nulle, et la relation précédente se réduit à

$$f_1(z + \omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}f_1(z).$$

De cette manière, le rapport $\frac{\theta_1(nz)}{f_1(z)}$, admettant les deux périodes ω, ω' et restant holomorphe pour toutes les valeurs de z, est une constante A_1 (n° 146), et l'on a

$$\theta_1(nz) = A_1 \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Nous mettrons à part le facteur $\theta_1(z)$, qui correspond à $p=0, q=0$; puis nous combinerons, avec la valeur $p=0$, les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de q, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de p les n valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}$ de q; si l'on appelle a l'une quelconque des $\frac{n^2-1}{2}$ valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$ ainsi obtenues, les autres valeurs étant respectivement égales aux précédentes et de signes contraires, on aura

$$\theta_1(nz) = n\theta_1(z)\prod \frac{\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)}{\theta_1^2(a)}.$$

En remplaçant le produit $\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)$ par la valeur donnée par la seconde des relations (7), il vient

$$(8) \qquad \theta_1(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = n\theta_1(z)\prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a)}{\theta_1^2(a)}\theta_1^2(z)\right].$$

331. Les zéros de la fonction $\theta(nz)$ sont compris dans la formule $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$, que l'on peut mettre sous la forme $z = \frac{\omega'}{2} + m\frac{\omega}{n} + m'_1\frac{\omega'}{n}$, puisque n est impair, m et m'_1 étant des nombres entiers quelconques; ils sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f(z) = \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

formée par le produit des n^2 fonctions $\theta\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant à p et à q les mêmes valeurs que précédemment; d'ailleurs ces deux fonctions satisfont aux relations

$$\frac{\theta(nz+n\omega)}{\theta(nz)} = \frac{f(z+\omega)}{f(z)} = 1,$$

$$\frac{\theta(nz+n\omega')}{\theta(nz)} = \frac{f(z+\omega')}{f(z)} = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2z+n^2\omega')};$$

elles sont donc dans un rapport constant, et l'on a

$$\theta(nz) = \mathrm{A}\prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right).$$

En combinant les facteurs comme précédemment, il vient

$$\theta(nz) = \theta(z)\prod \frac{\theta(z+a)\,\theta(z-a)}{\theta^2(a)}$$

et, en vertu de la première des relations (7),

$$(9)\qquad \theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta(z)\prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_1^2(a)}{\theta^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

On trouve, de la même manière,

$$(10)\qquad \theta_2(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta_2(z)\prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2(a)}{\theta_2^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right],$$

$$(11)\qquad \theta_3(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \theta_3(z)\prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_2^2(a)}{\theta_3^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

332. Les formules précédentes, appliquées aux fonctions Al de M. Weierstrass, donnent

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{Al}(nz) &= \mathrm{Al}(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z) - k^2\lambda^2(a)\,\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_1(nz) &= n\,\mathrm{Al}_1(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z) - \frac{1}{\lambda^2(a)}\,\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_2(nz) &= \mathrm{Al}_2(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z) - \frac{\nu^2(a)}{\mu^2(a)}\,\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\
\mathrm{Al}_3(nz) &= \mathrm{Al}_3(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z) - k^2\frac{\mu^2(a)}{\nu^2(a)}\,\mathrm{Al}_1^2(z)\right].
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres sont homogènes et du degré n^2 par rapport aux quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$. On en déduit

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Al}(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \prod\left[1 - k^2\lambda^2(a)\,\lambda^2(z)\right] = \mathrm{P},\\
\frac{\mathrm{Al}_1(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= n\lambda(z)\prod\left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a)}\right] = \lambda(z)\,\mathrm{P}_1,\\
\frac{\mathrm{Al}_2(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \mu(z)\prod\left[1 - \frac{\nu^2(a)}{\mu^2(a)}\,\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\,\mathrm{P}_2,\\
\frac{\mathrm{Al}_3(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)} &= \nu(z)\prod\left[1 - k^2\frac{\mu^2(a)}{\nu^2(a)}\,\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\,\mathrm{P}_3,
\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(14) \qquad \lambda(nz) = \frac{\lambda(z)\,P_1}{P}, \quad \mu(nz) = \frac{\mu(z)\,P_2}{P}, \quad \nu(nz) = \frac{\nu(z)\,P_3}{P}.$$

Les lettres P désignent des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, et du degré $n^2 - 1$.

Multiplication par un nombre pair.

333. Considérons d'abord la fonction $\theta_3(nz)$, dont les zéros $z = (2m+1)\frac{\omega}{2n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_3(z) = \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right],$$

où p et q reçoivent n valeurs entières consécutives. Si l'on attribue à $2p+1$ et à $2q+1$ les n valeurs impaires consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, les n^2 quantités $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ étant égales deux à deux et de signes contraires, leur somme est nulle, et l'on a

$$\frac{\theta_3(nz + n\omega')}{\theta_3(nz)} = \frac{f_3(z+\omega')}{f_3(z)} = e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2n^2 z + n^2\omega')}.$$

La fonction holomorphe $\frac{\theta_3(nz)}{f_3(z)}$, admettant les deux périodes ω, ω', est une constante, et l'on a

$$\theta_3(nz) = A_3 \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega}{2n}\right].$$

Si l'on combine avec les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2p+1$ les n valeurs de $2q+1$ et si l'on désigne par a_3 l'une quelconque des $\frac{n^2}{2}$ quantités $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ ainsi obtenues, il vient

$$\frac{\theta_3(nz)}{\theta_3(0)} = \prod \frac{\theta_1(z+a_3)\,\theta_1(z-a_3)}{\theta_1^2(a_3)},$$

et, en vertu de la seconde des relations (7),

$$(15)\qquad \frac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta_3(0)} = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a_3)}{\theta_1^2(a_3)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

334. Les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ de la fonction $\theta(nz)$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f(z) = \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right),$$

où n valeurs entières consécutives de l'une des lettres p et q correspondent à chacune des n valeurs entières consécutives de l'autre. Nous attribuerons à $2q+1$ les n valeurs impaires consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, et à p d'abord les $n-1$ valeurs consécutives $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{n}{2}-1\right)$, puis la valeur $\frac{n}{2}$ avec les valeurs positives de $2q+1$, et la valeur $-\frac{n}{2}$ avec les valeurs négatives de $2q+1$; de cette manière, les n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$ seront encore égales deux à deux et de signes contraires, et l'on aura

$$\theta(nz) = \mathrm{A}\prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}\right).$$

Si l'on combine avec les valeurs $p=0$ et $p=\frac{n}{2}$ les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2q+1$, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$ de p les n valeurs de $2q+1$, et si l'on désigne par a les $\frac{n^2}{2}$ valeurs correspondantes de $p\frac{\omega}{n} + (2q+1)\frac{\omega'}{2n}$, il vient

$$\frac{\theta(nz)}{\theta(0)} = \prod \frac{\theta_1(z+a)\,\theta_1(z-a)}{\theta_1^2(a)},$$

et par suite

$$(16)\qquad \theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0) = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a)}{\theta_1^2(a)}\,\theta_1^2(z)\right].$$

335. Les zéros de la fonction $\theta_2(nz)$ sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_2(z) = \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}\right],$$

où nous attribuons à $2p+1$ les n valeurs consécutives $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(n-1)$, et à q d'abord les $n-1$ valeurs consécutives $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{n}{2}-1\right)$, puis la valeur $\frac{n}{2}$ avec les valeurs positives de $2p+1$ et la valeur $-\frac{n}{2}$ avec les valeurs négatives de $2p+1$; on a, comme précédemment,

$$\theta_2(nz) = A_2 \prod \theta_1\left[z + (2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}\right].$$

Si l'on combine avec les valeurs $q = 0$ et $q = \frac{n}{2}$ les $\frac{n}{2}$ valeurs positives de $2p+1$, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1$ de q les n valeurs de $2p+1$, et si l'on désigne par a_2 les valeurs correspondantes de $(2p+1)\frac{\omega}{2n} + q\frac{\omega'}{n}$, il vient

$$\frac{\theta_2(nz)}{\theta_2(0)} = \prod \frac{\theta_1(z+a_2)\,\theta_1(z-a_2)}{\theta_1^2(a_2)},$$

et par suite

$$\frac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta_2(0)} = \prod\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2(a_2)}{\theta_1^2(a_2)}\theta_1^2(z)\right]. \tag{17}$$

336. Considérons enfin la fonction $\theta_1(nz)$ dont les zéros sont les mêmes que ceux de la fonction

$$f_1(z) = \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

dans laquelle p et q reçoivent les n^2 couples de valeurs entières com-

pris dans le tableau suivant :

$$p=0,\quad q=0;\quad p=\frac{n}{2},\ q=0;\quad p=0,\ q=\frac{n}{2};\quad p=-\frac{n}{2},\ q=-\frac{n}{2};$$

$$p=0,\quad q=\pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$q=0,\quad p=\pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$p=\frac{n}{2},\quad q=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$p=-\frac{n}{2},\quad q=-1,\quad -2,\ldots,\quad -\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$q=\frac{n}{2},\quad p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$q=-\frac{n}{2},\quad p=-1,\quad -2,\ldots,\quad -\left(\frac{n}{2}-1\right);$$

$$p=\pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm\left(\frac{n}{2}-1\right),\quad q=\pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm\left(\frac{n}{2}-1\right).$$

De cette manière, la somme des n^2 valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$ est nulle, et l'on a

$$\theta_1(nz)=A_1\prod\theta_1\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Les quatre premières combinaisons donnent les quatre facteurs $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, $\theta(z)$, $\theta_3(z)$. Les autres valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$ sont égales deux à deux et de signes contraires; en ne prenant que la moitié des combinaisons, savoir :

$$p=0,\quad \frac{n}{2},\quad q=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$q=0,\quad \frac{n}{2},\quad p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1;$$

$$p=1,\quad 2,\ldots,\quad \frac{n}{2}-1,\quad q=\pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm\left(\frac{n}{2}-1\right),$$

et désignant par a_1 les valeurs correspondantes de $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$, on aura

$$\theta_1(nz)=\frac{n\theta_1(z)\theta(z)\theta_2(z)\theta_3(z)}{\theta(0)\theta_2(0)\theta_3(0)}\prod\frac{\theta_1(z+a_1)\theta_1(z-a_1)}{\theta_1^2(a_1)},$$

et par suite

$$(18)\quad \theta_1(nz)\theta^{n^2-3}(0)\theta_2(0)\theta_3(0)=n\theta(z)\theta_1(z)\theta_2(z)\theta_3(z)\prod\left[\theta^2(z)-\frac{\theta^2(a_1)}{\theta_1^2(a_1)}\theta_1^2(z)\right].$$

337. Ces formules, appliquées aux fonctions Al, donnent

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Al}(nz)=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\ &\mathrm{Al}_1(nz)=n\,\mathrm{Al}(z)\,\mathrm{Al}_1(z)\,\mathrm{Al}_2(z)\,\mathrm{Al}_3(z)\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_1)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\ &\mathrm{Al}_2(nz)=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_2)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right],\\ &\mathrm{Al}_3(nz)=\prod\left[\mathrm{Al}^2(z)-\frac{1}{\lambda^2(a_3)}\mathrm{Al}_1^2(z)\right].\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres sont homogènes et du degré n^2 par rapport aux quatre fonctions $\mathrm{Al}(z)$. On en déduit

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{Al}(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a)}\right]=\mathrm{P},\\ &\frac{\mathrm{Al}_1(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}=n\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_1)}\right]=\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\mathrm{P}_1,\\ &\frac{\mathrm{Al}_2(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_2)}\right]=\mathrm{P}_2,\\ &\frac{\mathrm{Al}_3(nz)}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}=\prod\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2(a_3)}\right]=\mathrm{P}_3,\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(21)\qquad \lambda(nz)=\frac{\lambda(z)\mu(z)\nu(z)\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}},\quad \mu(nz)=\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}},\quad \nu(nz)=\frac{\mathrm{P}_3}{\mathrm{P}}.$$

Les lettres P désignent des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$; le polynôme P_1 est du degré n^2-4, les trois autres du degré n^2.

Méthode de calcul d'Abel.

338. Les quatre polynômes P renferment des systèmes de constantes telles que $\lambda(a)$, dont nous ne connaissons pas la valeur; mais on peut obtenir ces polynômes par un calcul de proche en proche, imaginé par Abel. De la première des relations du n° 310, et des quatrième, huitième et douzième relations du n° 309 on déduit, en remplaçant x et a par nz,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Al}_1(2nz) &= 2\,\mathrm{Al}_1(nz)\,\mathrm{Al}(nz)\,\mathrm{Al}_2(nz)\,\mathrm{Al}_3(nz),\\ \mathrm{Al}\,(2nz) &= \mathrm{Al}^4(nz) - k^2\mathrm{Al}_1^4(nz),\\ \mathrm{Al}_2(2nz) &= \mathrm{Al}_2^4(nz) - k'^2\mathrm{Al}_1^4(nz),\\ \mathrm{Al}_3(2nz) &= \mathrm{Al}_3^4(nz) + k^2k'^2\mathrm{Al}_1^4(nz). \end{aligned}\right.$$

Des première, quatrième, huitième et douzième relations du n° 309, on déduit de même, en remplaçant x et a par $(n+1)z$ et nz,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Al}_1[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_1(z) &= \mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}^2(nz) - \mathrm{Al}^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz),\\ \mathrm{Al}\,[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}\,(z) &= \mathrm{Al}^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}^2(nz) - k^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz),\\ \mathrm{Al}_2[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_2(z) &= \mathrm{Al}_2^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_2^2(nz) - k'^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz),\\ \mathrm{Al}_3[(2n+1)z]\,\mathrm{Al}_3(z) &= \mathrm{Al}_3^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_3^2(nz) + k^2k'^2\mathrm{Al}_1^2[(n+1)z]\,\mathrm{Al}_1^2(nz). \end{aligned}\right.$$

Faisons d'abord $n=1$, les équations (22) donnent les quatre fonctions $\mathrm{Al}(2z)$; en les substituant dans les équations (23) et remarquant que les seconds membres sont divisibles respectivement par $\mathrm{Al}_1^2(z)$, $\mathrm{Al}^2(z), \ldots$, on obtient, pour les quatre fonctions $\mathrm{Al}(3z)$, des expressions entières contenant en facteur la fonction $\mathrm{Al}(z)$ correspondante. En faisant $n=2$, on obtiendra ensuite $\mathrm{Al}(4z)$ et $\mathrm{Al}(5z)$, et ainsi de suite. D'après ce mode de calcul, il est évident que les coefficients des polynômes, tels qu'ils se présentent, sont des fonctions entières de k^2, ayant elles-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Si l'on remplace $\mathrm{Al}_2^2(z)$ par $\mathrm{Al}^2(z) - \mathrm{Al}_1^2(z)$ et $\mathrm{Al}_3^2(z)$ par $\mathrm{Al}^2(z) - k^2\mathrm{Al}_1^2(z)$, les coefficients conservent les mêmes propriétés. On pourrait aussi déduire de cette méthode de calcul les degrés des polynômes.

Une fois qu'on a trouvé de cette façon les expressions homogènes des quatre fonctions $\mathrm{Al}(nz)$, en les divisant par $\mathrm{Al}^{n^2}(z)$, on en déduit celles des quatre polynômes P. Ces polynômes entiers P, ordonnés par rapport aux puissances de $\lambda^2(z)$, ont pour coefficients des fonctions entières de k^2, ayant elles-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Si l'on remplace $\lambda^2(z)$ par $1-\mu^2(z)$ et que l'on ordonne les polynômes P par rapport aux puissances de $\mu^2(z)$, les coefficients jouiront des mêmes propriétés; mais, si l'on remplace $\lambda^2(z)$ par $\frac{1-\nu^2(z)}{k^2}$ et que l'on ordonne les polynômes par rapport aux puissances de $\nu^2(z)$, les coefficients cesseront d'être entiers en k^2; chacun d'eux sera égal à une fonction entière de k^2 divisée par une puissance de k^2, au plus égale à l'exposant de $\nu^2(z)$.

Voici quelques propriétés de ces polynômes; représentons-les par

$$(24)\quad \begin{cases} P = \Sigma A^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C^{(m)}\nu^{2m}(z), \\ P_1 = \Sigma A_1^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_1^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_1^{(m)}\nu^{2m}(z), \\ P_2 = \Sigma A_2^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_2^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_2^{(m)}\nu^{2m}(z), \\ P_3 = \Sigma A_3^{(m)}\lambda^{2m}(z) = \Sigma B_3^{(m)}\mu^{2m}(z) = \Sigma C_3^{(m)}\nu^{2m}(z). \end{cases}$$

Concevons que l'on remplace k par $\frac{1}{k}$ et z par kz. D'après les relations du n° 234, la fonction $\lambda(z)$ se change en $k\lambda(z)$, et les fonctions $\mu(z)$ et $\nu(z)$ se permutent. En vertu des relations (9) du n° 288, les expressions (13) ou (20) des polynômes P au moyen des Al montrent que les polynômes P et P_1 ne changent pas, tandis que les polynômes P_2 et P_3 se permutent. D'après cela, les coefficients de ces polynômes doivent satisfaire aux relations

$$(25)\quad \begin{cases} A^{(m)}(k) = k^{2m}A^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C^{(m)}(k) = B^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \\ A_1^{(m)}(k) = k^{2m}A_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_1^{(m)}(k) = B_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \\ A_3^{(m)}(k) = k^{2m}A_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_3^{(m)}(k) = B_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_2^{(m)}(k) = B_3^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

On en conclut que les coefficients $A^{(m)}$, $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, $A_3^{(m)}$, $B^{(m)}$, $B_1^{(m)}$, $B_2^{(m)}$, $B_3^{(m)}$, qui sont des polynômes entiers en k^2, sont au plus du degré m par

rapport à k^2. Le coefficient $A^{(m)}$ est un polynôme réciproque en k; de même $A_1^{(m)}$. Le coefficient $A_3^{(m)}$ se déduit de $A_2^{(m)}$, et, par conséquent, P_3 de P_2.

Méthode de calcul de Jacobi.

339. La méthode d'Abel donne les polynômes P par un calcul de proche en proche. On obtient directement l'un quelconque d'entre eux à l'aide d'une équation aux dérivées partielles due à Jacobi. Nous avons vu (n° 290) que les quatre fonctions

$$u = \mathrm{Al}(z),\quad u_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1(z),\quad u_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2(z),\quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3(z)$$

satisfont à la même équation aux dérivées partielles

$$(26)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k^2 z\frac{\partial u}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial u}{\partial k} + k^2 z^2 u = 0,$$

dans laquelle on suppose le multiplicateur g égal à l'unité. En remplaçant z par nz, on en conclut que les quatre fonctions

$$\mathrm{U} = \mathrm{Al}(nz),\quad \mathrm{U}_1 = \sqrt{k}\,\mathrm{Al}_1(nz),\quad \mathrm{U}_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}_2(nz),\quad \mathrm{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{Al}_3(nz)$$

satisfont à l'équation

$$(27)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2} + 2n^2k^2 z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + 2n^2kk'^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial k} + n^4k^2z^2\mathrm{U} = 0.$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

on peut mettre les deux équations sous la forme

$$(28)\quad \frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 + 2k^2 z\frac{\partial \log u}{\partial z} + 2kk'^2\frac{\partial \log u}{\partial k} + k^2z^2 = 0,$$

$$(29)\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{U}}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial z}\right)^2 + 2n^2k^2 z\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial z} + 2n^2kk'^2\frac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial k} + n^4k^2z^2 = 0.$$

Considérons les quatre fonctions

$$V = \frac{U}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_1 = \frac{U_1}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_2 = \frac{U_2}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)}, \quad V_3 = \frac{U_3}{\mathrm{Al}^{n^2}(z)},$$

que l'on obtient en divisant les quatre fonctions U par la même quantité $\mathrm{Al}^{n^2}(z)$. Si l'on remplace l'une quelconque des fonctions U par sa valeur Vu^{n^2} dans l'équation (29), et si l'on tient compte de l'équation (28), on a

$$\frac{\partial^2 \log V}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log V}{\partial z}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial \log V}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial \log V}{\partial k} - n^2(n^2-1)\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2} = 0,$$

et en mettant à la place de $\frac{\partial^2 \log u}{\partial z^2}$ sa valeur $-k^2\lambda^2(z)$ (n° **287**),

$$(30) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial V}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{dk} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2(z)V = 0.$$

340. Posons maintenant $x = \frac{u_1}{u} = \sqrt{k}\,\lambda(z, k)$, et regardons V comme une fonction des deux variables indépendantes x et k; comme on a

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial k} = \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial k},$$

l'équation (30) devient

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2n^2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z^2\right)\frac{\partial x}{\partial z} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial x}{\partial k}\right]\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux fonctions u et u_1 satisfaisant à l'équation (28), on en déduit, par soustraction,

$$\frac{\partial^2 \log \frac{u_1}{u}}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log u_1}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \log u}{\partial z}\right)^2 + 2k^2 z \frac{\partial \log \frac{u_1}{u}}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \log \frac{u_1}{u}}{\partial k} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log x}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \log x}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial \log x}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial \log x}{\partial k} = 0,$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial \log u}{\partial z} + k^2 z\right)\frac{\partial x}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial x}{\partial k} = 0.$$

Grâce à cette relation, le coefficient du second terme, dans l'équation (31), se simplifie, et l'équation devient

$$(32)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial x} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0.$$

En remplaçant $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2$ et $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ par leurs valeurs

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = k\lambda'^2(z) = k\left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)x^2 + x^4\right],$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = k\left[-\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 2x^3\right],$$

on arrive enfin à l'équation différentielle

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[1 - \left(k + \frac{1}{k}\right)x^2 + x^4\right]\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (n^2-1)\left[\left(k + \frac{1}{k}\right)x - 2x^3\right]\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 2n^2 k'^2 \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)x^2 V = 0. \end{aligned}\right.$$

On la simplifie un peu en remplaçant la variable k par la nouvelle variable $\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$; l'équation devient

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2(n^2-1)(\alpha x - x^3)\frac{\partial V}{\partial x} \\ &\qquad + 4n^2(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha} + n^2(n^2-1)x^2 V = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quatre fonctions V satisfont à cette même équation différentielle.

341. Supposons qu'au lieu de la variable $x = \frac{u_1}{u}$ on prenne la va-

riable $y = \frac{u_2}{u} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mu(z, k)$, la transformation de l'équation (30) s'opérera de la même manière : il suffit, dans les calculs, de remplacer u_1 par u_2 et x par y; on arrivera donc à l'équation

$$(35) \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial y} + 2n^2 kk'^2 \frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0,$$

analogue à l'équation (32). Mais on a (n° 159)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{k}{k'}\mu'^2(z) = kk'\left(1 - \frac{1-2k^2}{kk'}y^2 - y^4\right),$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -kk'\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y + 2y^3\right),$$

et l'équation (35) devient

$$(36) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{1-2k^2}{kk'}y^2 - y^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (n^2-1)\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y + 2y^3\right)\frac{\partial V}{\partial y} \\ \qquad + 2n^2 k'\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)\left(\frac{k}{k'} - y^2\right)V = 0. \end{cases}$$

On peut encore effectuer la même transformation en se servant de la variable $t = \frac{u_3}{u} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\nu(z, k)$; on obtient l'équation

$$(37) \quad \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (n^2-1)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial t} + 2n^2 kk'^2\frac{\partial V}{\partial k} + n^2(n^2-1)k^2\lambda^2 V = 0,$$

que l'on déduit de l'équation (32) en remplaçant x par t. Comme on a

$$\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{k'}\nu'^2(z) = -k' + (2-k^2)t^2 - k't^4,$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = (2-k^2)t - 2k't^3,$$

l'équation devient

$$(38) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{2-k^2}{k'}t^2 + t^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (n^2-1)\left(\frac{2-k^2}{k'}t - 2t^3\right)\frac{\partial V}{\partial t} \\ \qquad - 2n^2 kk'\frac{\partial V}{\partial k} - n^2(n^2-1)\left(\frac{1}{k'} - t^2\right)V = 0. \end{cases}$$

342. Voici comment on peut, à l'aide de ces équations différentielles, calculer les polynômes P. Nous avons substitué aux variables λ, μ, ν les nouvelles variables

$$(39)\quad x = \sqrt{k}\,\lambda(z) = \frac{\theta_1(z)}{\theta(z)},\quad y = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mu(z) = \frac{\theta_2(z)}{\theta(z)},\quad t = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\nu(z) = \frac{\theta_3(z)}{\theta(z)},$$

et nous avons considéré les quatre fonctions

$$(40)\quad \begin{cases} V = \dfrac{\theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & V_1 = \dfrac{\theta_1(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, \\ V_2 = \dfrac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & V_3 = \dfrac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}. \end{cases}$$

Si, pour les quatre polynômes P, on pose

$$(41)\qquad A^{(m)} = k^m a^{(m)},\quad B^{(m)} = \left(\frac{k}{k'}\right)^m b^{(m)},\quad C^{(m)} = \frac{1}{k'^m}\,c^{(m)},$$

les formules (24) deviennent

$$(42)\qquad \begin{cases} P = \Sigma a^{(m)} x^{2m} = \Sigma b^{(m)} y^{2m} = \Sigma c^{(m)} t^{2m}, \\ P_1 = \Sigma a_1^{(m)} x^{2m} = \Sigma b_1^{(m)} y^{2m} = \Sigma c_1^{(m)} t^{2m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et les coefficients $a^{(m)}$ satisfont aux relations

$$(43)\quad a^{(m)}(k) = a^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\quad a_1^{(m)}(k) = a_1^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right),\quad a_3^{(m)}(k) = a_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Les coefficients $A^{(m)}$ et $A_1^{(m)}$ étant des polynômes entiers et réciproques en k du degré $2m$ au plus, les nouveaux coefficients $a^{(m)}$ et $a_1^{(m)}$ sont des polynômes entiers en α et du degré m au plus.

D'après les premières des équations (13) et (20), le polynôme P est, dans tous les cas, égal à la fonction V; c'est un polynôme entier pair en x, du degré n^2-1 ou n^2; on le calculera à l'aide de l'équation aux dérivées partielles (34). Si, dans cette équation, on remplace V par sa valeur $\Sigma a^{(m)} x^{2m}$, et que l'on égale à zéro l'ensemble des termes du degré

67.

$2m$ en x, on obtient une relation linéaire

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 4m(n^2-2m)\alpha a^{(m)} \\ &\quad + 4n^2(1-\alpha^2)\frac{da^{(m)}}{d\alpha} + (n^2-2m+1)(n^2-2m+2)a^{(m-1)} = 0 \end{aligned} \right.$$

entre trois coefficients consécutifs. Le premier coefficient $a^{(0)}$ est égal à 1; en faisant $m=0$, on trouve $a^{(1)}=0$; en faisant $m=1$, on trouve $a^{(2)} = -\frac{n^2(n^2-1)}{3.4}$, puis $a^{(3)} = \frac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)\alpha}{3.5.6}$, et ainsi de suite.

343. Nous allons maintenant distinguer deux cas, suivant que n est impair ou pair. Lorsque n est impair, d'après les équations (13), on a

$$(45)\qquad V = P,\quad V_1 = xP_1,\quad V_2 = yP_2,\quad V_3 = tP_3.$$

Il est évident que les quantités P, qui sont des polynômes entiers en $\lambda^2(z)$, sont des fonctions de z doublement périodiques, aux périodes ω, ω', et de l'ordre n^2-1; elles sont représentées par les formules

$$(46)\quad \left\{ \begin{aligned} &P(z) = \frac{\theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, \quad P_1(z) = \frac{\theta_1(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_1(z)\,\theta^{n^2-1}(z)}, \\ &P_2(z) = \frac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_2(z)\,\theta^{n^2-1}(z)}, \quad P_3(z) = \frac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta_3(z)\,\theta^{n^2-1}(z)}, \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit des formules (40), et elles satisfont aux relations

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{P\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{P_3(z)} = \frac{P_1\left(z+\frac{\omega}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_2(z)} = \frac{1}{t^{n^2-1}}, \\ &\frac{P\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_1(z)} = \frac{P_2\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \frac{1}{x^{n^2-1}}, \\ &\frac{P\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{P_2(z)} = \frac{P_1\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}P_3(z)} = \frac{1}{y^{n^2-1}}. \end{aligned} \right.$$

Mais, quand on remplace z par $z+\frac{\omega}{2}$, t se change en $\frac{1}{t}$; quand on remplace z par $z+\frac{\omega'}{2}$, x se change en $\frac{1}{x}$; enfin, quand on remplace z par $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$, y se change en $\frac{-i}{y}$. Il en résulte que, si l'on regarde les polynômes P comme des fonctions de l'une des variables x, y, z, on aura les relations

$$(48)\quad P_1(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n^2-1}P\left(\frac{1}{x}\right),\quad P_2(y)=y^{n^2-1}P\left(\frac{-i}{y}\right),\quad P_3(t)=t^{n^2-1}P\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, une fois qu'on a calculé le polynôme P, ordonné par rapport aux puissances de x, on en déduit immédiatement le polynôme P_1 ordonné aussi par rapport à x; le coefficient du terme en x^2 dans P étant nul, celui du terme en x^{n^2-3} dans P_1 est aussi nul. Si maintenant on ordonne le polynôme P par rapport à y ou à t, après avoir remplacé x^2 par sa valeur $k-k'y^2$ ou $\frac{1-k't^2}{k}$, on obtient $P_2(y)$ et $P_3(t)$.

On a aussi les relations

$$(49)\quad P_3(x)=x^{n^2-1}P_2\left(\frac{1}{x}\right),\ P_3(y)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}y^{n^2-1}P_1\left(\frac{-i}{y}\right),\ P_2(t)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}t^{n^2-1}P_1\left(\frac{1}{t}\right).$$

La première donne $P_3(x)$, quand on connaît $P_2(x)$; on en déduit $a_3^{(m)}=a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}-m\right)}$, et, en vertu de la troisième des relations (43), $a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}-m\right)}(k)=a_2^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right)$, $a_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}-m\right)}(k)=a_3^{(m)}\left(\frac{1}{k}\right)$; les coefficients numériques des termes également éloignés des extrêmes dans les polynômes $P_2(x)$ ou $P_3(x)$ sont donc égaux entre eux. Il suffirait, d'après cela, pour avoir les quatre polynômes, de calculer directement la moitié des coefficients de l'un des polynômes $P_2(x)$ ou $P_3(x)$, à l'aide de l'équation (34).

On connaît les premiers coefficients a; les premières des relations (48) et (49) donnent les derniers. Quand, dans l'un des polynômes $P(x)$, on remplace x^2 par $k-k'y^2$ ou par $\frac{1-k't^2}{k}$, le coefficient de la plus haute puissance de y ou de t est égal au coefficient de la plus haute

puissance de x multiplié par $k'^{\frac{n^2-1}{2}}$ ou par $\left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}$. Connaissant de la sorte les derniers coefficients b et c, les deuxièmes et troisièmes des relations (48) et (49) donnent les premiers. On a ainsi

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{a^{(0)}}{1} = \dfrac{a_1^{(0)}}{n} = \dfrac{a_2^{(0)}}{1} = \dfrac{a_3^{(0)}}{1} = \dfrac{a^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \dfrac{a_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \dfrac{a_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \dfrac{a_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = 1, \\[2ex] \dfrac{b^{(0)}}{1} = \dfrac{b_1^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \dfrac{b_2^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \dfrac{b_3^{(0)}}{1} \\[2ex] \qquad = \dfrac{b^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \dfrac{b_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \dfrac{b_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \dfrac{b_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = k'^{\frac{n^2-1}{2}}, \\[2ex] \dfrac{c^{(0)}}{1} = \dfrac{c_1^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \dfrac{c_2^{(0)}}{1} = \dfrac{c_3^{(0)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} \\[2ex] \qquad = \dfrac{c^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} = \dfrac{c_1^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{(-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \dfrac{c_2^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \dfrac{c_3^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)}}{1} = \left(\dfrac{k'}{k}\right)^{\frac{n^2-1}{2}}. \end{cases}$$

La connaissance du dernier coefficient, $a^{\left(\frac{n^2-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$, servira de vérification dans le calcul de P.

En appliquant cette méthode au cas simple où $n = 3$, on trouve

$$\begin{aligned} P &= 1 - 6x^4 + 8\alpha x^6 - 3x^8 = k'^4\left(1 + 6y^4 - 4\,\frac{1-2k^2}{kk'}\,y^6 - 3y^8\right) \\ &= \frac{k'^4}{k^4}\left(1 - 6t^4 + 4\,\frac{2-k^2}{k'}\,t^6 - 3t^8\right), \end{aligned}$$

$$P_1 = 3 - 8\alpha x^2 + 6x^4 - x^8,$$

$$P_2 = k'^4\left(-3 + 4\,\frac{1-2k^2}{kk'}\,y^2 + 6y^4 + y^8\right) = 1 - \frac{4}{k}\,x^2 + 6x^4 - 4kx^6 + x^8,$$

$$P_3 = \frac{k'^4}{k^4}\left(-3 + 4\,\frac{2-k^2}{k'}\,t^2 - 6t^4 + t^8\right) = 1 - 4kx^2 + 6x^4 - \frac{4}{k}\,x^6 + x^8.$$

En l'appliquant au cas où $n = 5$, on trouve

$$P = 1 - 50x^4 + 280\alpha x^6 - 5(25 + 128\alpha^2)x^8 + 32(23\alpha + 16\alpha^3)x^{10} - 20(15 + 48\alpha^2)x^{12}$$
$$+ 720\alpha x^{14} - 105x^{16} - 160\alpha x^{18} + (62 + 64\alpha^2)x^{20} - 40\alpha x^{22} + 5x^{24},$$

$$P_1 = 5 - 40\alpha x^2 + (62 + 64\alpha^2)x^4 - 160\alpha x^6 - 105x^8 + 720\alpha x^{10} - 20(15 + 48\alpha^2)x^{12}$$
$$+ 32(23\alpha + 16\alpha^3)x^{14} - 5(25 + 128\alpha^2)x^{16} + 280\alpha x^{18} - 50x^{20} + x^{24}.$$

344. Considérons maintenant le cas où n est pair; on a, d'après les équations (20),

$$(51)\qquad V = P, \quad V_1 = x\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}\, P_1, \quad V_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\, P_2, \quad V_3 = \sqrt{\frac{1}{k'}}\, P_3.$$

Les quantités P sont encore des fonctions de z doublement périodiques aux périodes ω, ω'; elles sont représentées par les formules

$$(52)\qquad \begin{cases} P(z) = \dfrac{\theta(nz)\,\theta^{n^2-1}(0)}{\theta^{n^2}(z)}, & P_1(z) = \dfrac{\theta_1(nz)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0)\,\theta^{n^2-3}(0)}{\theta_1(z)\,\theta_2(z)\,\theta_3(z)\,\theta^{n^2-3}(z)}, \\[2ex] P_2(z) = \dfrac{\theta_2(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta^{n^2}(z)\,\theta_2(0)}, & P_3(z) = \dfrac{\theta_3(nz)\,\theta^{n^2}(0)}{\theta^{n^2}(z)\,\theta_3(0)}, \end{cases}$$

et satisfont aux relations

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{P\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{P(z)} = \dfrac{P_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P_2(z)} = \dfrac{P_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{P_3(z)} = \dfrac{P_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right)}{-(-1)^{\frac{n}{2}} t^4 P_1(z)} = \dfrac{1}{t^{n^2}}, \\[3ex] \dfrac{P\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P(z)} = \dfrac{P_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{P_2(z)} = \dfrac{P_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \dfrac{P_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)}{-(-1)^{\frac{n}{2}} x^4 P_1(z)} = \dfrac{1}{x^{n^2}}, \\[3ex] \dfrac{P\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P(z)} = \dfrac{P_2\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{(-1)^{\frac{n}{2}} P_2(z)} = \dfrac{P_3\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{P_3(z)} = \dfrac{P_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)}{y^4 P_1(z)} = \dfrac{1}{y^{n^2}}. \end{cases}$$

On en déduit les relations

$$(54)\qquad \begin{cases} P(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} x^{n^2}\, P\left(\dfrac{1}{x}\right), & P_1(x) = -(-1)^{\frac{n}{2}} x^{n^2-4}\, P_1\left(\dfrac{1}{x}\right), \\[2ex] P_2(x) = x^{n^2}\, P_2\left(\dfrac{1}{x}\right), & P_3(x) = x^{n^2}\, P_3\left(\dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

et d'autres de même forme par rapport aux variables y et t. D'après cela, dans chacun des polynômes, les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux, ou égaux et de signes contraires. On connaît les premiers coefficients $a^{(0)} = 1$, $a_1^{(0)} = n$, $a_2^{(0)} = 1$, $a_3^{(0)} = 1$, et par suite les derniers. On calculera le polynôme P, comme précédemment, à l'aide de la relation (44), et il suffira de trouver la première moitié des coefficients.

En faisant le calcul pour $n = 6$, on trouve

$$\begin{aligned} P = {} & (1 - x^{36}) - 105x^4(1 - x^{28}) + 896\alpha x^6(1 - x^{24}) - 12(37 + 288\alpha^2)x^8(1 - x^{20}) \\ & + 1536(3\alpha + 4\alpha^3)x^{10}(1 - x^{16}) + 4(621 + 3360\alpha^2 + 1024\alpha^4)x^{12}(1 - x^{12}) \\ & + 384(33\alpha + 32\alpha^3)x^{14}(1 - x^8) + 126(15 + 128\alpha^2)x^{16}(1 - x^4). \end{aligned}$$

Équations différentielles d'Abel.

345. Nous avons représenté par x la fonction $\sqrt{k}\lambda(z)$. Si nous représentons de même par X la fonction $\sqrt{k}\lambda(nz)$, ces deux quantités vérifient l'équation

$$(55) \qquad \sqrt{k}\,dz = \frac{dX}{n\sqrt{1 - 2\alpha X^2 + X^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}},$$

où α désigne la constante $\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$. D'après ce que nous avons dit, X est une fonction $\frac{V_1}{V}$ de x, rationnelle si n est impair, égale au produit d'une fraction rationnelle par le radical $\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}$ si n est pair. Cette fonction transforme donc la première expression différentielle en une autre de la même forme.

Cette équation peut s'écrire

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = n^2(1 - 2\alpha X^2 + X^4),$$

ou

$$(56) \qquad (1 - 2\alpha x^2 + x^4)\left(\frac{d\log X}{dx}\right)^2 = n^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} - 2\alpha\right).$$

On en déduit, en différentiant,

$$(1 - 2\alpha x^2 + x^4)\frac{d^2\log X}{dx^2} - 2(\alpha x - x^3)\frac{d\log X}{dx} = n^2\left(X^2 - \frac{1}{X^2}\right),$$

et, en remplaçant X par sa valeur $\frac{V_1}{V}$,

$$(57)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\dfrac{d^2V}{dx^2}-\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V\dfrac{dV}{dx}+n^2V_1^2}{V^2}\\ &=\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\dfrac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\dfrac{dV_1}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V_1\dfrac{dV_1}{dx}+n^2V^2}{V_1^2}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque n est impair, V et V_1 sont des polynômes entiers en x, le premier pair et du degré n^2-1, le second impair et du degré n^2. Les numérateurs des deux fractions précédentes sont donc des polynômes entiers pairs, le premier du degré $2n^2$, le second du degré $2n^2+2$; les dénominateurs V^2 et V_1^2 étant premiers entre eux, il en résulte que chacun des numérateurs est divisible par le dénominateur correspondant, et que le quotient est un polynôme pair du second degré, tel que Gx^2+G'. La première fraction se réduisant à $2a^{(1)}$ et, par conséquent, à zéro pour $x=0$, la constante G' est nulle. Le terme de V_1 du degré le plus élevé est $(-1)^{\frac{n-1}{2}}x^{n^2}$; le terme le plus élevé dans le second numérateur est $n^2x^{2n^2+2}$; en le divisant par le terme le plus élevé x^{2n^2} du second dénominateur, on obtient la constante $G=n^2$. On conclut de là que les deux polynômes V et V_1 vérifient les deux équations différentielles simultanées

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\frac{d^2V}{dx^2}-\left(\frac{dV}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V\frac{dV}{dx}+n^2(V_1^2-x^2V^2)=0,\\ &(1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\frac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2\right]-2(\alpha x-x^3)V_1\frac{dV_1}{dx}+n^2(V^2-x^2V_1^2)=0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les intégrales de ces deux équations différentielles, auxquelles on joint les conditions initiales $V=1$, $V_1=0$, $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV_1}{dx}=n$ pour $x=0$.

Lorsque n est pair, le numérateur V_1 est de la forme $v_1\sqrt{1-2\alpha x^2+x^4}$, v_1 étant un polynôme entier impair du degré n^2-3. Le premier numérateur est un polynôme entier pair du degré $2n^2+2$. On reconnaît aisément que le second numérateur est aussi un polynôme entier pair du degré $2n^2$. On en conclut, comme précédemment, que les deux fractions sont égales à un même quotient entier Gx^2+G'. En faisant

$x = 0$ dans la première fraction, on trouve $G' = 0$; en divisant les termes les plus élevés du numérateur et du dénominateur de cette même fraction, on trouve $G = n^2$. Ainsi les deux fonctions V et V_1 vérifient encore les deux équations différentielles (58).

Les équations (58) peuvent être mises sous la forme

$$(59)\quad \begin{cases} D_x[\Delta(x) D_x \log\xi] + n^2(X^2 - x^2) = 0, \\ D_x[\Delta(x) D_x \log\xi] + n^2\left(\dfrac{1}{X^2} - x^2\right) = 0, \end{cases}$$

en représentant par ξ soit la fonction V, soit la fonction V_1, et désignant par $\Delta(x)$ le radical $\sqrt{1 - 2\alpha x^2 + x^4}$. Si, entre l'équation (56) et l'une ou l'autre des équations (59), on éliminait X, il est clair qu'on arriverait à une même équation différentielle du troisième ordre par rapport à la fonction ξ de la variable x. Cette équation admet les solutions particulières $\xi = V$, $\xi = V_1$. Pour obtenir l'intégrale générale, il suffit évidemment de considérer l'intégrale générale de l'équation (55) et de la substituer dans l'une des équations (59); la valeur de ξ sera donnée ensuite par deux quadratures. L'équation (55) admet pour intégrale générale

$$X = \sqrt{k}\,\lambda(nz + \beta) = \sqrt{k}\,\frac{\lambda(nz)\mu(\beta)\nu(\beta) + \lambda(\beta)\mu(nz)\nu(nz)}{1 - k^2\lambda^2(\beta)\lambda^2(nz)},$$

β étant une constante arbitraire, ou, en posant $h = \sqrt{k}\lambda(\beta)$ et remplaçant $\sqrt{k}\lambda(nz)$ par sa valeur $\dfrac{V_1}{V}$ en fonction de x,

$$(60)\quad X = \frac{V V_1 \Delta(h) + h\sqrt{V^4 - 2\alpha V^2 V_1^2 + V_1^4}}{V^2 - h^2 V_1^2}.$$

De la première des équations (59) on déduit ensuite

$$(61)\quad \log\xi = -\int \frac{dx}{\Delta(x)} \int n^2(X^2 - x^2)\,dx.$$

Multiplication de l'argument dans les intégrales de seconde espèce.

346. La formule (13) du n° 273, dans laquelle on remplace z par nz, devient

$$\zeta(nz) = \frac{1}{k^2}\left[nz\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{1}{n} D_z \log\theta(nz)\right].$$

De la première des formules (40) du n° 342, on déduit

$$D_z \log\theta(nz) = n^2 D_z \log\theta(z) + D_z \log V;$$

on en conclut

$$(62) \qquad \zeta(nz) = n\zeta(z) - \frac{1}{nk^2} D_z \log V = n\zeta(z) - \frac{\sqrt{k}\,\Delta(x)}{nk^2} D_x \log V.$$

Multiplication de l'argument et du paramètre dans les intégrales de troisième espèce.

347. La formule (22) du n° 275, dans laquelle on remplace z et a par nz et na, devient

$$\Pi(nz, na) = nz\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} + \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta[n(z+a)]}.$$

On en déduit

$$\Pi(nz, na) - n^2\Pi(z, a) = z\left[n\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} - n^2\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\right] + \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta^{n^2}(z-a)} - \frac{1}{2}\log\frac{\theta[n(z+a)]}{\theta^{n^2}(z+a)}.$$

Si l'on pose $x_1 = \sqrt{k}\,\lambda(z-a)$, $x_2 = \sqrt{k}\,\lambda(z+a)$, $\varepsilon = \sqrt{k}\,\lambda(a)$, on a, en vertu de la première des formules (40) du n° 342,

$$\log\frac{\theta[n(z-a)]}{\theta^{n^2}(z-a)} - \log\frac{\theta[n(z+a)]}{\theta^{n^2}(z+a)} = \log V(x_1) - \log V(x_2),$$

$$n\frac{\theta'(na)}{\theta(na)} - n^2\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} = D_a \log V(\varepsilon) = \sqrt{k}\,\Delta(\varepsilon) D_\varepsilon \log V(\varepsilon);$$

on en conclut la formule

$$(63) \qquad \Pi(nz, na) = n^2\Pi(z, a) + z\sqrt{k}\,\Delta(\varepsilon) D_\varepsilon \log V(\varepsilon) + \frac{1}{2}\log\frac{V(x_1)}{V(x_2)}.$$

CHAPITRE IV.

DIVISION DE L'UNE DES PÉRIODES.

Division de la première période par un nombre impair.

348. La fonction $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}; \omega'\right)$, que nous désignerons plus simplement par $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$, admet les zéros $z = m\frac{\omega}{n} + (2m'+1)\frac{\omega'}{2}$; elle satisfait aux relations

$$\theta\left(z + \frac{\omega}{n}, \frac{\omega}{n}\right) = \theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right),$$

$$\theta\left(z + \omega', \frac{\omega}{n}\right) = -e^{-\frac{n\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right).$$

La fonction

$$f(z) = \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right),$$

formée par le produit des n fonctions $\theta\left(z + p\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$, que l'on obtient en attribuant à p les n valeurs entières consécutives $-\frac{n-1}{2}, \ldots,$ $-1, 0, +1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, admet les mêmes zéros et satisfait aux mêmes relations; car, lorsqu'on remplace z par $z + \frac{\omega}{n}$, chaque facteur devient égal au suivant, et le dernier au premier. Les deux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ et $f(z)$ sont donc dans un rapport constant. Si dans cette relation on

remplace z par l'une des quantités $z + \frac{\omega}{2}$, $z + \frac{\omega'}{2}$, $z + \frac{\omega + \omega'}{2}$, on obtient les quatre formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A} \prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_1\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{A} \prod \theta_1\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A} \prod \theta_2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \theta_3\left(z, \frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A} \prod \theta_3\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \end{aligned} \right.$$

la lettre A désignant une constante.

En mettant à part le facteur qui correspond à $p = 0$, et en groupant deux à deux ceux qui correspondent à des valeurs de p égales et de signes contraires, on en déduit (n° 329)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right) \theta^n(0)}{\theta\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} &= \theta(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)} \theta_1^2(z) \right], \\ \frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega}{n}\right) \theta'_1(0) \theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} &= \theta_1(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)} \theta_1^2(z) \right], \\ \frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) \theta_2(0) \theta^{n-1}(0)}{\theta_2\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} &= \theta_2(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)} \theta_1^2(z) \right], \\ \frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega}{n}\right) \theta_3(0) \theta^{n-1}(0)}{\theta_3\left(0, \frac{\omega}{n}\right)} &= \theta_3(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_2^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_3^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)} \theta_1^2(z) \right]. \end{aligned} \right.$$

349. Nous avons appelé g et k le multiplicateur et le module relatifs aux périodes ω, ω'; nous appellerons de même g_1 et k_1 le multiplicateur et le module relatifs aux périodes $\frac{\omega}{n}$, ω'. Les formules précédentes

peuvent être mises sous la forme

$$
(3)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta\left(0, \dfrac{\omega}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)\right] = \mathfrak{P},\\
&\frac{\theta_1\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta'_1\left(0, \dfrac{\omega}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\,\mathfrak{P}_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta_2\left(0, \dfrac{\omega}{n}\right)} = \mu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\nu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}{\mu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\,\mathfrak{P}_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z, \dfrac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\,\theta_3\left(0, \dfrac{\omega}{n}\right)} = \nu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\frac{\mu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}{\nu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\,\mathfrak{P}_3,
\end{aligned}
\right.
$$

les lettres $\mathfrak{P}$ désignant des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, du degré $n-1$. En divisant membre à membre les trois dernières formules par la première, on en déduit

$$
(4)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{g_1}{g}\,\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}, \quad \mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\mu(z)\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}}, \quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\nu(z)\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{P}}.
$$

En faisant $z = 0$ dans les équations (1), on trouve les valeurs des trois constantes $\sqrt{k_1}$, $\sqrt{k'_1}$, g_1, telles qu'elles sont définies par les formules (17) du n° **76** et (24) du n° **159**,

$$
(5)\quad \sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}{\nu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}, \quad \sqrt{k'_1} = \sqrt{k'^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}, \quad \frac{g_1}{g} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)\nu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}{\mu^2\left(p\dfrac{\omega}{n}\right)}.
$$

Des formules (1) on déduit aussi

$$
(6)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\lambda\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{k^n}{k_1}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}}\lambda\left(z+p\frac{\omega}{n}\right),\\
&\mu\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=\sqrt{\frac{k^n k'_1}{k'^n k_1}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}}\mu\left(z+p\frac{\omega}{n}\right),\\
&\nu\left(z,\frac{\omega}{n}\right)=\sqrt{\frac{k'_1}{k'^n}}\prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}}\nu\left(z+p\frac{\omega}{n}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les symboles $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ désignent des quantités bien déterminées; afin de simplifier les notations, nous avons jusqu'à présent représenté le quotient ou le produit de ces deux quantités par $\sqrt{\frac{k'}{k}}$ ou $\sqrt{kk'}$; de même, dans les formules précédentes, les expressions $\sqrt{k^n}$, $\sqrt{k'^n}$, et par exemple $\sqrt{\frac{k^n k'_1}{k'^n k_1}}$, désignent les quantités $(\sqrt{k})^n$, $(\sqrt{k'})^n$, $\frac{(\sqrt{k^n})^n\sqrt{k'_1}}{(\sqrt{k'})^n\sqrt{k_1}}$.

Division de la seconde période par un nombre impair.

350. La division de la seconde période s'opère de la même manière. La fonction $\theta\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)$, ou plus simplement $\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)$, admet les zéros $z=m\omega+(2m'+1)\frac{\omega'}{2n}$ et satisfait aux relations

$$\theta\left(z+\omega,\frac{\omega'}{n}\right)=\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right),$$

$$\theta\left(z+\frac{\omega'}{n},\frac{\omega'}{n}\right)=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z+\frac{\omega'}{n}\right)}\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right).$$

La fonction

$$f(z)=\prod\theta\left(z+p\frac{\omega'}{n},\omega,\omega'\right),$$

formée par le produit des n fonctions $\theta\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right)$, que l'on obtient en donnant à p les n valeurs entières consécutives $-\frac{n-1}{2}, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, admet les mêmes zéros et satisfait aux mêmes relations; car, lorsqu'on remplace z par $z+\frac{\omega'}{n}$, chaque facteur devient égal au suivant, et le dernier devient égal au premier multiplié par $-e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z+\frac{\omega'}{n}\right)}$. Les deux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$, $f(z)$ sont donc dans un rapport constant. En remplaçant dans cette relation z par l'une des quantités $z+\frac{\omega}{2}$, $z+\frac{\omega'}{2}$, $z+\frac{\omega+\omega'}{2}$, on obtient les quatre formules

$$(7)\quad \begin{cases} \theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta_1\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta_2\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) = A' \prod \theta_3\left(z+p\frac{\omega'}{n}\right), \end{cases}$$

analogues aux formules (1). On en déduit de la même manière

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \theta(z) \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta'_1(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \theta_1(z) \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta_2(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta_2\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \theta_2(z) \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right], \\ \dfrac{\theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta_3(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta_3\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \theta_3(z) \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\theta^2(z) - \frac{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right]. \end{cases}$$

351. Nous appellerons g_2 et k_2 le multiplicateur et le module relatifs aux périodes ω, $\frac{\omega'}{n}$. Des formules précédentes on déduit

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\lambda^2(z)\right] = \mathfrak{P}',\\
&\frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mathfrak{P}'_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \mu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\mathfrak{P}'_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0, \frac{\omega'}{n}\right)} = \nu(z) \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2\frac{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \nu(z)\mathfrak{P}'_3,
\end{aligned}\right.$$

les lettres $\mathfrak{P}'$ désignant encore des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$ du degré $n-1$, et l'on a

$$(10)\quad \lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_2}{g}\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'}, \quad \mu\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mu(z)\mathfrak{P}'_2}{\mathfrak{P}'}, \quad \nu\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\nu(z)\mathfrak{P}'_3}{\mathfrak{P}'}.$$

En faisant $z=0$ dans les équations (7), on trouve, comme précédemment,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{k_2} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}, \quad \sqrt{k'_2} = \sqrt{k'^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)},\\
&\frac{g_2}{g} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}.
\end{aligned}\right.$$

Des formules (7) on déduit aussi

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k^n}{k_2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k^n k'_2}{k'^n k_2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \mu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right),\\
\nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \sqrt{\frac{k'_2}{k'^n}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

352. *Remarque.* — Les relations établies au n° 348 montrent que les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ sont égales à des polynômes entiers et homogènes, du degré n, par rapport aux fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les relations du n° 350, dans lesquelles on remplace ω par $\frac{\omega}{n}$, montrent que les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont égales à des polynômes entiers et homogènes, du degré n, par rapport aux fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; en mettant à la place de ces dernières leurs valeurs, nous obtiendrons les expressions des fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ par des polynômes entiers, du degré n^2, par rapport aux fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$ étant homogènes par rapport aux trois lettres z, ω, ω' (n° 73), les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont les mêmes que $\theta(nz, \omega, \omega')$; nous arriverons ainsi, par deux opérations successives, aux polynômes que nous avons obtenus directement dans le Chapitre précédent (n°s 330 et 331).

Le même mode de transformation s'applique aux fonctions elliptiques. Concevons que l'on divise par n, d'abord la première période, puis la seconde; après la seconde opération, on retrouve évidemment le module primitif k et le multiplicateur ng. Les formules (10) et (11), dans lesquelles on remplace g et k par g_1 et k_1, et g_2 par ng, donnent

les expressions de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$ par des fractions rationnelles en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, du degré n; mais les formules (3) et (4) donnent les expressions de ces dernières fonctions par des fractions rationnelles en $\lambda(z, \omega, \omega')$, $\mu(z, \omega, \omega')$, $\nu(z, \omega, \omega')$; en substituant ces valeurs dans les formules précédentes, on obtiendra les expressions des fonctions $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ par des fractions rationnelles en $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$, du degré n^2.

En effectuant la même opération avec les formules (6) et (12), on trouve

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda(nz) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \\ \mu(nz) = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \mu\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \\ \nu(nz) = \frac{1}{k'^{\frac{n^2-1}{2}}} \prod_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \prod_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right). \end{cases}$$

Autre méthode.

353. Au lieu d'exprimer les nouvelles fonctions elliptiques par des produits, on peut les exprimer par des sommes. Les fonctions

$$\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\lambda\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\mu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right)\nu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right)$$

admettant les périodes ω, ω', la somme des résidus de chacune d'elles dans un parallélogramme (ω, ω') est nulle. Considérons le parallélogramme qui a pour sommets les points $\pm\frac{\omega}{2}$, $\pm\frac{\omega}{2} + \omega'$, et supposons le point t situé à l'intérieur. Les infinis des fonctions dans ce pa-

rallélogramme sont $z = t$ et $z = \frac{\omega'}{2} - p\frac{\omega}{n}$, p variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. En remplaçant à la fin t par z, on obtient les équations

$$(14)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \mu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \mu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right), \\ \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{g}{g_1} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right). \end{cases}$$

Si l'on met à part le terme qui correspond à $p = 0$ et si l'on groupe les autres termes deux à deux à l'aide des formules (3) du n° **319**, il vient

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \lambda(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega}{n}\right) \nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)} \right], \\ \mu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1 k_1} \mu(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)} \right], \\ \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{g}{g_1} \nu(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{1 - k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)} \right]. \end{cases}$$

354. Les fonctions

$$\lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\lambda\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\mu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)\nu\left(t - z + \frac{\omega'}{2}\right)$$

admettant de même les périodes ω, ω', la somme des résidus de chacune d'elles dans un parallélogramme (ω, ω') est nulle. Nous prendrons les

mêmes parallélogrammes que précédemment et nous supposerons le point t à l'intérieur. Les infinis des fonctions dans le parallélogramme sont $z = t$ et $z = \frac{\omega'}{2} - p\frac{\omega'}{n}$, p variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. On trouve ainsi

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \frac{gk}{g_2 k_2} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{gk}{g_2 k_2} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \mu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \\ \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{g}{g_2} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p \nu\left(z + p\frac{\omega'}{n}\right), \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= \frac{gk}{g_2 k_2} \lambda(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu\left(p\frac{\omega'}{n}\right) \nu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2 \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right) \lambda^2(z)}\right], \\ \mu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{gk}{g_2 k_2} \mu(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \mu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2 \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right) \lambda^2(z)}\right], \\ \nu\left(z, \frac{\omega'}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{g}{g_2} \nu(z) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^p \nu\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{1 - k^2 \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right) \lambda^2(z)}\right]. \end{aligned} \right.$$

Nous ferons remarquer que les formules (14) et (16) sont des conséquences des formules (4) et (10). Considérons, par exemple, la première des équations (4); si l'on y regarde $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ comme une quantité donnée et $\lambda(z)$ comme l'inconnue, l'équation est du degré n par rapport à cette inconnue; le premier membre ne changeant pas quand on y remplace z par $z + \frac{2\omega}{n}$, on en conclut que les n quantités

représentées par la formule $\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right)$, dans laquelle p reçoit n valeurs entières consécutives, sont les n racines de l'équation; la somme des racines étant égale à $\frac{g_1k_1}{gk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, on a

$$(18) \quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1k_1}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}\right) = \frac{gk}{g_1k_1}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p\lambda\left(z+p\frac{\omega}{n}\right).$$

355. La combinaison des formules (14) et (16) donne l'expression des fonctions $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ par des sommes. On a, en effet, d'après la première des formules (17),

$$\lambda(nz, \omega, \omega') = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_1k_1}{ngk}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

et, en remplaçant $\lambda\left(z+q\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ par sa valeur donnée par la première des formules (14),

$$(19) \quad \lambda(nz) = \frac{1}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^p\lambda\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

On a de même

$$(20) \quad \mu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{p+q}\mu\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right),$$

$$(21) \quad \nu(nz) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}}\sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} (-1)^{q}\nu\left(z+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

On obtient directement ces dernières équations en appliquant la méthode aux trois fonctions

$$\lambda(nz)\lambda\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right), \quad \mu(nz)\mu\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right), \quad \nu(nz)\nu\left(t-z+\frac{\omega'}{2}\right),$$

qui admettent les deux périodes ω, ω'. Les infinis contenus dans le paral-

lélogramme considéré précédemment sont $z=t$ et $z=\frac{\omega'}{2}-p\frac{\omega}{n}-q\frac{\omega'}{n}$, p et q variant de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$. Si l'on met à part le facteur qui correspond à $p=0$, $q=0$ et si l'on groupe ensuite les termes deux à deux, on en déduit

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\lambda(nz) &= \frac{1}{n}\lambda(z)\left[1+2\sum\frac{(-1)^p\mu(a)\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right],\\
\mu(nz) &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\mu(z)\left[1+2\sum\frac{(-1)^{p+q}\mu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right],\\
\nu(nz) &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\nu(z)\left[1+2\sum\frac{(-1)^{q}\nu(a)}{1-k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)}\right],
\end{aligned}\right.$$

la lettre a désignant les $\frac{n^2-1}{2}$ valeurs de la quantité $p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}$, que l'on obtient quand on combine avec $p=0$ les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de q, et avec les valeurs positives $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ de p les n valeurs 0, $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{n-1}{2}$ de q (n° 330). D'après la remarque du numéro précédent, elles sont aussi des conséquences des formules (14) du n° 332.

Division de la première période par un nombre pair.

356. Le raisonnement du n° 348 conduit aux formules

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A}\prod\theta\left(z+2p\frac{\omega}{2n}\right),\\
\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{A}\prod\theta_1\left(z+2p\frac{\omega}{2n}\right),\\
\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A}\prod\theta_2\left[z+(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right],\\
\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right) &= \mathrm{A}\prod\theta_3\left[z+(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right],
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles p reçoit les n valeurs entières consécutives $-\left(\frac{n}{2}-1\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}$; on les déduit de la première en ajoutant à z

l'une des quantités $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{2n}$, $\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{2n}+\frac{\omega'}{2}$. En groupant deux à deux les facteurs, excepté ceux qui, dans les deux premières, correspondent à $p=0$ et à $p=\frac{n}{2}$, on obtient les formules

$$(24)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta_3(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta(z)\,\theta_3(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta'_1(0)\theta_2(0)\theta^{n-2}(0)}{\theta'_1\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\theta_1(z)\theta_2(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z)-\frac{\theta^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_2\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{\theta^2(z)-\frac{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\theta_1^2(z)\right\},\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_3\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{\theta^2(z)-\frac{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\theta_1^2(z)\right\},
\end{aligned}\right.$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\nu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1-k^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\lambda^2(z)\right]=\nu(z)\,\mathfrak{P},\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\frac{1}{g}\lambda(z)\mu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1-\frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\right]=\frac{1}{g}\lambda(z)\mu(z)\,\mathfrak{P}_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{1-\frac{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\lambda^2(z)\right\}=\mathfrak{P}_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0,\frac{\omega}{n}\right)}=\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}}\left\{1-k^2\frac{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}\lambda^2(z)\right\}=\mathfrak{P}_3,
\end{aligned}\right.$$

les lettres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ désignant des polynômes entiers pairs en $\lambda(z)$, les deux premiers du degré $n-2$, les deux derniers du degré n. On a ainsi

$$(26)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{g_1}{g}\,\frac{\lambda(z)\mu(z)\mathfrak{P}_1}{\nu(z)\mathfrak{P}}, \quad \mu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\mathfrak{P}_2}{\nu(z)\mathfrak{P}}, \quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{\mathfrak{P}_3}{\nu(z)\mathfrak{P}}.$$

357. Remarquons que les quantités $p\,\frac{\omega}{n}$ et $\left(\frac{n}{2}-p\right)\frac{\omega}{n}$ ou $\frac{\omega}{2}-p\,\frac{\omega}{n}$ prenant les mêmes valeurs, quand p varie de 1 à $\frac{n}{2}-1$, on a, en vertu des relations (19) du n° 77,

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda\left(\frac{\omega}{2}-p\,\frac{\omega}{n}\right) = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \frac{\mu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)}{\nu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)},$$

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \mu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \mu\left(\frac{\omega}{2}-p\,\frac{\omega}{n}\right) = k'^{\frac{n}{2}-1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)}{\nu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)},$$

$$\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \nu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \nu\left(\frac{\omega}{2}-p\,\frac{\omega}{n}\right) = k'^{\frac{n}{2}-1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\nu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)};$$

ces trois relations se réduisent à deux

$$(27)\quad \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \nu^2\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) = k'^{\frac{n}{2}-1}, \qquad \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \mu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right) = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda\left(p\,\frac{\omega}{n}\right)\nu\left(p\,\frac{\omega}{n}\right).$$

Les quantités $(2p-1)\,\frac{\omega}{2n}$ et $[n-(2p-1)]\,\frac{\omega}{2n}$ ou $\frac{\omega}{2}-(2p-1)\,\frac{\omega}{2n}$ prenant aussi les mêmes valeurs quand p varie de 1 à $\frac{n}{2}$, on trouve de

même

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right] = k'^{\frac{n}{2}}, \\ \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \mu\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right] = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]\nu\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]. \end{cases}$$

En faisant $z = 0$ dans les équations (23), on obtient ensuite le multiplicateur g_1 et le module k_1 des nouvelles fonctions elliptiques

$$(29)\qquad \sqrt{k_1} = k^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right], \quad \frac{g_1}{g} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}.$$

Division de la seconde période par un nombre pair.

358. On obtient de la même manière les formules

$$(30)\quad \begin{cases} \theta\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = \mathrm{A}' \prod \theta\left[z + (2p-1)\dfrac{\omega'}{2n}\right], \\ \theta_1\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = -i\mathrm{A}' e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4n}\right)} \prod \theta_1\left(z + 2p\dfrac{\omega'}{2n}\right), \\ \theta_2\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = \mathrm{A}' e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(z+\frac{\omega'}{4n}\right)} \prod \theta_2\left(z + 2p\dfrac{\omega'}{2n}\right), \\ \theta_3\left(z, \dfrac{\omega'}{n}\right) = \mathrm{A}' \prod \theta_3\left[z + (2p-1)\dfrac{\omega'}{2n}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles p reçoit les n valeurs consécutives $-\left(\frac{n}{2}-1\right), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$; on les déduit de la première en ajoutant à z l'une des quantités $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2n}, \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2n} + \frac{\omega}{2}$. Par le groupement des facteurs,

elles se mettent sous la forme

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ \theta^2(z) - \frac{\theta_1^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\theta^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\theta_1^2(z) \right\},\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta'_1(0)\theta^{n-1}(0)}{\theta'_1\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \theta(z)\theta_1(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_1^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta_2(0)\theta_3(0)\theta^{n-2}(0)}{\theta_2\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \theta_2(z)\theta_3(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[\theta^2(z) - \frac{\theta_3^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\theta_1^2(z)\right],\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta_3\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ \theta^2(z) - \frac{\theta_2^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\theta_3^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\theta_1^2(z) \right\},
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\theta\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ 1 - k^2\lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]\lambda^2(z) \right\} = \mathfrak{P}',\\
&\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta'_1\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \frac{1}{g}\lambda(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1 - \frac{\lambda^2(z)}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\right] = \frac{1}{g}\lambda(z)\mathfrak{P}'_1,\\
&\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_2\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \mu(z)\nu(z)\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1}\left[1 - \frac{\nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}{\mu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}\lambda^2(z)\right] = \mu(z)\nu(z)\mathfrak{P}'_2,\\
&\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega'}{n}\right)\theta^n(0)}{\theta^n(z)\theta_3\left(0,\frac{\omega'}{n}\right)} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \left\{ 1 - k^2\frac{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}\lambda^2(z) \right\} = \mathfrak{P}'_3,
\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(33)\quad \lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{g_2}{g}\,\frac{\lambda(z)\mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'},\qquad \mu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mu(z)\nu(z)\mathfrak{P}'_2}{\mathfrak{P}'},\qquad \nu\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{\mathfrak{P}'_3}{\mathfrak{P}'}.$$

70.

On trouve, comme dans le numéro précédent,

$$(34)\quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{k^{\frac{n}{2}-1}}, \\[2ex] \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \mu\left(p\frac{\omega'}{n}\right) = (-i)^{\frac{n}{2}-1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda\left(p\frac{\omega'}{n}\right)\nu\left(p\frac{\omega'}{n}\right), \\[2ex] \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^{\frac{n}{2}}}, \\[2ex] \displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \mu\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right] = (-i)^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \lambda\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]\nu\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right], \end{cases}$$

et, en faisant $z = 0$ dans les équations (30),

$$(35)\quad \sqrt{k'_2} = k'^{\frac{n}{2}} \prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \frac{1}{\nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}, \quad \frac{g_2}{g} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \nu^2\left[(2p-1)\frac{\omega'}{2n}\right]}{\displaystyle\prod_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \nu^2\left(p\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

359. *Remarque.* — La première des équations (26), dont on élève les deux membres au carré et dans laquelle on regarde $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ comme une quantité connue et $\lambda^2(z)$ comme l'inconnue, est du degré n par rapport à cette inconnue; les n racines sont représentées par la formule $\lambda^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right)$, où p reçoit n valeurs entières consécutives; la somme des racines étant connue, il en résulte la relation

$$(36)\quad \lambda^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \left(\frac{gk}{g_1 k_1}\right)^2 \left[-1 - 2\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}-1} \lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right) + \sum_{p=0}^{p=n-1} \lambda^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right)\right].$$

De la deuxième et de la troisième des équations (26) on déduit de même

$$(37)\quad \mu^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \left(\frac{gk}{g_1 k_1}\right)^2 \left\{ \sum_{p=0}^{p=n-1} \mu^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right) - 2k'^2 \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \frac{\lambda^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]}{\mu^2\left[(2p-1)\frac{\omega}{2n}\right]} \right\},$$

$$(38)\quad \nu\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = \frac{g}{g_1} \sum_{p=0}^{p=n-1} \nu\left(z + p\frac{\omega}{n}\right).$$

La considération du produit des racines dans les deux premières équations conduit aux relations

$$(39)\quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{\frac{k^n}{k_1}} \prod_{p=0}^{p=n-1} \lambda\left(z + p\frac{\omega}{n}\right),$$

$$(40)\quad \mu^2\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = 1 - \frac{k^n}{k_1 k'^n} \prod_{p=0}^{p=n-1} \mu^2\left(z + p\frac{\omega}{n}\right).$$

Les formules (33), relatives à la division de la seconde période, donneraient des relations analogues.

Dans ce qui précède, nous avons exprimé les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ au moyen des fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$. Les fonctions $\vartheta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ s'expriment par des formules toutes pareilles au moyen des fonctions $\vartheta(z, \omega, \omega')$.

Nombre des fonctions provenant de la division de l'une des périodes de l'un des couples qui correspondent à un module donné.

360. Nous savons qu'à un module donné k, le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, correspondent une infinité de couples de périodes elliptiques. Désignons par 2ω, ω' l'un d'eux, par exemple celui que nous avons déterminé, au n° 221, à l'aide d'intégrales définies; tous les autres $2\omega_1$, ω'_1 sont définis par les relations

$$\omega = (4a+1)\omega_1 + 4b\omega'_1, \quad \omega' = 4a'\omega_1 + (4b'+1)\omega'_1,$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1)-16ba'=1$ (n° 232); mais nous considérerons d'une manière plus générale les couples de périodes définis par les relations

$$(41)\qquad \omega=(2a+1)\omega_1+2b\omega'_1,\quad \omega'=2a'\omega_1+(2b'+1)\omega'_1,$$

avec la condition

$$(42)\qquad (2a+1)(2b'+1)-4ba'=1;$$

car les fonctions $\lambda(z,\omega_1,\omega'_1)$, qui leur correspondent, sont égales à $\pm\lambda(z,\omega,\omega')$ et ont pour modules $\pm k$, de sorte que les polynômes $\mathfrak{P}$ qui entrent dans les expressions des fonctions $\lambda\left(z,\frac{\omega_1}{n},\omega'_1\right)$, $\lambda\left(z,\omega_1,\frac{\omega'_1}{n}\right)$ renferment la même fonction donnée $\lambda^2(z,k)$, la même constante k^2, et ne diffèrent que par la valeur de l'une des constantes $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n},k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{n},k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega}{2n},k\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2n},k\right)$. Dans ce qui suit, nous ne distinguerons pas deux fonctions égales et de signes contraires, ou ayant leurs modules égaux et de signes contraires.

Nous remarquerons d'abord que, lorsque n est impair, la division de la seconde période donne les mêmes fonctions que celle de la première; car deux couples de périodes satisfaisant aux relations (41) sont liés par des relations de même forme

$$\omega_2=(2a_1+1)\omega_1+2b_1\omega'_1,\quad \omega'_2=2a'_1\omega_1+(2b'_1+1)\omega'_1,$$

avec la seule condition $(2a_1+1)(2b'_1+1)-4b_1a'_1=1$; d'où

$$\frac{\omega_2}{n}=\frac{2a_1+1}{n}\omega_1+2b_1\frac{\omega'_1}{n},\quad \omega'_2=2a'\omega_1+(2b'_1+1)n\frac{\omega'_1}{n}.$$

Pour que les deux fonctions $\lambda\left(z,\frac{\omega_2}{n},\omega'_2\right)$, $\lambda\left(z,\omega_1,\frac{\omega'_1}{n}\right)$ soient dans un rapport constant, il est nécessaire et il suffit que $2a_1+1$ soit divisible par n, ce qui est impossible quand n est pair; lorsque n est impair et égal à $2m+1$, il suffira de prendre $a_1=b_1=m$, $a'_1=b'_1=-m$; les deux fonctions seront alors égales et leurs modules égaux ou égaux et de signes contraires.

361. Proposons-nous maintenant de chercher le nombre des fonc-

tions $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$, quand n est impair. Les relations (41) renferment quatre nombres entiers $2a+1$, b, a', $2b'+1$, assujettis à la seule condition (42). Considérons tous les systèmes de nombres entiers dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n soit un même nombre n'; posons $n = n'n''$, $2a+1 = n'(2a_1+1)$, les nombres n'' et $2a_1+1$ étant premiers entre eux. La première des relations (41) devient

$$\frac{\omega}{n'} = (2a_1+1)\omega_1 + 2n''b\frac{\omega'_1}{n}.$$

Puisque les nombres $2a_1+1$ et $4n''b$ sont premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres entiers a'' et $2b''+1$ satisfaisant à la condition

$$(43)\qquad (2a_1+1)(2b''+1) - 4n''ba'' = 1.$$

D'après cela, si l'on pose

$$\omega'' = 2a''\omega_1 + (2b''+1)\frac{\omega'_1}{n},$$

on voit que le couple des périodes ω_1, $\frac{\omega'_1}{n}$ est équivalent au couple $\frac{\omega}{n'}$, ω'', et que la fonction $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$ est égale à $\pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$. Des relations (42) et (43), retranchées membre à membre, on déduit

$$(2a_1+1)[2b''+1 - n'(2b'+1)] = 4b(n''a'' - a'),$$

et par suite

$$(44)\qquad \begin{cases} n''a'' - a' = (2a_1+1)t, \\ 2b''+1 - n'(2b'+1) = 4bt, \end{cases}$$

t étant un nombre entier. Si, dans la valeur de ω'', on remplace a'' et $2b''+1$ par leurs valeurs tirées de ces deux équations, on trouve

$$\omega'' = \frac{\omega'}{n''} + 2t\frac{\omega}{n} = \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}.$$

Ainsi toutes les fonctions provenant de la division par n de la seconde période des couples qui sont fournis par les systèmes de nombres entiers, dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n

est égal à un même nombre n', sont comprises dans la formule

$$(45)\qquad \lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right).$$

On pourra effectuer l'opération à l'aide de deux divisions successives. On exprimera d'abord $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega'\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z, \omega, \omega')$ du degré n', puis $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right)$ par une fraction rationnelle du degré n'' en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega' + 2t\frac{\omega}{n'}\right)$ ou $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega'\right)$.

362. Nous remarquons que les trois nombres n', n'', t n'ont pas de facteur commun; car, si cela avait lieu, d'après la seconde des équations (44), ce facteur commun diviserait $2b''+1$ et, par suite, le premier membre de l'équation (43), ce qui est impossible. On en conclut que le nombre entier t, qui entre dans la formule (45), n'est pas arbitraire; il doit être premier avec le plus grand commun diviseur δ des deux nombres n' et n''. Nous allons voir qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque première avec δ. L'équation (42) est une conséquence des équations (43) et (44). Étant donné le nombre entier t premier avec δ, proposons-nous de déterminer six nombres entiers $2a_1+1$, b, a', $2b'+1$, a'', $2b''+1$ satisfaisant aux trois équations (43) et (44), et tels que $2a_1+1$ soit premier avec n''. Les deux équations (44) donneront immédiatement les deux nombres entiers a' et $2b''+1$, quand les autres seront connus; l'équation (43), dans laquelle on remplace $2b''+1$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (44), devient

$$(46)\qquad n'(2a_1+1)(2b'+1) - 4n''ba'' = 1 - 4t(2a_1+1)b;$$

le premier membre étant divisible par δ, le second membre l'est aussi. En appelant t' le quotient entier, on a la relation

$$(47)\qquad 4t(2a_1+1)b + \delta t' = 1,$$

et l'équation (46) se réduit à

$$(48)\qquad n'_1(2a_1+1)(2b'+1) - 4n''_1 ba'' = t'.$$

n'_1 et n''_1 désignant les quotients premiers entre eux des nombres n' et n'' par leur plus grand commun diviseur δ. La question revient à trouver des nombres entiers satisfaisant aux deux équations (47) et (48). Les nombres donnés $4t$ et δ étant premiers entre eux, on peut déterminer des nombres entiers x et t' satisfaisant à l'équation $4tx + \delta t' = 1$. Prenons l'un quelconque des nombres x; décomposons-le en un produit de trois facteurs : l'un x', formé des facteurs premiers qui entrent dans n'_1; le deuxième x'', des facteurs premiers qui entrent dans n''_1, quels que soient d'ailleurs leurs exposants; le troisième y, des facteurs premiers étrangers à n'_1 et à n''_2. En faisant $2a_1 + 1 = x'$, $b = x''y$, nous aurons deux nombres premiers entre eux et satisfaisant à l'équation (47), avec la valeur correspondante de t'; en outre, d'après cette relation, le nombre $2a_1 + 1$ est premier avec δ; comme il l'est déjà avec n''_1, il l'est aussi avec n''; d'ailleurs b est premier avec n'_1. Les deux nombres $n'_1(2a_1 + 1)$ et $4n''_1 b$, ainsi formés, étant premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres entiers $2b' + 1$ et a'' vérifiant l'équation (48).

363. A l'inspection de la formule (45), on voit immédiatement que deux valeurs de t dont la différence est un multiple de n'' donnent la même fonction; d'ailleurs, pour que deux de ces fonctions soient dans un rapport constant, il est nécessaire que leurs périodes soient équivalentes, ce qui exige, puisque le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est imaginaire, que la différence des deux valeurs de t soit un multiple de n''. Si donc on ne regarde pas comme différentes deux fonctions égales et de signes contraires, on pourra dire que le nombre des fonctions qui correspondent à un plus grand commun diviseur n' entre $2a + 1$ et n est égal au nombre des nombres inférieurs à n'' et premiers avec δ, n'' étant le quotient de n par n' et δ le plus grand commun diviseur entre n' et n''. On procédera de même pour chaque diviseur du nombre n. Le raisonnement précédent montre que deux fonctions qui se rapportent à deux diviseurs différents ne sont pas dans un rapport constant. En prenant successivement tous les diviseurs, on obtiendra ainsi toutes les fonctions $\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$.

Nous avons divisé par n la seconde période; on opérerait de même la division de la première période. Tous les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (42), et dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2b'+1$ et n est n', donnent des fonctions représentées par la formule

$$(49) \qquad \lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega + 2t\frac{\omega'}{n'}}{n''}, \frac{\omega'}{n'}\right),$$

dans laquelle t désigne encore un nombre entier premier avec δ; mais nous avons vu que ces fonctions sont les mêmes que les précédentes.

Dans le cas particulier où n est premier, il n'y a que deux hypothèses possibles, soit $n'=n$, $n''=1$, soit $n'=1$, $n''=n$. Si l'on divise la seconde période, la première hypothèse donne la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, la seconde les n fonctions représentées par la formule $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'+2t\omega}{n}\right)$, où l'on attribue à t les n valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ce qui fait en tout $n+1$ fonctions différentes. Si l'on divise la première période, la première hypothèse donne la fonction $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, la seconde les n fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega+2t\omega'}{n}, \omega'\right)$, ce qui reproduit les mêmes fonctions dans un autre ordre.

364. Considérons actuellement le cas où le diviseur n est un nombre pair, que nous représenterons par $2^h n_1$, n_1 étant impair. Divisons d'abord la seconde période. En posant $n_1 = n'n''$ et appelant δ le plus grand commun diviseur de n' et n'', on démontre, comme précédemment, que les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (42), et dans lesquels le plus grand commun diviseur de $2a+1$ et n ou n_1 est égal à n', donnent les fonctions comprises dans la formule

$$(50) \qquad \lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega'+2t\frac{\omega}{n'}}{2^h n''}\right),$$

où t désigne un nombre entier premier avec δ. En divisant la première

période, on arrive de même à la formule

$$(51)\qquad \lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right) = \pm\lambda\left(z, \frac{\omega + 2t\frac{\omega'}{n'}}{2^h n''}, \frac{\omega'}{n'}\right),$$

t désignant toujours un nombre premier avec δ. Les fonctions représentées par ces deux formules sont différentes. Le nombre des fonctions données par chacune d'elles et se rapportant à un plus grand commun diviseur n' est égal au nombre des nombres inférieurs à $2^h n''$ et premiers avec δ.

Nous avons vu (n° 236) que, si 2ω, ω' sont des périodes elliptiques de la fonction $\lambda(z, k)$, la fonction $\lambda(z, k')$ admet les périodes elliptiques $-2\omega' i$, ωi. En comparant les formules des n°s 349 et 351, 357 et 358, on reconnaît que les deux fonctions $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\lambda\left(z, \frac{-\omega' i}{n}, \omega i\right)$ ont des multiplicateurs égaux et des modules complémentaires, et de même les deux fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\lambda\left(z, -\omega' i, \frac{\omega i}{n}\right)$.

Division par deux.

365. D'après leur définition par les formules (6) du n° 74, les valeurs des fonctions $\theta(z)$ pour une valeur de z de la forme $z = a\omega + b\omega'$, a et b étant des constantes quelconques, sont des fonctions de la quantité imaginaire $\rho = \frac{\omega'}{\omega} = r + si$, dans laquelle le coefficient s est positif et différent de zéro; si l'on représente, à la façon ordinaire, la variable ρ par un point du plan ayant pour coordonnées r et s, ces valeurs des fonctions θ sont des fonctions holomorphes de ρ pour toute la moitié du plan située au-dessus de l'axe des x. Les quantités $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$, définies par les formules (17) du n° 76, sont, d'après cela, des fonctions holomorphes de ρ; en considérant leurs expressions en produits par les formules (29) et (30) du n° 205, on voit que leurs racines carrées sont

elles-mêmes holomorphes par rapport à ρ; nous poserons

$$(52)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}} \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\rho i}{8}} \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}}, \\ \sqrt[4]{k'} = \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}} = \prod\limits_{m=1}^{m=\infty} \dfrac{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}}. \end{cases}$$

Voici d'autres fonctions holomorphes de ρ qui nous seront utiles :

1° Si, dans les formules (13) du n° 75, on fait $z = -\dfrac{\omega}{4}$, on trouve

$$\theta_3\left(\frac{\omega}{4}\right) = \theta\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \theta_2\left(\frac{\omega}{4}\right) = \theta_1\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

d'où

$$\nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}\,\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad \lambda^2\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{1+k'}.$$

En définissant le radical $\sqrt{1+k'}$ au moyen de $\lambda\left(\dfrac{\omega}{4}\right)$, on a

$$(53)\quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{k'}.$$

En définissant $\sqrt{1-k'}$ par la relation $\sqrt{1-k'} \times \sqrt{1+k'} = k$, on en déduit

$$(54)\quad \lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}}, \quad \mu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = \frac{-i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}, \quad \nu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right) = -i\sqrt{k'}.$$

2° Si, dans les formules (14) du n° 75, on fait $z = -\dfrac{\omega'}{4}$, on trouve

$$\theta_3\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \theta_2\left(\frac{\omega'}{4}\right), \quad \theta_1\left(\frac{\omega'}{4}\right) = i\theta\left(\frac{\omega'}{4}\right),$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}, \quad \nu\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \sqrt{k}\,\mu\left(\frac{\omega'}{4}\right), \quad \nu^2\left(\frac{\omega'}{4}\right) = 1+k.$$

En définissant le radical $\sqrt{1+k}$ par la valeur de $\nu\left(\frac{\omega'}{4}\right)$, on a

$$(55)\qquad \lambda\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{i}{\sqrt{k}},\quad \mu\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}},\quad \nu\left(\frac{\omega'}{4}\right)=\sqrt{1+k}.$$

En définissant $\sqrt{1-k}$ par la relation $\sqrt{1-k}\times\sqrt{1+k}=k'$, on en déduit

$$(56)\quad \lambda\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \mu\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\frac{-i\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}},\quad \nu\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{4}\right)=\sqrt{1-k}.$$

3° Si, dans les formules (15) du n° 75, on fait $z=-\frac{\omega+\omega'}{4}$, on trouve

$$\theta\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_2\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),\quad \theta_1\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_3\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\mu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}},\quad \nu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{kk'}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),$$

et, par suite,

$$\lambda^2\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\frac{k+ik'}{k}.$$

En définissant le radical $\sqrt{k+ik'}$ au moyen de $\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)$, on a

$$(57)\ \lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{k+ik'}}{\sqrt{k}},\ \mu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}e^{-\frac{\pi i}{4}},\ \nu\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\sqrt{k'}\sqrt{k+ik'}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

En définissant $\sqrt{k-ik'}$ par la relation $\sqrt{k-ik'}\times\sqrt{k+ik'}=1$, on en déduit

$$(58)\ \lambda\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\frac{\sqrt{k-ik'}}{\sqrt{k}},\ \mu\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\sqrt{\frac{k'}{k}}e^{\frac{\pi i}{4}},\ \nu\left(\frac{\omega-\omega'}{4}\right)=\sqrt{k'}\sqrt{k-ik'}\,e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

366. Divisons maintenant par deux la première période. Les for-

mules (29) du n° 357 donnent

$$(59)\qquad \frac{g_1}{g} = 1 + k', \quad \sqrt{k_1} = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}},$$

et les formules (26) du n° 356 se réduisent à

$$(60)\qquad \begin{cases} \lambda\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = (1+k')\frac{\lambda(z)\mu(z)}{\nu(z)}, \\ \mu\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-(1+k')\lambda^2(z)}{\nu(z)}, \\ \nu\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1-(1-k')\lambda^2(z)}{\nu(z)}. \end{cases}$$

D'après la dernière de ces formules, on a

$$k'_1 = \nu\left(\frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}.$$

La quantité $\sqrt{k'_1}$ est la fonction holomorphe de ρ que l'on obtient en remplaçant ρ par 2ρ dans l'expression de $\sqrt{k'}$; d'autre part, en vertu de ce qui précède, la quantité $\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ est une fonction holomorphe de ρ; ces deux fonctions ont des valeurs, réelles positives et égales, pour toutes les valeurs de ρ de la forme $\rho = si$; leur rapport est aussi holomorphe, et conserve une valeur constante, quand la variable ρ décrit la partie positive de l'axe des y; on en conclut, d'après le corollaire du n° 114, qu'il reste constant dans tout le demi-plan. On a donc, pour toutes les valeurs de ρ dans lesquelles s est positif,

$$(61)\qquad \sqrt{k'_1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k'}}{\sqrt{1+k'}}.$$

Des formules du n° 205 on déduit, par un raisonnement analogue,

$$\frac{\theta\left(0, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta(0)\theta_3(0)} = \frac{\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{2}\right)}{\theta'_1(0)\theta_2(0)} = \frac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}},$$

$$\sqrt{1+k'}\,\theta_2\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{1-k'}\,\theta_3\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = \theta_2^2(0)\sqrt{\frac{\pi}{2g\omega}},$$

et les formules (24) du n° 356 deviennent

$$(62)\quad \begin{cases} \theta\left(z, \dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\,\theta(z)\,\theta_3(z), \\ \theta_1\left(z, \dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k'}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\,\theta_1(z)\,\theta_2(z), \\ \theta_2\left(z, \dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{1}{k'}\sqrt{\dfrac{\pi}{2g\omega}}\left[\sqrt{1-k'}\,\theta^2(z) - \sqrt{1+k'}\,\theta_1^2(z)\right], \\ \theta_3\left(z, \dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{1}{k'}\sqrt{\dfrac{\pi}{2g\omega}}\left[\sqrt{1+k'}\,\theta^2(z) - \sqrt{1-k'}\,\theta_1^2(z)\right]. \end{cases}$$

367. En divisant par deux la seconde période, on a de même

$$(63)\qquad \frac{g_2}{g} = 1 + k, \quad \sqrt{k'_2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \quad \sqrt{k_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k}},$$

$$(64)\quad \begin{cases} \lambda\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = (1+k)\dfrac{\lambda(z)}{1+k\lambda^2(z)}, \\ \mu\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{\mu(z)\nu(z)}{1+k\lambda^2(z)}, \\ \nu\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{1-k\lambda^2(z)}{1+k\lambda^2(z)}. \end{cases}$$

On a aussi

$$\frac{\theta_2\left(0, \dfrac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2(0)\,\theta_3(0)} = \frac{\theta'_1\left(0, \dfrac{\omega'}{2}\right)}{\theta'_1(0)\,\theta(0)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}},$$

$$\sqrt{1+k}\,\theta\left(0, \frac{\omega'}{2}\right) = \sqrt{1-k}\,\theta_3\left(0, \frac{\omega'}{2}\right) = \theta^2(0)\sqrt{\frac{\pi}{g\omega}};$$

d'où

$$(65)\quad \begin{cases} \theta_1\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\,\theta(z)\,\theta_1(z), \\ \theta_2\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\,\theta_2(z)\,\theta_3(z), \\ \theta\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+k}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\left[\theta^2(z) + \theta_1^2(z)\right], \\ \theta_3\left(z, \dfrac{\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k}}\sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\left[\theta^2(z) - \theta_1^2(z)\right]. \end{cases}$$

368. *Remarque I.* — De la division par deux de l'une des périodes, M. Hermite (*Comptes rendus*, 1863) a déduit des formules qui donnent immédiatement les expressions en séries de $\sqrt[4]{k}$ et de $\sqrt[4]{k'}$ trouvées par Jacobi. Si l'on considère les fonctions θ formées avec les deux constantes ω et $\omega+\omega'$, d'après les formules (52), la quantité $\sqrt[4]{k}$ devient $\sqrt[4]{\frac{k}{k'}}e^{\frac{\pi i}{8}}$, et les formules du numéro précédent donnent

$$(66)\quad \begin{cases} \theta_1\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{kk'}}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{\dfrac{2\pi}{g\omega}}\, \theta_1(z)\,\theta_3(z), \\ \theta_2\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{kk'}}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \sqrt{\dfrac{2\pi}{g\omega}}\, \theta(z)\,\theta_2(z), \\ \theta\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k'+ik}} \sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\, [\theta_3^2(z) + i\theta_1^2(z)], \\ \theta_3\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k'-ik}} \sqrt{\dfrac{\pi}{g\omega}}\, [\theta_3^2(z) - i\theta_1^2(z)], \end{cases}$$

les fonctions θ des seconds membres étant celles qui sont formées avec ω et ω'. A l'aide des deux premières formules de chacun des groupes (62), (65) et (66), on obtient les expressions suivantes des fonctions elliptiques :

$$(67)\quad \begin{cases} \lambda(z, \omega, \omega') = \dfrac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}} \dfrac{\theta_1\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta\left(z, \dfrac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}} \dfrac{\theta_1\left(z, \dfrac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\theta_2\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)}, \\ \mu(z, \omega, \omega') = \sqrt[4]{\dfrac{k'}{4k}} \dfrac{\theta_2\left(z, \omega, \dfrac{\omega'}{2}\right)}{\theta\left(z, \dfrac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \sqrt[4]{\dfrac{4k'^3}{k^3}} \dfrac{\theta_1\left(z, \dfrac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\theta_1\left(z, \omega, \dfrac{\omega'}{2}\right)}, \\ \nu(z, \omega, \omega') = \sqrt[4]{k'}\, e^{\frac{\pi i}{8}} \dfrac{\theta_2\left(z, \omega, \dfrac{\omega'}{2}\right)}{\theta_2\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)} = \sqrt[4]{k'^3}\, e^{-\frac{\pi i}{8}} \dfrac{\theta_1\left(z, \omega, \dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)}{\theta_1\left(z, \omega, \dfrac{\omega'}{2}\right)}. \end{cases}$$

Si, dans les formules (8) du n° 74, on remplace q par l'une des quantités q^2, $\sqrt{q}$, $i\sqrt{q}$, et, dans le premier cas, ω par $\frac{\omega}{2}$, on obtient les développements des fonctions θ relatives aux trois couples de constantes

$\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)$, $\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)$, $\left(\omega, \frac{\omega+\omega'}{2}\right)$. En faisant ensuite $z = 0$ dans les deux dernières des équations précédentes, on trouve

(68)
$$\left\{\begin{aligned}
\sqrt[4]{k'} &= \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}},\\
\sqrt[4]{k} &= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n q^{2n^2}},\\
\sqrt[4]{k'^3} &= \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}(2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{-\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}},\\
\sqrt[4]{k^3} &= 2\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{8}} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}(2n-1) q^{2n(n-1)}}{-\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (2n-1) q^{\frac{n(n-1)}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Des formules précédentes on déduit aussi les expressions de certaines fonctions méromorphes considérées au n° 226,

$$\sqrt{[1 + \lambda(z, \omega, \omega')]\,[1 + k\lambda(z, \omega, \omega')]} = \lambda(z, 2\omega, \omega') + \frac{\mu(z, 2\omega, \omega')}{\nu(z, 2\omega, \omega')},$$

$$\sqrt{[1 + \lambda(z, \omega, \omega')]\,[1 - k\lambda(z, \omega, \omega')]} = \mu(z, 2\omega, \omega') + \frac{k'\lambda(z, 2\omega, \omega')}{\nu(z, 2\omega, \omega')}.$$

369. *Remarque II.* — Concevons que l'on divise la première pé-

riode plusieurs fois successivement par deux et appelons k_2, $k_4, \ldots$, les modules des fonctions elliptiques correspondantes. En remplaçant q par q^{2^m} dans la seconde des formules (52), on obtient

$$\sqrt[4]{k'_{2^m}} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-q^{(2n-1)2^m}}{1+q^{(2n-1)2^m}}.$$

L'exposant $(2n-1)2^m$, dans lequel n et m sont quelconques, désignant tous les nombres pairs, on en déduit

$$\sqrt[4]{k'_2 k'_4 k'_8 \ldots} = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}},$$

et, en vertu des formules du n° 205, où l'on fait $g=1$,

$$(69) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \sqrt{\frac{k'_2 k'_4 k'_8 \ldots}{k'}}.$$

En remplaçant k'_2, $k'_4, \ldots$ par leurs valeurs données par la formule (61), on a

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{k'} \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} \frac{2\sqrt{k'_2}}{1+k'_2} \frac{2\sqrt{k'_4}}{1+k'_4} \frac{2\sqrt{k'_8}}{1+k'_8} \cdots,$$

et, en divisant membre à membre cette équation par la précédente,

$$(70) \qquad \frac{\omega}{\pi} = \frac{2}{1+k'} \frac{2}{1+k'_2} \frac{2}{1+k'_4} \frac{2}{1+k'_8} \cdots$$

Si l'on pose

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = k',$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

$$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}, \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a successivement

$$\frac{b_2}{a_2} = k'_2, \qquad \frac{b_3}{a_3} = k'_4, \qquad \frac{b_4}{a_4} = k'_8, \; \ldots,$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1+k'}, \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{2}{1+k'_2}, \quad \frac{a_3}{a_4} = \frac{2}{1+k'_4}, \; \ldots,$$

et la relation précédente devient

(71) $$\frac{\omega}{\pi} = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{a_2}{a_3}\,\frac{a_3}{a_4}\cdots$$

On en conclut, comme l'a observé Gauss, que les quantités a tendent vers une limite égale à $\frac{\pi}{\omega}$; les quantités b tendent vers la même limite.

Dans la formule

$$\nu(z, \omega, \omega') = \sqrt{k'} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2n-1)}}{1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{2(2n-1)}},$$

déduite des formules (20) du n° 202, remplaçons q successivement par $q^2, q^4, q^8, \ldots$, sans changer ω, et faisons le produit des fonctions ainsi obtenues; nous aurons

$$\nu(z, \omega, 2\omega')\nu(z, \omega, 4\omega')\ldots = \frac{\omega}{\pi}\sqrt{k'} \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 + 2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}},$$

et, par suite,

(72) $$\nu(z, \omega, 2\omega')\nu(z, \omega, 4\omega')\ldots = \frac{\omega}{\pi}\operatorname{tang}\frac{\pi z}{\omega}\,\frac{\mu(z, \omega, \omega')}{\lambda(z, \omega, \omega')}.$$

Équation aux dérivées partielles de Jacobi.

370. Si dans les formules (8) du n° 74 on regarde ω comme une fonction arbitraire de q, les quatre fonctions $\theta(z, \omega, \omega')$ deviennent des fonctions des deux variables indépendantes z et q, et d'après le calcul du n° 289, elles satisfont à une même équation aux dérivées

partielles

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial \log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On obtient les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ en remplaçant dans ces formules (8) ω par $\frac{\omega}{n}$ et q par q^n; en regardant encore ω comme une fonction arbitraire de q, le même calcul montre que les quatre fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ vérifient l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial \log q} + \frac{\omega^2}{4\pi^2 n}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{d\log\omega}{d\log q} z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On obtient les fonctions $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ en remplaçant dans les formules (8) q par $q^{\frac{1}{n}}$; on reconnaît de la même manière que les quatre fonctions $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ satisfont aussi à l'équation (2).

Supposons maintenant que, dans toutes les fonctions précédentes, ω soit la fonction de q définie par la formule (31) du n° **205**, où l'on fait $g = 1$. Appelons k le module de la fonction $\lambda(z, \omega, \omega')$, lequel est donné par la formule (29) de ce même numéro. Nous pouvons inversement regarder q comme une fonction de k; alors ω est une fonction de k, et les fonctions $\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$ sont des fonctions des deux variables indépendantes z et k. Les quantités ω et ω' sont aussi déterminées par les intégrales définies (3) et (5) du n° **221**, où l'on fait $g = 1$, et elles satisfont aux relations (33) et (34) du n° **279**. A l'aide de ces relations, nous avons opéré le changement de variable au n° **289**; l'équation (2) devient ainsi

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2n(k^2 - \mathrm{H}) z \frac{\partial u}{\partial z} + 2nkk'^2 \frac{\partial u}{\partial k} = 0.$$

Désignons par $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, soit les quatre fonctions

$$(4)\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{\theta(0, \omega)},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{\theta'_1(0, \omega)},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{\theta_2(0, \omega)},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{\theta_3(0, \omega)},$$

soit les quatre fonctions

$$(5)\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta(0, \omega')},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_1\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta'_1(0, \omega')},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_2\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_2(0, \omega')},\quad e^{-\frac{n\mathrm{H}z^2}{2}}\frac{\theta_3\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta_3(0, \omega')};$$

ces fonctions φ joueront le même rôle que les fonctions $\mathrm{Al}(z)$; en répétant le calcul du n° 290, on trouve qu'elles satisfont aux équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2nk^2z\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial\varphi}{\partial k} + n^2k^2z^2\varphi = 0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + 2nk^2z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} + (nk'^2 + n^2k^2z^2)\varphi_1 = 0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} + 2nk^2z\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial k} + (n + n^2k^2z^2)\varphi_2 = 0,\\
&\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2} + 2nk^2z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial\varphi_3}{\partial k} + (nk^2 + n^2k^2z^2)\varphi_3 = 0,
\end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, les quatre fonctions

$$(7)\quad \mathrm{U} = \varphi(z),\quad \mathrm{U}_1 = \sqrt{k}\,\varphi_1(z),\quad \mathrm{U}_2 = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\varphi_2(z),\quad \mathrm{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{k'}}\varphi_3(z)$$

vérifient la même équation différentielle

$$(8)\quad \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z^2} + 2nk^2z\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z} + 2nkk'^2\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial k} + n^2k^2z^2\mathrm{U} = 0.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (27) du n° 339 qu'en ce que n^2 est remplacé par n. Il en résulte que les quatre fonctions

$$(9)\quad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad \mathrm{V}_1 = \frac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad \mathrm{V}_2 = \frac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{Al}^n(z)},\quad \mathrm{V}_3 = \frac{\mathrm{U}_3}{\mathrm{Al}^n(z)}$$

satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$(10)\quad (1-2\alpha x^2+x^4)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2(n-1)(\alpha x-x^3)\frac{\partial V}{\partial x}+4n(1-\alpha^2)\frac{\partial V}{\partial \alpha}+n(n-1)x^2 V=0,$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{1-2k^2}{kk'}y^2-y^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(n-1)\left(\frac{1-2k^2}{kk'}y+2y^3\right)\frac{\partial V}{\partial y}\\&\qquad+2nk'\frac{\partial V}{\partial k}+n(n-1)\left(\frac{k}{k'}-y^2\right)V=0,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{2-k^2}{k'}t^2+t^4\right)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(n-1)\left(\frac{2-k^2}{k'}t-2t^3\right)\frac{\partial V}{\partial t}\\&\qquad-2nkk'\frac{\partial V}{\partial k}-n(n-1)\left(\frac{1}{k'}-t^2\right)V=0,\end{aligned}\right.$$

que l'on déduit des équations (34), (36) et (38) des n^{os} **340** et **341**, en remplaçant n^2 par n.

371. Ces quatre fonctions V ont pour expressions, à l'aide des θ,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&V=\frac{\theta\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\quad V_1=\frac{\theta_1\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\\&V_2=\frac{\theta_2\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\quad V_3=\frac{\theta_3\left(z,\frac{\omega}{n}\right)\theta^{n-1}(0)}{\theta^n(z)},\end{aligned}\right.$$

s'il s'agit de la division de la première période, et des expressions toutes pareilles s'il s'agit de la seconde période.

Lorsque n est impair, on a, d'après les formules (3) du n° **349**, et en vertu des relations du n° **205**,

$$(14)\quad V=\sqrt{\frac{g_1k'_1}{nk'}}\,\mathfrak{P},\quad V_1=\sqrt{\frac{g_1^3k_1k'_1}{nkk'}}\,\mathfrak{P}_1 x,\quad V_2=\sqrt{\frac{g_1k_1}{nk}}\,\mathfrak{P}_2 y,\quad V_3=\sqrt{\frac{g_1}{n}}\,\mathfrak{P}_3 t.$$

On a aussi

$$V\left(z+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{t^n}V_3(z),\quad V\left(z+\frac{\omega'}{2}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{x^n}V_1(z),\quad V\left(z+\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{1}{y^n}V_2(z),$$

et, par suite,

$$(15)\quad V_1(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n V\left(\frac{1}{x}\right), \quad V_2(y) = y^n V\left(\frac{-i}{y}\right), \quad V_3(t) = t^n V\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour avoir les quatre polynômes $\mathfrak{P}$, il suffira donc de calculer le polynôme $V(x)$, qui est pair et du degré $n-1$. Si l'on pose $V = \Sigma a^{(m)} x^{2m}$, l'équation différentielle (10) donne une relation linéaire

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{l} (2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 4m(n-2m)\alpha a^{(m)} + 4n(1-\alpha^2)\dfrac{da^{(m)}}{d\alpha} \\ \qquad\qquad + (n-2m+1)(n-2m+2)a^{(m-1)} = 0 \end{array} \right.$$

entre trois coefficients consécutifs. Le premier coefficient est $a^{(0)} = \sqrt{\frac{g_1 k'_1}{nk'}}$, le dernier $a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{g_1^3 k' k'_1}{nkk'}}$.

L'équation (35) du n° 279, qui peut être mise sous la forme

$$\omega^2 d\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{2\pi i}{kk'^2} dk,$$

a été établie en supposant le multiplicateur égal à l'unité; si le multiplicateur est égal à g, cette équation devient

$$g^2\omega^2 d\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{2\pi i}{kk'^2} dk.$$

En y remplaçant ω par $\frac{\omega}{n}$, on a

$$g_1^2 \omega^2 \frac{d\omega'}{d\omega} = -\frac{2n\pi i}{k_1 k_1'^2} dk_1,$$

d'où l'on déduit

$$(17)\quad g_1^2 = \frac{nkk'^2}{k_1 k_1'^2} \frac{dk_1}{dk}.$$

Pour effectuer le calcul des polynômes $\mathfrak{P}$ par cette méthode, il faudra se servir de l'équation algébrique qui existe entre les modules k et k_1, équation dont il sera question plus tard.

CHAPITRE V.

DIVISION DE L'ARGUMENT DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

372. C'est la question inverse de celle qui a été traitée dans l'avant-dernier Chapitre. Nous avons trouvé les expressions de $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$ en fonction de $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$. Proposons-nous maintenant, connaissant l'une des quantités $\lambda(nz)$, $\mu(nz)$, $\nu(nz)$, de trouver $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$. Quand on donne $\mu(nz)$ ou $\nu(nz)$ et que l'on cherche $\mu(z)$ ou $\nu(z)$, l'équation est du degré n^2; si n est pair, elle s'abaisse au degré moitié; mais, quand on donne $\lambda(nz)$ et que l'on cherche $\lambda(z)$, l'équation est du degré n^2 si n est impair, du degré $2n^2$ si n est pair; dans ce dernier cas, l'équation, ne contenant que des puissances paires de l'inconnue, s'abaisse au degré n^2.

Lorsque la quantité donnée est prise arbitrairement, les racines de l'équation sont toutes différentes. Supposons que, n étant impair, on donne $y = \lambda(nz)$ et que l'on cherche $x = \lambda(z)$; l'inconnue est donnée par une équation du degré n^2

$$(1) \qquad yP - xP_1 = 0,$$

dans laquelle P et P_1 désignent des polynômes entiers pairs en x du degré $n^2 - 1$, et que l'on sait former, par un calcul de proche en proche, d'après la méthode d'Abel (n° 338), ou, directement, par celle de Jacobi (n° 342). A une valeur de y correspondent les valeurs de nz,

$$nz + 2p\omega + q\omega', \quad n\omega - nz + 2p\omega + q\omega',$$

et, par conséquent, les valeurs de x,

$$\lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right), \quad \lambda\left(\omega - z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

p et q étant deux nombres entiers quelconques; mais les valeurs de x données par cette dernière formule sont égales à celles que fournit la première; on en conclut que les n^2 racines de l'équation sont représentées par la formule

$$(2) \qquad x = \lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

dans laquelle chacun des deux nombres p et q reçoit n valeurs entières consécutives. Nous leur attribuerons les valeurs $-\frac{n-1}{2}, \ldots,$ $-1, 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

Pour que deux valeurs de x soient égales, il faut que la somme de leurs arguments $2z + 2(p+p')\frac{\omega}{n} + (q+q')\frac{\omega'}{n}$ soit de la forme $(2m+1)\omega + m'\omega'$, ce qui exige que nz soit de la forme $(2m_1+1)\frac{\omega}{2} + m'_1\frac{\omega'}{2}$ et, par conséquent, que y soit égal à ± 1 ou à $\pm\frac{1}{k}$.

Pour voir ce que deviennent les racines, nous distinguerons deux cas, suivant que le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ est pair ou impair. Dans le premier cas, lorsque $y = 1$, l'une des valeurs de nz est

$$\frac{\omega}{2} + \frac{n-1}{2}\omega = \frac{n\omega}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\omega}{2},$$

et, par suite,

$$x = \lambda\left(\frac{\omega}{2} + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right);$$

la combinaison $p = 0$, $q = 0$ donne la racine simple $x = 1$; deux valeurs égales et de signes contraires de la quantité $2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$ donnant la même valeur de x, toutes les autres racines sont doubles : on en conclut que le polynôme $P - xP_1$ est égal au produit de $1 - x$ par un polynôme carré parfait. Lorsque $y = \frac{1}{k}$, l'une des valeurs de nz est de la forme

$$\frac{\omega+\omega'}{2} + \frac{n-1}{2}(\omega+\omega') = \frac{n(\omega+\omega')}{2}, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\omega+\omega'}{2},$$

et, par suite,

$$x = \lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2} + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right);$$

la combinaison $p=0$, $q=0$ donne la racine simple $x=\frac{1}{k}$; toutes les autres racines sont doubles : on en conclut que le polynôme $P - kxP_1$ est égal au produit de $1-kx$ par un polynôme carré parfait. Nous remarquons que si, dans l'équation (1), on remplace y par $-y$, les racines de la seconde équation sont égales à celles de la première et de signes contraires. Les cas où la quantité donnée y est égale à -1 ou à $-\frac{1}{k}$ se ramènent ainsi aux précédents. Il en résulte que les deux polynômes pairs P et P_1 satisfont aux deux identités

$$(3)\qquad P - xP_1 = (1-x)G_1^2,\quad P - kxP_1 = (1-kx)H_1^2,$$

G_1 et H_1 étant des polynômes entiers en x du degré $\frac{n^2-1}{2}$, et à celles qu'on en déduit en remplaçant x par $-x$.

Lorsque le nombre $\frac{n-1}{2}$ est impair, on a les deux identités

$$(3')\qquad P - xP_1 = (1+x)G_1^2,\quad P - kxP_1 = (1+kx)H_1^2.$$

La considération des équations qui donnent $\mu(z)$ ou $\nu(z)$, quand on connaît $\mu(nz)$ ou $\nu(nz)$, conduit à des résultats analogues. La première admet des racines égales, lorsque la quantité donnée $\mu(nz)$ est égale à ± 1 ou à $\pm\frac{ik'}{k}$, la seconde, lorsque la quantité donnée $\nu(nz)$ est égale à ± 1 ou à $\pm k'$. On en déduit les identités

$$(4)\qquad P - \mu P_2 = (1-\mu)G_2^2,\quad k'P - ik\mu P_2 = (k' - ik\mu)H_2^2,$$

$$(5)\qquad P - \nu P_3 = (1-\nu)G_3^2,\quad k'P - \nu P_3 = (k'-\nu)H_3^2,$$

quel que soit le nombre impair n. D'après une remarque faite au n° 338, les secondes des relations (3) et (3′) se déduisent des premières, et les relations (5) des relations (4), en remplaçant k par $\frac{1}{k}$ et z par kz.

Division par deux.

373. Connaissant $X = \sqrt{k}\lambda(2z)$, cherchons $x = \sqrt{k}\lambda(z)$. La formule

$$\lambda(2z) = \frac{2\lambda(z)\mu(z)\nu(z)}{1 - k^2\lambda^4(z)}$$

conduit à l'équation du huitième degré

$$X^2(1 - x^4)^2 - 4x^2(1 - 2\alpha x^2 + x^4) = 0;$$

c'est une équation réciproque

$$X^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4(X^2 - 2\alpha) = 0,$$

que l'on peut résoudre par des racines carrées. On en tire

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2(1 + \sqrt{1 - 2\alpha X^2 + X^4})}{X^2} = \frac{2(1 + \Delta X)}{X^2},$$

$$x^2 = \frac{1 + \Delta X + \sqrt{2(1 - \alpha X^2 + \Delta X)}}{X^2} = \frac{(1 + \sqrt{1 - kX^2})\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k}X^2}\right)}{X^2},$$

$$x = \sqrt{k\,\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k}X^2}}{1 - \sqrt{1 - kX^2}}};$$

les trois radicaux étant indépendants les uns des autres, cette formule donne huit valeurs différentes.

Il est facile de reconnaître *a priori* que les racines sont réciproques deux à deux; car elles sont représentées par les deux formules

$$x = \sqrt{k}\lambda\left(z + p\omega + q\frac{\omega'}{2}\right), \quad x = \sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2} - z + p\omega + q\frac{\omega'}{2}\right),$$

dont la première donne les quatre valeurs $\pm\sqrt{k}\lambda(z)$, $\pm\sqrt{k}\lambda\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$,

réciproques deux à deux, la seconde les quatre valeurs $\pm\sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2}-z\right)$, $\pm\sqrt{k}\lambda\left(\frac{\omega}{2}-z+\frac{\omega'}{2}\right)$, qui sont aussi réciproques deux à deux.

Résolution de l'équation d'où dépend la division de l'argument par un nombre impair.

374. On effectuera la division de l'argument par un nombre impair quelconque, en le divisant successivement par les facteurs premiers de ce nombre. Nous venons d'effectuer la division par deux; il nous reste à voir comment s'opère la division par un nombre premier plus grand que deux. Nous supposerons plus généralement que le diviseur n est un nombre impair quelconque. Abel a démontré que l'on peut exprimer algébriquement les racines de l'équation (1), qui est du degré n^2, au moyen des quantités k et y, qui entrent dans cette équation, des racines de l'équation binôme $x^n=1$, et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

Nous ferons d'abord remarquer que, quand n est impair, les quantités $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et du module k, quel que soit le nombre entier p. Il résulte, en effet, des formules (14) du n° 332 et du calcul des polynômes P par la méthode d'Abel (n° 338), que ces quantités sont des fonctions rationnelles de k^2 et de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Mais la deuxième de ces formules (14) indique que la quantité $\mu\left(n\frac{\omega}{n}\right)$, c'est-à-dire -1, est égale au produit de $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$; on en déduit l'expression de $\mu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. La troisième donne pareillement l'expression de $\nu\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Ainsi les quantités $\mu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}\right)$ sont des fonctions rationnelles de k^2 et de $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$; la quantité $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}\right)$

est égale au produit de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$ par une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$.

On verrait, de la même manière, que les quantités $\lambda\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(q\frac{\omega'}{n}\right)$ s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et de $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$, quel que soit le nombre entier q.

Les formules (1) du n° 318, relatives à l'addition des arguments, montrent ensuite que les trois quantités $\lambda\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\mu\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$, $\nu\left(p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$ s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

375. Soient α et β deux racines, différentes ou non, de l'équation binôme $x^n=1$. Considérons l'expression

$$\begin{array}{llll}
\lambda(z) & +\alpha\lambda\left(z+\frac{2\omega}{n}\right)+ & \ldots+\alpha^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}\right] \\
+\beta\lambda\left(z+\frac{\omega'}{n}\right) & +\alpha\beta\lambda\left(z+\frac{2\omega}{n}+\frac{\omega'}{n}\right)+ & \ldots+\alpha^{n-1}\beta\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}+\frac{\omega'}{n}\right] \\
+\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
+\beta^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right] & +\alpha\beta^{n-1}\lambda\left[z+\frac{2\omega}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right]+ & \ldots+\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\lambda\left[z+(n-1)\frac{2\omega}{n}+(n-1)\frac{\omega'}{n}\right],
\end{array}$$

que nous représenterons par

$$(6)\qquad \mathrm{R}(z,\alpha,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p\beta^q\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right).$$

Remarquons d'abord que cette expression conserve la même valeur, quand p et q désignent n nombres entiers consécutifs quelconques; car, lorsqu'on augmente p d'une unité, les termes d'une même ligne horizontale se permutent circulairement; de même, lorsqu'on augmente q d'une unité, les termes d'une même colonne verticale se permutent circulairement.

Remplacer z par $z+\frac{2\omega}{n}$ et multiplier tous les termes par α revient à augmenter p d'une unité; de même, remplacer z par $z+\frac{\omega'}{n}$ et multiplier tous les termes par β revient à augmenter q d'une unité; on a donc

$$\mathrm{R}\left(z+\frac{2\omega}{n}\right)=\alpha^{-1}\mathrm{R}(z), \quad \mathrm{R}\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=\beta^{-1}\mathrm{R}(z).$$

Comme on a d'ailleurs $\mathrm{R}(z+\omega)=-\mathrm{R}(z)$, on en déduit

$$\mathrm{R}\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=\mathrm{R}\left(z+\omega-\frac{n-1}{2}\frac{2\omega}{n}\right)=-\mathrm{R}\left(z-\frac{n-1}{2}\frac{2\omega}{n}\right),$$

et par suite

$$\mathrm{R}\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-\alpha^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{R}(z).$$

Les valeurs de z qui rendent infinie la fonction $\mathrm{R}(z)$ sont celles qui rendent infini l'un de ses termes et qui, par conséquent, satisfont à la relation

$$z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}=\frac{\omega'}{2}+p'\omega+q'\omega',$$

d'où

$$nz=\frac{\omega'}{2}+(np'-2p)\omega+\left(nq'-q+\frac{n-1}{2}\right)\omega'.$$

On peut déterminer les deux nombres entiers p et q plus petits que n et les deux nombres entiers p' et q', de manière que les deux coefficients $np'-2p$, $nq'-q+\frac{n-1}{2}$ soient égaux à des nombres entiers quelconques. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que deux termes ne peuvent devenir infinis à la fois. On en conclut que la fonction $\mathrm{R}(z)$ admet les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, chacun au premier degré.

La fonction $\mathrm{R}(z)$ admet les périodes 2ω, ω'; mais la fonction

$$f(z)=[\mathrm{R}(z)]^n, \tag{7}$$

qui satisfait aux relations

$$f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-f(z),\quad f\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=f(z),$$

admet les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$; elle a d'ailleurs les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, aux mêmes périodes, chacun au degré n. En vertu du théorème de M. Liouville (n° 161), elle s'exprime rationnellement à l'aide de la fonction $\lambda(nz)$ et de sa dérivée; comme elle ne devient infinie pour aucune valeur finie de $\lambda(nz)$, le dénominateur est constant, et l'on a

$$(8)\qquad f(z)=\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz),$$

M et N étant des polynômes entiers en $\lambda(nz)$; à cause de la relation $f\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-f(z)$, le polynôme M est impair et du degré n, le polynôme N pair et du degré $n-3$ au plus. On en déduit

$$(9)\qquad \mathrm{R}(z,\alpha,\beta)=\sum_{q=0}^{q=n-1}\sum_{p=0}^{p=n-1}\alpha^p\beta^q\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)=\sqrt[n]{\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)}.$$

A chaque combinaison de deux racines α et β, différentes ou non, de l'équation binôme $x^n=1$, correspond une équation analogue à la précédente. Remarquons que, d'après la formule (19) du n° 355, l'équation qui se rapporte à la combinaison $\alpha=\beta=1$ a son second membre égal à $n\lambda(nz)$. Si l'on ajoute ces n^2 équations membre à membre, chacun des termes $\lambda\left(z+p\frac{2\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n}\right)$ du premier membre, dans l'équation résultante, aura son coefficient nul, à l'exception du terme $\lambda(z)$, dont le coefficient sera égal à n^2, et l'on obtiendra la formule

$$(10)\qquad \lambda(z)=\frac{1}{n}\lambda(nz)+\frac{1}{n^2}\sum\sqrt[n]{\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)},$$

qui renferme n^2-1 radicaux.

376. Voici comment on peut calculer ces deux polynômes M et N.

Si l'on développe chacun des termes de la fonction $R(z)$ par la formule

$$\lambda(z+a) = \frac{\lambda'(a)\lambda(z) + \lambda(a)\lambda'(z)}{1 - k^2\lambda^2(a)\lambda^2(z)},$$

le multiplicateur g étant supposé égal à l'unité, la fonction $R(z)$ se composera de deux parties, l'une égale à une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, l'autre égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Il en sera de même de la fonction $f(z)$ ou $[R(z)]^n$. Si l'on prend la dérivée de l'expression de $\lambda(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$ (n° 332), la valeur de $\lambda'(nz)$ sera égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; on en déduit la valeur de $\lambda'(z)$ égale au produit de $\lambda'(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; la seconde partie deviendra ainsi égale au produit de $\lambda'(nz)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, et l'on aura

$$f(z) = \frac{A + B\lambda'(nz)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda(z)$.

La fonction $f(z)$ ne changeant pas quand on remplace z par $z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$, les fractions rationnelles $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ ne changent pas quand on y remplace $\lambda(z)$ par l'une quelconque des valeurs de x données par la formule (2), c'est-à-dire par l'une quelconque des racines de l'équation (1). On prendra, pour chacune de ces fractions, la moyenne arithmétique de ses valeurs, lorsqu'on y remplace $\lambda(z)$ successivement par les n^2 racines de l'équation (1); cette moyenne arithmétique, étant une fonction symétrique des racines, s'exprimera rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation (1) et, par conséquent, à l'aide de k^2 de la quantité donnée $y = \lambda(nz)$. On arrivera ainsi à la forme (8).

L'expression trouvée de la sorte renferme, en outre, rationnellement les constantes $\lambda(a)$, $\mu(a)$, $\nu(a)$, a désignant les diverses quantités $2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}$; mais ces constantes, d'après la remarque faite au n° 374, s'expriment rationnellement à l'aide de k^2 et des deux quantités $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$. On en conclut que les deux polynômes M et N, entiers par

rapport à $\lambda(nz)$, renferment, en outre, rationnellement les trois constantes k^2, $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$.

377. La formule (10), qui donne les valeurs de l'inconnue, renferme $n^2 - 1$ radicaux; mais on peut les ramener à deux d'entre eux. Si l'on suppose que α et β soient deux racines primitives de l'équation binôme $x^n = 1$, deux racines quelconques de cette équation pourront être représentées par α^r et β^s, r et s étant deux nombres entiers variant de o à $n - 1$. La fonction

$$(11) \qquad F(z) = [R(z, \alpha, 1)]^{n-r}[R(z, 1, \beta)]^{n-s}R(z, \alpha^r, \beta^s),$$

qui satisfait aux relations

$$F\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^{r+s-1}F(z), \quad F\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = F(z),$$

admet, dans tous les cas, les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'}{n}$; elle a les mêmes infinis que la fonction $\lambda(nz)$, aux mêmes périodes, chacun au degré $2n - r - s + 1$; on a donc

$$(12) \qquad F(z) = P + Q\lambda'(nz),$$

P et Q étant des polynômes entiers en $\lambda(nz)$. Quand le nombre $r + s$ est pair, le premier polynôme est impair, le second pair. Quand $r + s$ est impair, le premier est pair, le second impair. Le premier polynôme est donc du degré $2n - r - s + 1$, le second du degré $2n - r - s - 2$ au plus. On les calculera comme on a calculé les polynômes M et N dans le numéro précédent.

Des équations (11) et (12) on déduit

$$(13) \qquad R(z, \alpha^r, \beta^s) = \frac{P + Q\lambda'(nz)}{[R(z, \alpha, 1)]^n[R(z, 1, \beta)]^n}[R(z, \alpha, 1)]^r[R(z, 1, \beta)]^s.$$

Le premier facteur du second membre est une fraction rationnelle en $\lambda(nz)$ et $\lambda'(nz)$; de cette manière, tous les radicaux se ramènent aux

deux seuls radicaux $R(z, \alpha, 1)$, $R(z, 1, \beta)$, et la formule (10), après la substitution, ne donne plus que les n^2 valeurs de l'inconnue.

378. La fonction résolvante d'Abel se met sous la forme

$$R(z, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\sum \alpha^p \beta^q \frac{\theta_1\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z + 2p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

Nous supposerons maintenant que l'on attribue à chacune des lettres p et q les n valeurs consécutives $-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, +1, \dots, \frac{n-1}{2}$. Considérons le produit des dénominateurs; les nombres $2p$ donnant pour résidus par rapport à n les n nombres consécutifs $-\frac{n-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, et la fonction θ ne changeant pas quand l'argument augmente ou diminue de ω, ce produit est égal à

$$\prod \theta\left(z + p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right);$$

c'est la fonction $\theta(nz)$, multipliée par un facteur constant (n° 331). Nous pouvons représenter deux racines quelconques de l'équation binôme $x^n = 1$ par $\alpha = e^{\frac{4a\pi i}{n}}$, $\beta = e^{\frac{-2b\pi i}{n}}$, a et b étant deux nombres entiers. La fonction holomorphe

$$\Phi(z) = R(z, \alpha, \beta)\theta(nz)$$

satisfait aux relations

$$\Phi\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -e^{-\frac{2a\pi i}{n}}\Phi(z), \quad \Phi\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2nz + \omega' - 2b\frac{\omega}{n}\right)}\Phi(z).$$

La fonction holomorphe

$$\Psi(z) = e^{\frac{2a\pi z i}{\omega}}\Phi\left(z + b\frac{\omega}{n^2} + a\frac{\omega'}{n^2}\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\Psi\left(z+\frac{\omega}{n}\right)=-\Psi(z),\quad \Psi\left(z+\frac{\omega'}{n}\right)=-e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2nz+\omega')}\Psi(z),$$

est égale à la fonction $\theta_1(nz)$, multipliée par un facteur constant (n° 150). On en déduit

$$\Phi(z)=\mathrm{A}e^{-\frac{2a\pi zi}{\omega}}\theta_1\left(nz-b\frac{\omega}{n}-a\frac{\omega'}{n}\right),$$

et, par suite,

$$(14)\qquad \mathrm{R}(z,\alpha,\beta)=\mathrm{A}\frac{e^{-\frac{2a\pi zi}{\omega}}\theta_1\left(nz-b\frac{\omega}{n}-a\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta(nz)}.$$

On connaît ainsi les zéros de la fonction doublement périodique $\mathrm{R}(z)$, aux périodes 2ω, ω'; ils sont donnés par la formule

$$(15)\qquad z=b\frac{\omega}{n^2}+a\frac{\omega'}{n^2}+p\frac{\omega}{n}+q\frac{\omega'}{n},$$

dans laquelle a et b sont deux nombres entiers constants, caractérisant les deux racines α et β de l'équation binôme $x^n=1$, p et q deux nombres entiers arbitraires. On déterminera la constante A en faisant $z=\frac{\omega'}{2}$; on trouve

$$\mathrm{A}=(-1)^b\frac{n}{k}\frac{\theta'_1(0)}{\theta\left(b\frac{\omega}{n}+a\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

379. Considérons maintenant la résolvante $\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})$; d'après la formule (6), on a

$$\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})=-\mathrm{R}(-z,\alpha,\beta);$$

les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathrm{R}(z,\alpha,\beta)$, $\mathrm{R}(z,\alpha^{-1},\beta^{-1})$ sont donc des quantités conjuguées $\mathrm{M}+\mathrm{N}\lambda'(nz)$, $\mathrm{M}-\mathrm{N}\lambda'(nz)$. Pour avoir l'expression de la seconde résolvante, il suffit de changer les signes des nombres entiers a et b dans la formule (14); la constante A

ne change pas; on en déduit

$$R(z,\alpha,\beta)\,R(z,\alpha^{-1},\beta^{-1}) = A^2\,\frac{\theta_1\left(nz - b\frac{\omega}{n} - a\frac{\omega'}{n}\right)\theta_1\left(nz + b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta^2(nz)},$$

et, par suite, en vertu de la seconde des relations (7) du n° 329,

$$(16)\qquad R(z,\alpha,\beta)\,R(z,\alpha^{-1},\beta^{-1}) = n^2\left[\lambda^2(nz) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)\right].$$

Les radicaux conjugués se ramènent ainsi l'un à l'autre.

En élevant les deux membres de l'équation (16) à la $n^{ième}$ puissance, on obtient la relation

$$M^2 - N^2\lambda'^2(nz) = n^{2n}\left[\lambda^2(nz) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)\right]^n.$$

Si l'on pose $M = n^n M_1$, $N = n^n N_1$, $\rho = \lambda\left(b\frac{\omega}{n} + a\frac{\omega'}{n}\right)$, cette relation devient

$$(17)\qquad M_1^2 - N_1^2(1-y^2)(1-k^2y^2) = (y^2-\rho^2)^n.$$

Elle peut faciliter le calcul des polynômes M_1 et N_1 en y: le premier, qui est impair et du degré n, renferme $\frac{n+1}{2}$ coefficients; le second, qui est pair et du degré $n-3$, en renferme $\frac{n-1}{2}$, ce qui, avec ρ, fait $n+1$ inconnues. L'identification des deux membres donne $n+1$ équations entre ces inconnues. Mais la constante ρ est l'une des racines x, autre que zéro, de l'équation (1), dans laquelle on fait $y=0$. Comme à chaque valeur de ρ^2 correspond un couple de polynômes M_1 et N_1, les coefficients pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de ρ^2, en tenant compte de l'équation qui détermine cette quantité. On retrouverait d'ailleurs cette équation en éliminant les n coefficients des polynômes M_1 et N_1 entre les $n+1$ équations provenant de l'identification.

Multiplication de la première période par un nombre impair.

380. Dans le Chapitre précédent, nous avons trouvé les expressions de $\lambda\left(z,\frac{\omega}{n},\omega'\right)$ et de $\lambda\left(z,\omega,\frac{\omega'}{n}\right)$ en fonction de $\lambda(z,\omega,\omega')$. Il s'agit

maintenant, connaissant $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ ou $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, de trouver $\lambda(z, \omega, \omega')$.

Proposons-nous d'abord, connaissant $y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, de trouver $x = \lambda(z, \omega, \omega')$; on a l'équation du $n^{ième}$ degré (n° 349)

$$(18) \qquad y\mathfrak{P} - \frac{g_1}{g} x\mathfrak{P}_1 = 0.$$

Les n valeurs de l'inconnue sont comprises dans la formule

$$(19) \qquad x = \lambda\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right),$$

dans laquelle p reçoit n valeurs entières consécutives.

On voit, comme au n° 372, que l'équation a des racines égales lorsque la quantité donnée y est égale à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{k_1}$. Quand le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ est pair, si $y = 1$, l'équation admet la racine simple $x = 1$, et toutes les autres racines sont doubles; si $y = \frac{1}{k_1}$, elle admet la racine $x = \frac{1}{k}$, et toutes les autres racines sont encore doubles. On en conclut que les polynômes pairs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ satisfont aux deux identités

$$(20) \qquad \mathfrak{P} - \frac{g_1}{g} x\mathfrak{P}_1 = (1 - x)G^2, \quad \mathfrak{P} - \frac{g_1}{g} k_1 x\mathfrak{P}_1 = (1 - kx)H^2,$$

G et H étant des polynômes entiers du degré $\frac{n-1}{2}$, et à celles qu'on en déduit en remplaçant x par $-x$. Quand le nombre $\frac{n-1}{2}$ est impair, on a les deux identités

$$(20') \qquad \mathfrak{P} - \frac{g_1}{g} x\mathfrak{P}_1 = (1 + x)G^2, \quad \mathfrak{P} - \frac{g_1}{g} k_1 x\mathfrak{P}_1 = (1 + kx)H^2.$$

Pour résoudre l'équation (18), nous nous servirons de la fonction

$$(21) \qquad \mathfrak{R}(z, \alpha) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p \lambda\left(z + p\frac{2\omega}{n}\right),$$

qui, comme la fonction $R(z, \alpha, \beta)$, satisfait aux relations

$$\mathcal{R}\left(z + \frac{2\omega}{n}\right) = \alpha^{-1}\mathcal{R}(z), \quad \mathcal{R}(z+\omega) = -\mathcal{R}(z), \quad \mathcal{R}\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -\alpha^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{R}(z).$$

Cette fonction admet les deux périodes 2ω, ω'; mais la fonction

$$f(z) = [\mathcal{R}(z)]^n,$$

qui satisfait aux relations

$$f\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -f(z), \quad f(z+\omega') = f(z),$$

admet les périodes $\frac{2\omega}{n}$, ω'; elle a d'ailleurs les mêmes infinis que la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, aux mêmes périodes, chacun au degré n. On a donc

$$(22) \qquad f(z) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, le premier impair et du degré n, le second pair et du degré $n - 3$ au plus. On en déduit

$$(23) \qquad \mathcal{R}(z, \alpha) = \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p \lambda\left(z + p\frac{2\omega}{n}\right) = \sqrt[n]{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

A chaque racine α de l'équation binôme $x^n = 1$ correspond une équation analogue à la précédente. D'après la formule (18) du n° 354, l'équation qui se rapporte à la racine $\alpha = 1$ a pour second membre $\frac{g_1 k_1}{gk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$. Si l'on ajoute membre à membre ces n équations, chacun des termes $\lambda\left(z + p\frac{2\omega}{n}\right)$, dans le premier membre de l'équation résultante, aura son coefficient nul, excepté le terme $\lambda(z)$, dont le coefficient sera égal à n, et l'on obtiendra la formule

$$(24) \qquad \lambda(z, \omega, \omega') = \frac{g_1 k_1}{ngk}\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) + \frac{1}{n}\sum \sqrt[n]{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)},$$

qui renferme $n - 1$ radicaux.

La méthode suivie au n° 376 permet de calculer les polynômes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. Si l'on développe chaque terme, la fonction $\mathfrak{A}(z)$ se compose de deux parties, l'une égale à une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, l'autre égale au produit de $\lambda'(z)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$. Il en sera de même de la fonction $f(z) = [\mathfrak{A}(z)]^n$. De la dérivée de l'expression de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, on déduit $\lambda'(z)$ égale au produit de $\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$; la seconde partie deviendra ainsi égale au produit de $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ par une fraction rationnelle en $\lambda(z)$, et l'on aura

$$f(z) = \frac{A + B\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{C},$$

A, B, C étant des polynômes entiers en $\lambda(z)$.

La fonction $f(z)$ ne changeant pas quand on remplace z par $z + p\frac{2\omega}{n}$, les fractions rationnelles $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ ne changent pas quand on remplace $\lambda(z)$ par l'une quelconque des valeurs de x données par la formule (19). On prendra, pour chacune de ces fractions, la moyenne arithmétique de ses valeurs quand on y remplace $\lambda(z)$ successivement par les n racines de l'équation (18); cette moyenne arithmétique, étant une fonction symétrique des racines, s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de l'équation et, par conséquent, à l'aide de la quantité donnée $y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$ et des deux constantes k^2 et $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$. On arrive ainsi à la forme (22).

381. On peut ramener à un seul les $n - 1$ radicaux que renferme la formule (24). Désignons par α une racine primitive de l'équation binôme $x^n = 1$ et par α^r une racine quelconque. La fonction

$$F(z) = [\mathfrak{A}(z, \alpha)]^{n-r}\mathfrak{A}(z, \alpha^r), \tag{25}$$

satisfaisant aux relations

$$F\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = (-1)^r F(z), \quad F(z + \omega') = F(z),$$

admet, dans tous les cas, les deux périodes $\frac{2\omega}{n}$, ω'; elle a les mêmes infinis que la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, aux mêmes périodes, chacun au degré $n - r + 1$; on a donc

$$F(z) = P + Q\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right), \tag{26}$$

P et Q étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$. Quand r est pair, le premier polynôme est pair, le second impair; c'est le contraire qui a lieu quand r est impair. Il en résulte que le premier polynôme est du degré $n - r + 1$, le second du degré $n - r - 2$ au plus. On les calculera comme on a calculé les polynômes $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. On déduit de là

$$\mathcal{R}(z, \alpha^r) = \frac{P + Q\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)}{[\mathcal{R}(z, \alpha)]^n}[\mathcal{R}(z, \alpha)]^r. \tag{27}$$

Les $n - 1$ radicaux se ramènent ainsi au radical $\mathcal{R}(z, \alpha)$, et la formule (24), après la substitution, ne donne plus que les n valeurs de l'inconnue.

382. La résolvante peut être mise sous la forme (nº 173)

$$\mathcal{R}(z, \beta) = \frac{1}{i\sqrt{k}} \sum_{p=-\frac{n-1}{2}}^{p=\frac{n-1}{2}} \alpha^p \frac{\vartheta_1\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right)}{\vartheta\left(z + 2p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Concevons que l'on réduise les n fractions au même dénominateur, et prenons pour dénominateur commun la fonction $\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$. Le numérateur, ou la fonction holomorphe

$$\varphi(z) = \mathcal{R}(z, \alpha)\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\varphi(z + \omega') = -\varphi(z), \quad \varphi\left(z + \frac{\omega}{n}\right) = -e^{\frac{\pi i}{\omega'}\left(2z - 2\alpha\frac{\omega'}{n} + \frac{\omega}{n}\right)}\varphi(z),$$

si l'on pose, comme précédemment, $\alpha = e^{\frac{4a\pi i}{n}}$, est égal à la fonction $\vartheta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, multipliée par un facteur constant (n° 150). On a donc

$$(28)\quad \mathfrak{R}(z,\alpha) = \mathcal{A}_1 \frac{\vartheta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\vartheta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)} = \mathcal{A} \frac{e^{-\frac{2a\pi z i}{\omega}}\theta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

On connaît ainsi les zéros de la fonction $\mathfrak{R}(z,\alpha)$; ils sont donnés par la formule $z = a\frac{\omega'}{n} + p\frac{\omega}{n} + q\omega'$. En faisant $z = \frac{\omega'}{2}$, on trouve

$$(29)\quad \mathcal{A}_1 = -\frac{1}{gk}\frac{\vartheta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\vartheta\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{gk}\frac{\theta'_1\left(0, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}.$$

La résolvante $\mathfrak{R}(z,\alpha^{-1})$ étant égale à $-\mathfrak{R}(-z,\alpha)$, les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathfrak{R}(z,\alpha)$, $\mathfrak{R}(z,\alpha^{-1})$ sont des quantités conjuguées $\mathfrak{M} + \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$, $\mathfrak{M} - \frac{1}{g_1}\mathfrak{N}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$. Pour avoir l'expression de la seconde résolvante, il suffit de changer le signe du nombre entier a dans la formule (28); on en déduit

$$\mathfrak{R}(z,\alpha)\mathfrak{R}(z,\alpha^{-1}) = \mathcal{A}^2 \frac{\theta_1\left(z - a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\theta_1\left(z + a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{\theta^2\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)},$$

et par suite (n° 329)

$$(30)\quad \mathfrak{R}(z,\alpha)\mathfrak{R}(z,\alpha^{-1}) = \left(\frac{g_1k_1}{gk}\right)^2\left[\lambda^2\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) - \lambda^2\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\right].$$

Les radicaux conjugués se ramènent ainsi l'un à l'autre.

Si l'on pose $\mathfrak{M} = \left(\frac{g_1k_1}{gk}\right)^n\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N} = \left(\frac{g_1k_1}{gk}\right)^n\mathfrak{N}_1$, $\rho_1 = \lambda\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, en élevant les deux membres de l'équation précédente à la $n^{\text{ième}}$ puis-

sance, on obtient la relation

$$(31)\qquad \mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{N}_1^2(1-y^2)(1-k_1^2y^2) = (y^2-\rho_1^2)^n,$$

qui a la même forme que la relation (17), et qui pourra servir dans le calcul des coefficients des polynômes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$, à l'aide de la constante ρ_1, que l'on regardera comme connue; à chaque valeur de ρ_1 correspond un couple de polynômes.

Multiplication de la seconde période par un nombre impair.

383. Le même raisonnement s'applique à la multiplication de la seconde période. En désignant par y la quantité donnée $\lambda\left(z, \omega, \dfrac{\omega'}{n}\right)$ et par x l'inconnue $\lambda(z, \omega, \omega')$, on a l'équation du $n^{ième}$ degré (n° 351)

$$(32)\qquad y\,\mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,x\,\mathfrak{P}'_1 = 0.$$

Les valeurs de l'inconnue sont comprises dans la formule

$$x = \lambda\left(z + q\,\frac{\omega'}{n}\right).$$

L'équation a des racines égales lorsque la quantité donnée y est égale à ± 1 ou à $\pm\dfrac{1}{k_2}$; quand $y = 1$, elle admet la racine simple $x = 1$ et toutes les autres racines sont doubles; quand $y = \dfrac{1}{k_2}$, elle admet la racine simple $x = \dfrac{1}{k}$ et toutes les autres racines sont encore doubles. On en conclut que les polynômes $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}'_1$ satisfont, quel que soit le nombre impair n, aux deux identités

$$(33)\qquad \mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,x\,\mathfrak{P}'_1 = (1-x)\,G^2, \quad \mathfrak{P}' - \frac{g_2}{g}\,k_2 x\,\mathfrak{P}'_1 = (1-kx)\,H^2,$$

G et H étant des polynômes entiers en x du degré $\dfrac{n-1}{2}$.

On résoudra l'équation (32) à l'aide de la fonction

$$(34) \qquad \mathfrak{R}(z, \beta) = \sum_{q=0}^{q=n-1} \beta^q \lambda\left(z + q\frac{\omega'}{n}\right),$$

qui satisfait aux relations

$$\mathfrak{R}(z + \omega) = -\mathfrak{R}(z), \quad \mathfrak{R}\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = \beta^{-1}\mathfrak{R}(z).$$

La fonction

$$f(z) = [\mathfrak{R}(z)]^n,$$

qui satisfait aux relations

$$f(z + \omega) = -f(z), \quad f\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = f(z),$$

admet les périodes 2ω, $\frac{\omega'}{n}$, et l'on a

$$(35) \qquad f(z) = \mathfrak{M}' + \frac{1}{g_2}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right),$$

$\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ étant des polynômes entiers en $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, le premier impair et du degré n, le second pair et du degré $n - 3$ au plus. On en déduit

$$(36) \qquad \mathfrak{R}(z, \beta) = \sum_{q=0}^{q=n-1} \beta^q \lambda\left(z + q\frac{\omega'}{n}\right) = \sqrt[n]{\mathfrak{M}' + \frac{1}{g_2}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)},$$

et par suite

$$(37) \qquad \lambda(z, \omega, \omega') = \frac{g_2 k_2}{ngk}\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum\sqrt[n]{\mathfrak{M}' + \frac{1}{g_2}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}.$$

On calculera les polynômes $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ comme les précédents. On peut de même réduire les $n - 1$ radicaux à un seul par la relation

$$(38) \qquad \mathfrak{R}(z, \beta^s) = \frac{P' + \frac{1}{g_2}Q'\lambda'\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)[\mathfrak{R}(z, \beta)]^s}{[\mathfrak{R}(z, \beta)]^n},$$

β étant une racine primitive de l'équation binôme $x^n = 1$.

384. La résolvante peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{R}(z,\beta) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{q=-\frac{n-1}{2}}^{q=\frac{n-1}{2}} \beta^q \frac{\theta_1\left(z + q\frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z + q\frac{\omega'}{n}\right)}.$$

Concevons que l'on réduise les fractions au même dénominateur, et prenons pour dénominateur commun $\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$; le numérateur, ou la fonction holomorphe

$$\varphi(z) = \mathfrak{R}(z,\beta)\,\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right),$$

satisfaisant aux relations

$$\varphi(z+\omega) = -\varphi(z), \quad \varphi\left(z + \frac{\omega'}{n}\right) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}\left(2z - 2b\frac{\omega}{n} + \frac{\omega'}{n}\right)}\varphi(z),$$

si l'on pose $\beta = e^{-\frac{2b\pi i}{n}}$, est égal à la fonction $\theta_1\left(z - b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, multipliée par un facteur constant. On a donc

$$(39) \quad \mathfrak{R}(z,\beta) = \mathfrak{B}\frac{\theta_1\left(z - b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)} = \mathfrak{B}_1 e^{\frac{2b\pi z i}{\omega'}} \frac{\vartheta_1\left(z - b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}{\vartheta\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}.$$

On connaît les zéros $z = b\frac{\omega}{n} + p\omega + q\frac{\omega'}{n}$ de la fonction $\mathfrak{R}(z,\beta)$. En faisant $z = \frac{\omega'}{2n}$, on trouve

$$(40) \quad \mathfrak{B} = (-1)^b \frac{1}{gk} \frac{\theta'_1\left(0, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}{\theta\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}, \quad \mathfrak{B}_1 = -(-1)^b \frac{1}{gk} \frac{\vartheta'_1\left(0, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}{\vartheta\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)}.$$

La résolvante $\mathfrak{R}(z, \beta^{-1})$ étant égale à $-\mathfrak{R}(-z, \beta)$, les $n^{\text{ièmes}}$ puissances des deux résolvantes $\mathfrak{R}(z, \beta)$, $\mathfrak{R}(z, \beta^{-1})$ sont des quantités

conjuguées $\mathfrak{M}' + \frac{1}{g_2}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$, $\mathfrak{M}' - \frac{1}{g_2}\mathfrak{N}'\lambda'\left(z, \frac{\omega'}{n}\right)$. On a d'ailleurs

$$(41)\qquad \mathfrak{R}(z,\beta)\mathfrak{R}(z,\beta^{-1}) = \left(\frac{g_2 k_2}{gk}\right)^2\left[\lambda^2\left(z, \omega, \frac{\omega'}{n}\right) - \lambda^2\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)\right],$$

et les radicaux conjugués se ramènent l'un à l'autre. Si l'on pose

$\mathfrak{M}' = \left(\frac{g_2 k_2}{gk}\right)^n \mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{N}' = \left(\frac{g_2 k_2}{gk}\right)^n \mathfrak{N}'_1$, $\rho_2 = \lambda\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \frac{\omega'}{n}\right)$, on obtient

la relation

$$(42)\qquad \mathfrak{M}'^2_1 - \mathfrak{N}'^2_1(1-y^2)(1-k_2^2 y^2) = (y^2 - \rho_2^2)^n,$$

analogue à la relation (31), et qui pourra servir dans le calcul des coefficients des polynômes $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{N}'$ à l'aide de la constante ρ_2, que l'on regardera comme connue. A chaque valeur de ρ_2 correspond un couple de polynômes.

Les trois relations (17), (31) et (42) ont la même forme; chacune d'elles renferme le module de la fonction donnée; elles diffèrent par la signification de la constante ρ.

385. *Remarque.* — Nous avons traité le problème de la division de l'argument par un nombre impair n, en résolvant une équation du degré n^2. On peut traiter la même question en résolvant successivement deux équations du degré n. On donne $y = \lambda(nz, \omega, \omega') = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right)$; cherchons d'abord $t = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; c'est la multiplication de la seconde période par n (n° 383). On a à résoudre l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\frac{ng}{g_1} t \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1 - \frac{t^2}{\lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)}\right] - y \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[1 - k_1^2 t^2 \lambda^2\left(p\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)\right] = 0.$$

La formule (37) devient

$$(43)\qquad t = \frac{gk}{g_1 k_1}\left(y + \Sigma\sqrt[n]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1\,\Delta y}\right).$$

Les polynômes $\mathfrak{M}'_1$ et $\mathfrak{N}'_1$ en y satisfont à la relation

(44) $$\mathfrak{M}'^2_1 - \mathfrak{N}'^2_1(1-y^2)(1-k^2y^2) = (y^2-\rho_2^2)^n,$$

où $\rho_2 = \lambda\left(b\frac{\omega}{n^2}, \frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \lambda\left(b\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$.

Connaissant $t = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, on cherchera ensuite $x = \lambda(z, \omega, \omega')$; c'est la multiplication de la première période (n° 380). On a à résoudre une seconde équation du $n^{ième}$ degré

$$\frac{g_1}{g} x \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}\right] - t \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[1 - k^2x^2\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)\right] = 0.$$

La formule (24) devient

(45) $$x = \frac{g_1 k_1}{ngk}\left(t + \Sigma\sqrt[n]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t}\right).$$

Les polynômes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ en t satisfont à la relation

(46) $$\mathfrak{M}_1^2 - \mathfrak{N}_1^2(1-t^2)(1-k_1^2t^2) = (t^2-\rho_1^2)^n,$$

où $\rho_1 = \lambda\left(a\frac{\omega'}{n}, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$; cette dernière constante est une fraction rationnelle de $\lambda\left(a\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right)$. D'après les formules du n° 349, les deux constantes k_1 et $\frac{g_1}{g}$ sont des fonctions rationnelles de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Ainsi toutes les constantes qui entrent dans ces calculs s'expriment rationnellement au moyen du module donné k et des deux constantes $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right), \lambda\left(\frac{\omega'}{n}\right)$; ceci est bien d'accord avec ce que nous avons dit au n° 376.

Appliquons cette méthode au cas où $n = 3$. Les deux formules (43) et (45) renferment chacune deux radicaux conjugués, qui se ramènent immédiatement l'un à l'autre, en vertu des relations (30) et (41); on a donc

$$t = \frac{gk}{g_1k_1}\left[y + \sqrt[3]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1\Delta y} + \frac{y^2-\rho_2^2}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{N}'_1\Delta y}}\right],$$

$$x = \frac{g_1k_1}{3gk}\left[t + \sqrt[3]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t} + \frac{t^2-\rho_1^2}{\sqrt[3]{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{N}_1\Delta t}}\right].$$

Le calcul des polynômes n'offre aucune difficulté. L'identification des deux membres de l'équation (44) ou (46) donne

$$\mathfrak{N}'_1 = \rho_2^3, \quad \mathfrak{M}'_1 = y^3 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2(k^2\rho_2^4 - 3)y,$$
$$\mathfrak{N}'_1 = \rho_1^3, \quad \mathfrak{M}'_1 = t^3 + \tfrac{1}{2}\rho_1^2(k_1^2\rho_1^4 - 3)t.$$

On peut supposer $a = b = 1$, d'où $\rho_2 = \lambda\left(\frac{\omega}{3}\right)$, $\rho_1 = \lambda\left(\frac{\omega'}{3}, \frac{\omega}{3}\right)$.

Calcul de $\lambda\left(\frac{\omega}{n}\right)$.

386. Les formules précédentes renferment rationnellement le module k et les constantes $\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)$, $\lambda^2\left(\frac{\omega'}{n}\right)$; ces dernières quantités sont deux des racines de l'équation $P_1 = 0$, à laquelle se réduit l'équation (1), quand on y fait $y = 0$, et qu'après avoir supprimé la solution $x = 0$ on regarde x^2 comme l'inconnue. Nous savons former le polynôme pair P_1 du degré $\frac{n^2-1}{2}$ par rapport à x^2; les coefficients sont des polynômes entiers en k^2, qui ont eux-mêmes pour coefficients des nombres entiers. Nous nous bornerons, dans l'étude de cette équation, au cas où le nombre impair n est premier et nous poserons $n = 2m + 1$. Nous supposerons en outre le multiplicateur g égal à l'unité.

Les racines de l'équation $P_1 = 0$, qui est du degré $m(n+1)$, sont représentées par la formule $x^2 = \lambda^2\left(p\frac{\omega}{n} + q\frac{\omega'}{n}\right)$, dans laquelle p et q désignent deux nombres entiers quelconques. On peut remplacer les nombres p et q par leurs résidus relatifs au diviseur n, et prendre ces résidus positifs ou négatifs, de manière que leurs valeurs absolues soient inférieures ou égales à m; d'ailleurs on peut supposer l'un d'eux positif. Nous obtiendrons donc toutes les racines en combinant avec $q = 0$ les m valeurs positives $1, 2, \ldots, m$ de p, et avec les m valeurs positives $1, 2, \ldots, m$ de q les n valeurs consécutives $0, \pm 1 \pm 2, \ldots, \pm m$ de p. Les m premières racines sont comprises dans la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)$. Les mn suivantes peuvent être représentées par la formule $\lambda^2\left(q\frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$,

dans laquelle t reçoit n valeurs entières consécutives; car les n multiples consécutifs du nombre $2q$ premier avec n donnent pour résidus par rapport à n les n nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$; de cette manière, nous disposerons les $m(n+1)$ racines en $n+1$ suites, comprenant chacune m racines. Les racines de la première suite sont données par la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)$, dans laquelle p varie de 1 à m; celles d'une autre suite par la formule $\lambda^2\left(p\frac{\omega'+2t\omega}{n}\right)$, dans laquelle t est un nombre constant et p varie de 1 à m. Désignons, en général, par ε l'une des $n+1$ quantités $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega'+2t\omega}{n}$; les m racines d'une suite quelconque seront

$$(47) \qquad \lambda^2(\varepsilon),\quad \lambda^2(2\varepsilon),\quad \lambda^2(3\varepsilon),\ldots,\quad \lambda^2(m\varepsilon).$$

Remarquons que, si l'on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier premier avec n, ces m racines se reproduisent dans un autre ordre.

387. Cela posé, appelons ξ une fonction symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47), et concevons que dans cette fonction on remplace les quantités $\lambda^2(2\varepsilon), \lambda^2(3\varepsilon), \ldots, \lambda^2(m\varepsilon)$ par leurs expressions rationnelles à l'aide de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, d'après les formules relatives à la multiplication de l'argument, ξ sera une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, que nous désignerons par $F[\lambda^2(\varepsilon)]$. Supposons que, dans l'expression de la fonction ξ, on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier, positif, inférieur ou égal à m; comme nous venons de le remarquer, les m quantités de la suite (47) se permutent, et, par conséquent, la fonction symétrique ξ de ces m quantités conserve la même valeur; on aura donc

$$F[\lambda^2(a\varepsilon)] = F[\lambda^2(\varepsilon)].$$

Ainsi, la fonction $F(x^2)$ jouit de cette propriété de conserver la même valeur, quand on y remplace x^2 par l'une quelconque des m racines d'une même suite. La fonction ξ est donc égale à la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction F, portant successivement sur les m racines de la suite, et l'on a

$$\xi = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{p=m} F[\lambda^2(p\varepsilon)].$$

La quantité ε ayant $n+1$ valeurs différentes, la fonction ξ a elle-même $n+1$ valeurs différentes, une pour chaque suite. La somme de ces $n+1$ valeurs de ξ, savoir $\frac{1}{m}\Sigma\Sigma F(x^2)$, est une fonction symétrique et rationnelle des $m(n+1)$ racines de l'équation $P_1 = 0$; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen des coefficients de cette équation, c'est-à-dire au moyen de k^2.

Toute autre fonction symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47) jouira des mêmes propriétés; elle aura $n+1$ valeurs, dont la somme s'exprimera rationnellement au moyen de k^2. Telles sont les fonctions $\xi^2, \xi^3, \ldots$ On en conclut que les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de l'équation

$$(48) \qquad \xi^{n+1} + A_1\xi^n + A_2\xi^{n-1} + \ldots + A_{n+1} = 0,$$

du degré $n+1$, qui admet pour racines les $n+1$ valeurs de ξ, sont des fonctions rationnelles de k^2.

Une autre fonction symétrique et rationnelle η des quantités de la suite (47) satisfera à une équation analogue à la précédente; mais, comme à chaque système de valeurs de k^2 et de ξ correspond une seule valeur de η, on conclut, d'après un raisonnement pareil à celui du n° 182, que η s'exprimera rationnellement au moyen de k^2 et de ξ.

388. Considérons maintenant l'équation

$$(49) \qquad u^m - B_1u^{m-1} + B_2u^{m-2} - \ldots \pm B_m = 0$$

du degré m, dont les racines sont les m quantités de la suite (47). D'après ce que nous venons de dire, les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de l'équation, étant des fonctions symétriques et rationnelles de ces quantités, s'expriment rationnellement au moyen de k^2 et de ξ.

Cette dernière équation peut être résolue par la méthode d'Abel. Appelons, en effet, α une racine de l'équation binôme $x^m = 1$, et r un nombre entier, inférieur à n, et qui soit racine primitive de ce nombre premier n. Puisque r^{n-1} ou r^{2m} donne le résidu 1 par rapport au diviseur n, r^m donnera le résidu -1; il en résulte que les puissances $r^0, r^1, r^2, \ldots, r^{m-1}$ donnent pour résidus les m premiers nombres

1, 2,..., m, affectés chacun de l'un des signes + ou — ; d'après cela, les m quantités de la suite (47) seront représentées par la formule $x^2 = \lambda^2(r^s\varepsilon)$, dans laquelle on attribue à l'exposant s les m valeurs 0, 1, 2,..., $m-1$.

La fonction

$$(50) \qquad \mathcal{R}(\varepsilon, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=m-1} \alpha^s \lambda^2(r^s\varepsilon)$$

satisfaisant à la relation

$$\mathcal{R}(r\varepsilon) = \alpha^{-1}\mathcal{R}(\varepsilon),$$

la fonction $f(\varepsilon) = [\mathcal{R}(\varepsilon)]^m$ satisfait à la relation

$$f(r\varepsilon) = f(\varepsilon).$$

Si l'on remplace les quantités $\lambda^2(r^s\varepsilon)$ par leurs expressions rationnelles au moyen de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$, comme nous avons fait précédemment, la fonction $\mathcal{R}(\varepsilon)$ deviendra une fonction rationnelle de k^2 et de $\lambda^2(\varepsilon)$: il en sera de même de la fonction $f(\varepsilon)$; nous désignerons cette dernière fonction, ainsi transformée, par $\psi[\lambda^2(\varepsilon)]$. A cause de la relation $f(r^s\varepsilon) = f(\varepsilon)$, la fonction ψ conserve la même valeur quand on y remplace la racine $\lambda^2(\varepsilon)$ par une autre racine quelconque $\lambda^2(r^s\varepsilon)$ de la suite (47). La fonction $f(\varepsilon)$ est donc égale à la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction ψ portant successivement sur les m racines de la suite, et l'on a

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{s=m-1} \psi[\lambda^2(r^s\varepsilon)].$$

Le second membre, étant une fonction symétrique des racines de l'équation (49), s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de cette équation : ce sera donc une fonction rationnelle M de k^2 et de ξ. On en déduit

$$(51) \qquad \mathcal{R}(\varepsilon, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=m-1} \alpha^s \lambda^2(r^s\varepsilon) = \sqrt[m]{\mathrm{M}}.$$

A chaque racine de l'équation binôme $x^m = 1$ correspond une équa-

tion analogue à la précédente. Le second membre de l'équation qui se rapporte à la racine $\alpha = 1$ est égal à la somme des racines de l'équation (49), c'est-à-dire à B_1. En ajoutant membre à membre les m équations ainsi obtenues, on arrive à la formule

$$(52)\qquad u = x^2 = \lambda^2(\varepsilon) = \frac{1}{m}\left(B_1 + \Sigma \sqrt[m]{M}\right),$$

qui renferme $m - 1$ radicaux.

On ramène ces radicaux à un seul en observant que, si α est une racine primitive de l'équation binôme $x^m = 1$, l'expression

$$\mathfrak{R}(\varepsilon, \alpha)^{m-s}\,\mathfrak{R}(\varepsilon, \alpha^s)$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation (49) et, par conséquent, une fonction rationnelle de k^2 et de ξ.

Ainsi, la résolution de l'équation $P_1 = 0$ du degré $m(n+1)$, par rapport à l'inconnue x^2, est ramenée à la résolution d'une équation (48) du degré $n+1$ par rapport à une inconnue auxiliaire ξ, de telle sorte que les valeurs de x^2 s'expriment par des radicaux à l'aide des $n+1$ valeurs de ξ.

389. Étant donnée une fonction elliptique $\lambda(z, k)$, dont le multiplicateur est égal à l'unité, nous avons vu (n° 363) que la division par un nombre impair et premier n de l'une quelconque des périodes définies par les relations (41) du n° 360 donne $n+1$ fonctions différentes, savoir : la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega\right)$ et les n fonctions $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$, t recevant n valeurs entières consécutives. Si l'on désigne, comme précédemment, par ε l'une des $n+1$ quantités $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega' + 2t\omega}{n}$, on déterminera le module k_1 et le multiplicateur g_1 de ces diverses fonctions par les formules

$$(53)\qquad \sqrt{k_1} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{p=m}\frac{1-\lambda^2(p\varepsilon)}{1-k^2\lambda^2(p\varepsilon)},\qquad g_1 = \pm\prod_{p=1}^{p=m}\frac{\lambda^2(p\varepsilon)\left[1-k^2\lambda^2(p\varepsilon)\right]}{1-\lambda^2(p\varepsilon)},$$

établies aux n°s 349 et 351. Le carré k_1^2 du module k_1, étant une fonc-

tion symétrique et rationnelle des m quantités de la suite (47) et ayant $n+1$ valeurs, satisfait à une équation du degré $n+1$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de k^2. On pourra s'en servir comme d'une inconnue auxiliaire pour résoudre l'équation (49). Le multiplicateur g_1, qui est aussi égal à une fonction symétrique et rationnelle des quantités de la suite (47), s'exprimera rationnellement au moyen de k^2 et k_1^2. Les polynômes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}'_1$, entiers par rapport à la fonction donnée $\lambda(z, k)$, et à l'aide desquels on obtient les fonctions $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 2l\omega}{n}\right)$, ont pour coefficients des fonctions symétriques et rationnelles des mêmes quantités; ces coefficients s'exprimeront rationnellement au moyen de k^2 et k_1^2.

LIVRE VIII.

TRANSFORMATION.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES DE TRANSFORMATION.

390. Dans le Chapitre I du Livre VI, nous nous sommes proposé, étant donné un polynôme Y du quatrième degré en y, de trouver une fonction rationnelle y de x, telle que l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ se transforme en une autre $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, X étant un polynôme du quatrième degré en x, et nous avons examiné spécialement les transformations qui donnent au nouveau polynôme X la forme canonique $(1-x^2)(1-k^2x^2)$. Supposons maintenant que les polynômes X et Y aient tous deux la forme canonique, et considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Si l'on y joint la condition initiale $y = y_0$ pour $x = 0$, cette équation définit une fonction y de x. On donne le module k; lorsque les deux quantités g_1 et k_1 sont prises arbitrairement, la fonction y de x est, en général, transcendante. Abel s'est proposé de rechercher dans quels cas y est une fonction algébrique de x, et de la déterminer (*Œuvres complètes*).

Désignons, pour abréger, par Δx le second radical, par $\Delta_1 y$ le premier, et posons

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y}, \quad \alpha = \int_0^{y_0} \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y},$$

d'où

$$z + \alpha = \int_0^y \frac{dy}{g_1 \Delta_1 y};$$

nous aurons

$$(2) \qquad x = \lambda(z, 1, k), \quad y = \lambda(z + \alpha, g_1, k_1),$$

Soit $(2\omega, \omega')$ un couple de périodes elliptiques de la fonction x, dont le module est k et le multiplicateur égal à l'unité, $(2\omega_1, \omega'_1)$ un couple de périodes elliptiques de la fonction y, dont le module est k_1 et le multiplicateur g_1. A une valeur de x correspondent les deux séries de valeurs de z représentées par les formules $z + 2m\omega + m'\omega'$, $\omega - z + 2m\omega + m'\omega'$, où m et m' sont des nombres entiers quelconques; pour qu'à ces valeurs correspondent un nombre fini de valeurs de y, il est nécessaire que certains multiples de 2ω et de ω' soient respectivement égaux à des sommes de multiples de $2\omega_1$ et de ω'_1, et, par conséquent, que les réseaux construits sur les deux couples de périodes aient un réseau de sommets communs (n° 175). On doit donc avoir entre ces deux couples de périodes des relations de la forme

$$\begin{aligned} 2\Omega &= 2a\omega + b\omega' = 2a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \\ \Omega' &= 2a'\omega + b'\omega' = 2a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1, \end{aligned}$$

$a, b, \ldots$ étant des nombres entiers, et 2Ω, Ω' les périodes d'un réseau formé de tous les sommets communs. Nous avons vu (n° 177) que, réciproquement, lorsque ces conditions sont remplies, les variables x et y sont liées par une équation algébrique du degré $2N_1$ par rapport à x et du degré $2N$ par rapport à y, N et N_1 étant les déterminants $\pm(ab' - ba')$, $\pm(a_1 b'_1 - b_1 a'_1)$. Les coefficients de i dans les deux rapports $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$ étant positifs, les deux déterminants ont le même signe; on peut les supposer positifs.

Nous avons démontré (n° 176) que, lorsque deux réseaux $(2\omega, \omega')$,

$(2\omega_1, \omega'_1)$ admettent un réseau de sommets communs, il existe un réseau $(2\varepsilon, \varepsilon')$ auquel appartiennent tous les sommets des deux réseaux proposés, de sorte que l'on a

$$2\omega = 2p\varepsilon + q\varepsilon', \quad 2\omega_1 = 2p_1\varepsilon + q_1\varepsilon',$$
$$\omega' = 2p'\varepsilon + q'\varepsilon', \quad \omega'_1 = 2p'_1\varepsilon + q'_1\varepsilon',$$

$p, q, \ldots$ étant des nombres entiers, et, quand la maille de ce réseau $(2\varepsilon, \varepsilon')$ est la plus grande possible, les déterminants $pq' - qp'$, $p_1q'_1 - q_1p'_1$ sont égaux respectivement à N_1 et à N. En vertu du théorème du n° 179, la relation qui existe entre les deux fonctions paires $\lambda\left(\frac{\varepsilon}{2} + z, \varepsilon, \varepsilon'\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + z, \omega, \omega'\right)$ est du premier degré par rapport à la première et du degré N_1 par rapport à la seconde; il en résulte que la fonction $u = \lambda\left(\frac{\varepsilon - \omega}{2} + z, \varepsilon, \varepsilon'\right)$ est égale à une fraction rationnelle du degré N_1 par rapport à la fonction $x = \lambda(z, \omega, \omega')$. De même, la fonction $v = \lambda\left(\frac{\varepsilon - \omega_1}{2} + z + \alpha, \varepsilon, \varepsilon'\right)$ est égale à une fraction rationnelle du degré N par rapport à la fonction $y = \lambda(z + \alpha, \omega_1, \omega'_1)$. Désignons par k_2 et g_2 le module et le multiplicateur de la fonction $\lambda(z, \varepsilon, \varepsilon')$; si l'on pose $\zeta = \frac{\varepsilon - \omega}{2} + z$, $\alpha' = \frac{\omega - \omega_1}{2} + \alpha$, on a

$$u = \lambda(\zeta, \varepsilon, \varepsilon'), \quad v = \lambda(\zeta + \alpha', \varepsilon, \varepsilon'),$$

d'où

(3) $$v = \frac{u\Delta_2 h + h\Delta_2 u}{1 - k_2^2 h^2 u^2},$$

en appelant h la constante $\lambda(\alpha', \varepsilon, \varepsilon')$. Telle est la forme sous laquelle on peut mettre la relation algébrique qui existe entre x et y; le premier membre est une fonction rationnelle de y, le second membre une fonction rationnelle de x et d'un radical carré portant sur un polynôme entier en x. Le problème d'Abel revient ainsi à la recherche des fonctions rationnelles u de x et v de y, satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{du}{g_2\Delta_2 u} = \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dv}{g_2\Delta_2 v} = \frac{dy}{g_1\Delta_1 y}.$$

Dans la première équation, on donne k, et il faut déterminer g_2, k_2 et la fonction u de x; dans la seconde, g_2 et k_2 étant connus, il faut déterminer g_1, k_1 et la fonction v de y.

391. Ordinairement, on donne le nom de *transformation* à la résolution de cette question particulière : trouver une fonction rationnelle y de x qui satisfasse à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dy}{g_1\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle le module k est connu, et les deux constantes g_1 et k_1 inconnues. Jacobi a donné, en même temps qu'Abel, la solution de ce problème (*Fundamenta nova*).

En désignant par α une constante, nous avons vu que x et y sont des fonctions elliptiques d'une même variable auxiliaire z,

$$(2) \qquad x = \lambda(z, 1, k), \quad y = \lambda(z+\alpha, g_1, k_1),$$

et nous avons appelé $(2\omega, \omega')$ un couple de périodes elliptiques de la première, $(2\omega_1, \omega'_1)$ un couple de périodes elliptiques de la seconde. Pour que l'équation entre x et y soit du premier degré par rapport à y, il est nécessaire, d'abord, que le nombre N soit égal à 1 et, par conséquent, que les deux réseaux $(2\omega, \omega')$, $(2\Omega, \Omega')$ coïncident; on doit donc avoir

$$(4) \qquad 2\omega = 2a\omega_1 + b\omega'_1, \qquad \omega' = 2a'\omega_1 + b'\omega'_1.$$

A une valeur de x correspondent deux valeurs z et $\omega - z$ de la variable z; il faut que les deux valeurs correspondantes de y, savoir :

$$\lambda(z+\alpha, \omega_1, \omega'_1), \quad \lambda[\omega + 2\alpha - (z+\alpha), \omega_1, \omega'_1],$$

soient égales, ce qui exige que la constante α soit de la forme

$$(5) \qquad \alpha = -(a-1)\frac{\omega_1}{2} - b\frac{\omega'_1}{4} + p\omega_1 + q\frac{\omega'_1}{2},$$

p et q étant des nombres entiers. Quand ces conditions sont remplies,

y est égal à une fonction rationnelle de x; le déterminant positif $n = ab' - ba'$ indique le degré des polynômes entiers qui composent la fraction, ou du moins le degré de celui des deux polynômes qui est du degré le plus élevé; c'est ce qu'on appelle le *degré de la transformation*.

392. Nous ferons d'abord quelques remarques qui abrégeront la discussion :

1° L'équation différentielle renferme les modules k et k_1 seulement au carré; par conséquent, si, dans une solution du problème de la transformation, on remplace k par $-k$ ou k_1 par $-k_1$, on obtient une autre solution de la même équation différentielle.

2° L'équation différentielle ne change pas quand on y remplace x par $-x$ ou y par $-y$, et en même temps g_1 par $-g_1$, le module k_1 restant le même. Elle ne change pas non plus lorsqu'on remplace x par $\frac{1}{kx}$ ou y par $\frac{1}{k_1 y}$, et g_1 par $\pm g_1$, le module k_1 restant encore le même. Si donc on opère l'une de ces substitutions dans une des solutions du problème de la transformation, on aura une autre solution de la même équation différentielle.

3° Les diverses valeurs du module cherché k_1, qui, dans les transformations du même degré, correspondent à une même valeur de k, sont réciproques deux à deux; car, si une fonction rationnelle y de x satisfait à l'équation (1), la fonction $y' = k_1 y$ du même degré satisfait à l'équation différentielle de même forme

$$(6) \qquad \frac{dy'}{g_1 k_1 \sqrt{(1-y'^2)\left(1-\frac{1}{k_1^2}y'^2\right)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle le nouveau module est $\frac{1}{k_1}$ et le nouveau multiplicateur $g_1 k_1$; c'est une autre solution du problème de la transformation.

De même, si l'on pose $x = \frac{x'}{k}$, l'équation (1) devient

$$(7) \qquad \frac{dy}{\frac{g_1}{k}\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)\left(1-\frac{1}{k^2}x'^2\right)}}.$$

D'après cela, si l'on considère les transformations relatives aux équations (1) et (7), dans lesquelles le module donné a des valeurs réciproques, les valeurs du module cherché k_1 seront les mêmes; mais il est clair que, si, dans les solutions de la première équation, on remplace simplement k par $\frac{1}{k}$, on obtient celles de la seconde; comme on revient de celle-ci à la première en remplaçant x' par kx, il en résulte que, si, dans une solution de l'équation (1), on remplace k par $\frac{1}{k}$ et x par kx, on obtient une autre solution de la même équation.

393. Nous distinguerons plusieurs cas dans le problème de la transformation, suivant que les nombres entiers a et b sont pairs ou impairs.

Premier cas : a impair, b pair. — Les valeurs de α sont de la forme $p'\omega_1 + q'\frac{\omega'_1}{2}$; elles se réduisent aux quatre valeurs 0, ω_1, $\frac{\omega'_1}{2}$, $\omega_1 + \frac{\omega'_1}{2}$; les deux premières donnent des fonctions y égales et de signes contraires, et de même les deux dernières; aux deux valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\omega'_1}{2}$ correspondent des fonctions qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution $\frac{1}{k_1 y}$, le module k_1 restant le même; on pourra donc se borner à l'hypothèse $\alpha = 0$. Quand on aura trouvé les transformations qui s'y rapportent, on en déduira les autres par les substitutions $-y$ et $\pm\frac{1}{k_1 y}$.

Deuxième cas : a pair, b impair. — Les valeurs de α sont de la forme $(2p'+1)\frac{\omega_1}{2} + (2q'+1)\frac{\omega'_1}{4}$; elles se réduisent aux quatre valeurs $\pm\frac{\omega_1}{2} \pm \frac{\omega'_1}{4}$; il suffira de chercher les transformations fournies par l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}$; les autres s'en déduiront par les substitutions $-y$, $\pm\frac{1}{k_1 y}$.

Troisième cas : a et b impairs. — Les valeurs de α sont de la forme $p'\omega_1 + (2q'+1)\frac{\omega'_1}{4}$; il suffira de considérer l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega'_1}{4}$. Mais

nous remarquons que ce troisième cas donne les mêmes transformations que le précédent; car, si l'on met les relations (4) sous la forme $2\omega = 2(a-b)\omega_1 + b(2\omega_1 + \omega'_1)$, $\omega' = 2(a'-b')\omega_1 + b'(2\omega_1 + \omega'_1)$, le nouvau coefficient $a-b$ devient pair; les fonctions de transformation $\lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $\lambda(z, \omega_1, 2\omega_1 + \omega'_1)$ sont égales et ont des modules égaux et de signes contraires.

Quatrième cas : a et b pairs. — Les valeurs de α sont de la forme $(2p'+1)\frac{\omega_1}{2} + q'\frac{\omega'_1}{2}$; elles se réduisent aux quatre valeurs $\pm\frac{\omega_1}{2}$, $\pm\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{2}$. Il suffira de considérer l'hypothèse $\alpha = \frac{\omega_1}{2}$.

Transformations du premier degré.

394. Nous nous occuperons d'abord des transformations du premier degré, ce qui revient à supposer $ab' - ba' = 1$. Le quatrième cas ne se présentant pas et le troisième rentrant dans le deuxième, il suffit d'examiner les deux premiers.

Premier cas : a impair, b pair, $\alpha = 0$. — Le nombre b' est impair. Soient $a = 2a_1 + 1$, $b = 2b_1$, $b' = 2b'_1 + 1$; les relations (4) deviennent

$$\omega = (2a_1 + 1)\omega_1 + b_1\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + (2b'_1 + 1)\omega'_1.$$

Les deux fonctions $y = \lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $x = \lambda(z, \omega, \omega')$, ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis, sont dans un rapport constant.

1° $b_1 = 2b_2$. — En faisant $z = \frac{\omega}{2}$, on trouve que ce rapport est égal à ± 1; en faisant $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, on trouve $k_1 = \pm k$; on a ainsi la première transformation

$$(a) \qquad k_1 = k, \quad g_1 = 1, \quad y = x,$$

à laquelle nous joindrons celle que l'on en déduit par la substitution $-y$, savoir : $k_1 = k$, $g_1 = -1$, $y = -x$. La substitution $\frac{1}{k_1 y}$ donne la transformation corrélative

$$(a') \qquad k_1 = k, \quad g_1 = \pm 1, \quad y = \frac{1}{kx},$$

à laquelle nous joindrons de même celle qui s'en déduit par la substitution $-y$, savoir : $k_1 = k$, $g_1 = \pm 1$, $y = -\frac{1}{kx}$.

2° $b_1 = 2b_2 + 1$. — En faisant $z = \frac{\omega + \omega'}{2}$, on trouve que le rapport $\frac{y}{x}$ est égal à $\pm k$; en faisant ensuite $z = \frac{\omega}{2}$, on trouve $k_1 = \pm \frac{1}{k}$; on a ainsi la seconde transformation

$$(b) \qquad k_1 = \frac{1}{k}, \quad g_1 = k, \quad y = kx,$$

et la corrélative

$$(b') \qquad k_1 = \frac{1}{k}, \quad g_1 = \pm k, \quad y = \frac{1}{x},$$

et celles que l'on en déduit par la substitution $-y$.

Deuxième cas : a pair, b impair, $\alpha = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}$. — Soit $y = \frac{A + Bx}{1 + Cx}$; en faisant $z = 0$, on a $x = 0$, $y = \lambda\left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}, g_1, k_1\right) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$ (n° 365), et par suite $A = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$. Le nombre a' est impair, mais b' est pair ou impair.

1° b' pair. — Soient $a = 2a_1$, $b = 2b_1 + 1$, $a' = 2a'_1 + 1$, $b' = 2b'_1$. Si l'on remplace z par $z + \frac{\omega'}{2}$, x se change en $\frac{1}{kx}$, y en $-y$, et l'on a l'identité

$$-\frac{A + Bx}{1 + Cx} = \frac{A + \frac{B}{kx}}{1 + \frac{C}{kx}} = \frac{\frac{B}{C} + \frac{A}{C}kx}{1 + \frac{k}{C}x},$$

d'où l'on déduit $C^2 = k$, $B = -AC$, et la fonction de transformation devient

$$y = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{1 - Cx}{1 + Cx}.$$

Supposons d'abord que les trois nombres a_1, a'_1, b'_1 soient pairs; à

cause de la relation $ab' - ba' = 1$, le nombre b_1 sera impair. Pour $z = \frac{\omega}{2}$, on a

$$x = 1, \quad y = \lambda\left(\frac{\omega_1}{2}, g_1, k_1\right) = 1,$$

et par suite

$$\sqrt{k_1} = \frac{1 - C}{1 + C}.$$

Faisons maintenant $z = -\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega'_1}{4} + z'$, z' ayant une valeur très-petite, et développons en séries suivant les puissances de z'; en négligeant les puissances supérieures à la première, nous aurons (n° 365)

$$y = g_1 z', \quad x = \lambda\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{4} - z'\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{iz'(1-k)}{\sqrt{k}},$$

et par suite

$$g_1\sqrt{k_1}\left(1 + \frac{C}{\sqrt{k}}\right)z' = 1 - \frac{C}{\sqrt{k}} - \frac{C(1-k)}{\sqrt{k}}iz';$$

l'identification donne

$$C = \sqrt{k}, \quad g_1 = -\frac{i(1-k)}{2\sqrt{k_1}}.$$

On obtient ainsi la transformation

$$(c) \qquad k_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1 + \sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}}\,\frac{1 - x\sqrt{k}}{1 + x\sqrt{k}}.$$

Les autres combinaisons de nombres entiers se ramènent à la précédente, à l'aide des transformations du premier cas. Considérons les fonctions $y_1 = \lambda_1\left(z + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega'_1}{4}\right)$, $y_2 = \lambda_2\left(z + \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega'_2}{4}\right)$; qui correspondent aux deux couples de périodes définies par les formules

$$\begin{aligned} 2\omega_1 &= 2b'\omega - b\omega', & 2\omega_2 &= 2b'_1\omega - b_1\omega', \\ \omega'_1 &= -2a'\omega + a\omega', & \omega'_2 &= -2a'_1\omega + a_1\omega', \end{aligned}$$

dans lesquelles les nombres homologues a et a_1, b et b_1, a' et a'_1,

b' et b'_1 sont en même temps pairs ou impairs. La quantité

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + \frac{\omega'_2 - \omega'_1}{4} = \left(\frac{a' - a'_1}{2} - \frac{b' - b'_1}{2}\right)\omega - \left(\frac{a - a_1}{2} - \frac{b - b_1}{2}\right)\frac{\omega'}{2}$$

est de la forme $p\omega + q\frac{\omega'}{2}$, et par suite de la forme $p_1\omega_2 + q_1\frac{\omega'_2}{2}$, p, q, p_1, q_1 étant des nombres entiers. Si l'on pose $z = -\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega'_1}{4} + z'$, on aura donc

$$y_1 = \lambda_1(z'), \quad y_2 = \lambda_2\left(z' + p_1\omega_2 + q_1\frac{\omega'_2}{2}\right).$$

L'expression de y_2 en fonction de y_1 rentre ainsi dans le premier cas de la transformation.

En faisant subir à la fonction (c) la transformation (b), on obtient la nouvelle fonction

$$(d) \quad k_1 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1-x\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}},$$

dont le module est réciproque du précédent. Par la substitution $\frac{1}{k_1 y}$, on en déduit les transformations corrélatives

$$(c') \quad k_1 = \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1+\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}},$$

$$(d') \quad k_1 = \left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad g_1 = \pm\frac{i}{2}(1-\sqrt{k})^2, \quad y = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}.$$

On a, en outre, les quatre fonctions qui se déduisent des précédentes par la substitution $-y$.

2° b' impair. — Ce cas se ramène au précédent. Si, dans une solution du problème de la transformation, on remplace k par $-k$, il est clair que l'on obtient une autre solution de la même équation différentielle. Ceci revient à remplacer $\lambda(z, \omega, \omega')$ par la fonction égale $\lambda(z, \omega, 2\omega + \omega')$, qui a un module égal à celui de la première et de signe contraire; mais, si les nombres b et b' sont impairs, dans les relations (4) mises sous la forme

$$2\omega = 2a\omega_1 + b\omega'_1, \quad 2\omega + \omega' = 2(a + a')\omega_1 + (b + b')\omega'_1,$$

le nouveau coefficient $b+b'$ est pair. Ainsi les solutions qui se rapportent au cas actuel se déduisent des précédentes par le changement de k en $-k$; on obtient de la sorte les deux nouvelles transformations

$$(e)\quad k_1=\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1+i\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\,\frac{1-ix\sqrt{k}}{1+ix\sqrt{k}},$$

$$(f)\quad k_1=\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1-i\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\,\frac{1-ix\sqrt{k}}{1+ix\sqrt{k}},$$

qui se rapportent à deux modules réciproques, et les deux corrélatives

$$(e')\quad k_1=\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1+i\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\,\frac{1+ix\sqrt{k}}{1-ix\sqrt{k}},$$

$$(f')\quad k_1=\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}(1-i\sqrt{k})^2,\quad y=\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\,\frac{1+ix\sqrt{k}}{1-ix\sqrt{k}},$$

et, en outre, celles qui s'en déduisent par la substitution $-y$.

Transformations d'un degré impair.

395. Nous avons vu déjà (n° 393) que le troisième cas rentre dans le second. Une transformation du premier degré ramène le second cas au premier. Si l'on considère, en effet, la fonction $u=\lambda(z,\omega_2,\omega'_2)$, relative au couple des périodes $2\omega_2=\omega'_1$, $\omega'_2=-2\omega_1$ équivalent au couple $2\omega_1$, ω'_1, on remarque que la fonction $y=\lambda(z+\alpha,\omega_1,\omega'_1)$ est égale à une fonction rationnelle de u du premier degré; en appelant k_2 et g_2 le module et le multiplicateur de la fonction u, on a, d'après la formule (c) du numéro précédent,

$$k_1=\left(\frac{1-\sqrt{k_2}}{1+\sqrt{k_2}}\right)^2,\quad g_1=\pm\frac{i}{2}g_2(1+\sqrt{k_2})^2,\quad y=\frac{1+\sqrt{k_2}}{1-\sqrt{k_2}}\,\frac{1-u\sqrt{k_2}}{1+u\sqrt{k_2}}.$$

Mais les relations (4) deviennent

$$2\omega=2b\omega_2-a\omega'_2,\quad \omega'=2b'\omega_2-a'\omega'_2;$$

le premier coefficient étant actuellement impair, le second pair, l'expression de u par une fraction rationnelle en x rentre dans le premier cas de la transformation.

Ce premier cas se subdivise en deux, suivant que b est de la forme $4b_1$ ou $4b_1+2$. On ramène le second cas au premier par une autre transformation du premier degré. Considérons, en effet, la fonction $u=\lambda(z, \omega_2, \omega'_2)$, relative au couple des périodes $2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega'_1$, $\omega'_2 = \omega'_1$ équivalent au couple $2\omega_1$, ω'_1, et désignons par k_2 et g_2 son module et son multiplicateur; on a, d'après la formule (b),

$$k_1 = \frac{1}{k_2}, \quad g_1 = k_2 g_2, \quad y = k_2 u.$$

Les relations (4) deviennent

$$2\omega = 2a\omega_2 + (b-2a)\omega'_2, \quad \omega' = 2a'\omega_2 + (b'-2a')\omega'_2;$$

le second coefficient est maintenant de la forme $4b_1$. Ainsi les transformations fournies par les valeurs de b de la forme $4b_1+2$ présentent des modules réciproques de ceux qui se rapportent aux transformations fournies par les valeurs de b de la forme $4b_1$.

396. Étudions d'abord les transformations d'un degré impair n. Le quatrième cas ne se présentant pas, il suffit, d'après ce que nous venons de dire, de supposer $a=2a_1+1$, $b=4b_1$, $\alpha=0$, ce qui réduit les relations (4) à

$$(8) \qquad \omega = (2a_1+1)\omega_1 + 2b_1\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + b'\omega'_1;$$

les quatre nombres entiers qu'elles renferment ne sont assujettis qu'à la condition

$$(9) \qquad (2a_1+1)b' - 4b_1 a' = n.$$

Considérons tous les systèmes de nombres entiers dans lesquels les deux nombres $2a_1+1$ et b_1 admettent un même plus grand commun diviseur n', qui sera nécessairement un diviseur de n; posons $n=n'n''$, $2a_1+1=n'(2a_2+1)$, $b_1=n'b_2$; la première des relations (8) devient

$$\frac{\omega}{n'} = (2a_2+1)\omega_1 + 2b_2\omega'_1,$$

et la condition (9) se réduit à

(10) $$(2a_2+1)b' - 4b_2a' = n''.$$

Les nombres $2a_2+1$ et $4b_2$ étant premiers entre eux, on peut déterminer deux nombres a'' et $2b''+1$ satisfaisant à la relation

(11) $$(2a_2+1)(2b''+1) - 4b_2a'' = 1.$$

Si l'on pose

$$\omega'' = 2a''\omega_1 + (2b''+1)\omega'_1,$$

on voit que le couple des périodes (ω_1, ω'_1) est équivalent au couple $\left(\frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$, que les fonctions $\lambda(z, \omega_1, \omega'_1)$, $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \omega''\right)$, qui ont mêmes zéros et mêmes infinis, sont égales, ou égales et de signes contraires, et que leurs modules sont égaux, ou égaux et de signes contraires. Des relations (10) et (11) on déduit

(12) $$a' = n''a'' - (2a_2+1)t, \quad b' = n''(2b''+1) - 4b_2t,$$

t étant un nombre entier. En remplaçant a'' et $2b''+1$ par leurs valeurs tirées de ces dernières relations, on trouve

$$\omega'' = \frac{\omega'}{n''} + 2t\frac{\omega}{n} = \frac{\omega' + 2t\dfrac{\omega}{n'}}{n''};$$

et l'on arrive à la formule

(13) $$y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\dfrac{\omega}{n'}}{n''}\right),$$

pareille à celle du n° 361. Mais, ici, la lettre t désigne un nombre entier quelconque; car, quel que soit t, en prenant arbitrairement les deux nombres $2a_2+1$ et b_2 premiers entre eux, on déterminera les deux nombres $2b''+1$ et a'' par l'équation (11), puis les deux nombres a' et b' par les équations (12); l'équation (10) en résulte, et par suite l'équation (9). Ainsi, lorsque n est impair, les fonctions représentées

par la formule (13), et celles qu'on en déduit par des transformations du premier degré, donnent toutes les transformations rationnelles du degré n.

397. Nous avons vu, au n° 363, que les fonctions données par la formule (13) pour n'' valeurs consécutives de t sont, non-seulement différentes, mais encore que deux d'entre elles ne peuvent être dans un rapport constant; nous avons vu aussi qu'il en est de même pour celles qui sont fournies par deux modes de division différents du nombre n. On en conclut que le nombre des transformations du degré n, du genre de celles que nous cherchons maintenant, est égal à la somme des diviseurs de n.

Nous les partagerons en deux classes : celles qui sont données par les valeurs de t qui n'ont pas de diviseur commun avec n' et n'', et celles qui correspondent aux combinaisons dans lesquelles les trois nombres n', n'', t admettent un plus grand commun diviseur. D'après ce que nous avons dit au n° 362, les premières sont égales à $\pm\lambda\left(z, \frac{\omega_1}{n}, \omega'_1\right)$ ou à $\pm\lambda\left(z, \omega_1, \frac{\omega'_1}{n}\right)$; elles proviennent de la division par n de l'une des périodes des couples $(2\omega_1, \omega'_1)$ définis par les formules (41) du n° 360. Considérons maintenant les combinaisons dans lesquelles le plus grand commun diviseur des trois nombres n', n'', t est égal à h, et soient $n' = hn'_1$, $n'' = hn''_1$, $n = h^2 n_1$, $t = ht_1$; on obtiendra les fonctions correspondantes

$$y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{hn'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\frac{\omega}{n'_1}}{hn''_1}\right) = \lambda\left(hz, \frac{\omega}{n'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\frac{\omega}{n'_1}}{n''_1}\right),$$

en divisant par n_1 l'une des périodes des couples $(2\omega_1, \omega'_1)$ et multipliant ensuite l'argument par h. Cette deuxième classe ne se présente pas lorsque les exposants des facteurs premiers du nombre n sont tous égaux à l'unité.

Lorsque le module donné k est fini et différent de zéro, les deux périodes particulières 2ω, ω', déterminées par des intégrales définies (n° 221), ont des valeurs finies différentes de zéro, et leur rapport est imaginaire; il en est de même des deux périodes de chacune des

fonctions représentées par la formule (13), et, par conséquent, ces fonctions ont toutes des modules et des multiplicateurs finis et différents de zéro.

398. Nous ferons encore remarquer que les carrés des modules de deux des fonctions représentées par la formule (13) ne peuvent être égaux ou réciproques, quel que soit le module donné k. Cherchons d'abord la condition pour que deux fonctions elliptiques

$$\lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda(z, \omega_1, \omega'_1) = \lambda(g_1 z, k_1)$$

aient leurs modules égaux, ou égaux et de signes contraires. Si l'on avait $k_1 = \pm k$, les deux fonctions

$$(14) \qquad \lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right) = \lambda(gz, k_1),$$

seraient égales, et leurs périodes satisferaient à des relations de la forme

$$(15) \qquad \frac{g_1}{g}\omega_1 = (4a+1)\omega + 2b\omega', \quad \frac{g_1}{g}\omega'_1 = 2a'\omega + (4b'+1)\omega',$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1) - 4ba' = 1$. En désignant par ρ et ρ_1 les rapports $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\omega'_1}{\omega_1}$, on aurait

$$(16) \qquad \rho_1 = \frac{2a' + (4b'+1)\rho}{(4a+1) + 2b\rho}.$$

Cette condition est suffisante; car, lorsqu'elle est remplie, on peut déterminer la quantité $\frac{g_1}{g}$, de manière que les équations (15) soient vérifiées; les deux fonctions (14) sont égales, et l'on a $k_1 = \pm k$.

Si l'on avait $k_1 = \pm \frac{1}{k}$, puisque la fonction $\lambda(z, \omega_1 - \omega'_1, \omega'_1)$ est égale à $\lambda\left(g_1 k_1 z, \frac{1}{k_1}\right)$, la fonction

$$\lambda\left[z, \frac{g_1 k_1}{g}(\omega_1 - \omega'_1), \frac{g_1 k_1}{g}\omega'_1\right] = \lambda\left(gz, \frac{1}{k_1}\right)$$

serait égale à la première des fonctions (14), et l'on arriverait à la condition

$$(17)\qquad \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{2a' + (4b'+1)\rho}{(4a+1)+2b\rho}.$$

Considérons maintenant deux des fonctions (13), savoir

$$\lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{n''}\right), \quad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'_1}, \frac{\omega' + 2t_1\frac{\omega}{n'_1}}{n''_1}\right).$$

Pour que leurs modules fussent égaux, ou égaux et de signes contraires, quel que soit le module donné k, il faudrait que la condition

$$\frac{2t_1 + n'_1\rho}{n''_1} = \frac{2[a'n'' + (4b'+1)t] + (4b'+1)n'\rho}{[(4a+1)n'' + 4bt] + 2bn'\rho}$$

fût vérifiée, quel que soit ρ, ce qui ne peut avoir lieu que si $b = 0$, et, par suite, $a = b' = 0$, $n'_1 = n'$, $n''_1 = n''$, $t_1 = t + a'n''$; et alors les deux fonctions seraient égales. Pour que les carrés des modules fussent réciproques, il faudrait que la condition

$$\frac{2t_1 + n'_1\rho}{(n''_1 - 2t_1) - n'_1\rho} = \frac{2[a'n'' + (4b'+1)t] + (4b'+1)n'\rho}{[4a+1)n'' + 4bt] + 2bn'\rho}$$

fût vérifiée, quel que soit ρ, ce qui est impossible, puisqu'on ne peut avoir $4b' + 1 = -2b$.

399. Il est facile de vérifier que les fonctions dont nous venons de parler satisfont bien aux conditions qui servent de base à la méthode de Jacobi (n° 260). Considérons, par exemple, la fonction (n° 349)

$$y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = g_1\frac{x\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}};$$

on a ici

$$\mathrm{Y} = g_1^2(1-y)(1+y)(1-k_1y)(1+k_1y),$$

et, après la substitution,

$$\sqrt{\mathrm{Y}} = \frac{g_1}{\mathfrak{P}^2}\sqrt{(\mathfrak{P} - g_1x\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P} + g_1x\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P} - g_1k_1x\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P} + g_1k_1x\mathfrak{P}_1)}.$$

D'après les identités (20) ou (20)′ du n° 380, chacun des quatre binômes placés sous le radical est égal au produit d'un facteur du premier degré en x par un polynôme carré parfait; on a donc

$$\sqrt{Y} = \frac{g_1 M}{\mathfrak{P}^2} \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

M étant un polynôme entier en x du degré $2n-2$.

Il en est de même des transformations relatives à la multiplication de l'argument. Soit $y = \lambda(nz) = \frac{xP_1}{P}$ (n° 332); on a

$$Y = n^2(1-y)(1+y)(1-ky)(1+ky),$$

après la substitution

$$\sqrt{Y} = \frac{n}{P^2}\sqrt{(P-xP_1)(P+xP_1)(P-kxP_1)(P+kxP_1)},$$

et, en vertu des identités (3) ou (3)′ du n° 372,

$$\sqrt{Y} = \frac{nM}{P^2}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

M étant un polynôme entier en x du degré $2n^2-2$.

Transformations d'un degré pair.

400. Étudions maintenant les transformations d'un degré pair. Soit $n = 2^h n_1$, n_1 étant impair. Les trois premiers cas de la transformation se ramènent, comme nous l'avons dit au n° 395, à celui où $a = 2a_1 + 1$, $b = 4b_1$, $\alpha = 0$. Considérons les systèmes de nombres entiers satisfaisant à la relation (9), et dans lesquels les deux nombres entiers $2a_1+1$ et b_1 admettent un même plus grand commun diviseur n', qui sera nécessairement impair et diviseur de n_1; en posant $n_1 = n'n''$ et raisonnant comme précédemment, on arrivera à la formule

$$(18) \qquad y = \lambda\left(z, \frac{\omega}{n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{n'}}{2^h n''}\right),$$

dans laquelle t désigne un nombre entier quelconque. A chaque diviseur n'' de n_1 correspondent ainsi $2^h n''$ fonctions y, et, par conséquent, le nombre des transformations rationnelles de cette sorte est égal à la somme des diviseurs de n_1 multipliée par 2^h.

Il nous reste à examiner le quatrième cas de la transformation, celui où les deux nombres a et b sont pairs et $\alpha = \frac{\omega_1}{2}$. Considérons les systèmes de nombres entiers vérifiant la relation $ab' - ba' = n$, et dans lesquels les deux nombres a et b admettent un même plus grand commun diviseur $2^r n'$; l'exposant r sera égal ou inférieur à h, et le nombre impair n' un diviseur de n_1. Posons $a = 2^r a_1$, $b = 2^r b_1$, l'un des nombres a_1 et b_1 au moins étant impair. Nous commencerons par diviser la première période r fois successivement par 2. La première des formules (19) du n° 77 donne

$$\lambda\left(z + \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{\mu\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{\nu\left(z, \frac{\omega}{2}, \omega'\right)};$$

d'après les formules du n° 366, on en déduit

$$x_1 = \lambda\left(z + \frac{\omega}{4}, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{1 - (1 + k')x^2}{1 - (1 - k')x^2}, \quad k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad g_1 = 1 + k',$$

k_1 et g_1 étant le module et le multiplicateur de la fonction x_1. Si l'on pose $z_1 = z + \frac{\omega}{4}$, on aura de même

$$x_2 = \lambda\left(z_1 + \frac{\omega}{2^3}, \frac{\omega}{2^2}, \omega'\right) = \frac{1 - (1 + k'_1)x_1^2}{1 - (1 - k'_1)x_1^2}, \quad k_2 = \frac{1 - k'_1}{1 + k'_1}, \quad g_2 = g_1(1 + k'_1),$$

k_2 et g_2 étant le module et le multiplicateur de la fonction x_2. On posera ensuite $z_2 = z_1 + \frac{\omega}{2^3}$, $z_3 = z_2 + \frac{\omega}{2^4}, \ldots$, et l'on continuera de cette manière jusqu'à la fonction

$$x_r = \lambda\left(z_{r-1} + \frac{\omega}{2^{r+1}}, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right) = \lambda\left(\zeta, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right).$$

Mais on a

$$\zeta = z + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{2^3} + \ldots + \frac{\omega}{2^{r+1}} = z + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2^{r+1}},$$

et, si l'on pose

$$\alpha' = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2^{r+1}} = (a_1 + 1)\frac{\omega_1}{2} + b_1 \frac{\omega'_1}{4} - 2^{r-1}\left(a_1 \omega_1 + b_1 \frac{\omega'_1}{2}\right),$$

on aura à chercher la relation entre les deux fonctions

$$y = \lambda(\zeta + \alpha', \omega_1, \omega'_1), \quad x_r = \lambda\left(\zeta, \frac{\omega}{2^r}, \omega'\right).$$

Les relations (4) deviennent

$$2\frac{\omega}{2^r} = 2a_1\omega_1 + b_1\omega'_1, \quad \omega' = 2a'\omega_1 + b'\omega'_1,$$

avec la condition $a_1 b' - b_1 a' = 2^{h-r} n_1$. La nouvelle constante α' a la forme voulue pour que y soit égal à une fraction rationnelle en x_r; l'un des nombres a_1 et b_1 étant impair, on est ramené à l'un des trois premiers cas de la transformation. On obtient ainsi les fonctions représentées par la formule

$$(19) \qquad y = \lambda\left(z + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2^{r+1}}, \frac{\omega}{2^r n'}, \frac{\omega' + 2t\frac{\omega}{2^r n'}}{2^{h-r} n''}\right),$$

et celles que l'on en déduit par des transformations du premier degré.

CHAPITRE II.

ÉQUATION MODULAIRE.

Existence de l'équation modulaire.

401. Nous nous occuperons spécialement du cas où n est impair et premier. Dans ce cas, la formule (13) du n° 396 donne $n+1$ fonctions de transformation, savoir : $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ et les n fonctions représentées par la formule $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 2t\omega}{n}\right)$, dans laquelle t reçoit n valeurs entières consécutives; mais nous mettrons ces dernières sous la forme $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega' + 16t\omega}{n}\right)$. Si l'on désigne par ε l'une des $n+1$ quantités $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega' + 16t\omega}{n}$, les modules de ces $n+1$ fonctions sont donnés par la formule

$$\sqrt{k_1} = \sqrt{k^n} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu^2(p\varepsilon)}{\nu^2(p\varepsilon)}.$$

Nous poserons $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k_1} = v^2$, et nous définirons les $n+1$ valeurs de v par la formule

$$v = u^n \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\theta_2(p\varepsilon)}{\theta_3(p\varepsilon)}, \tag{1}$$

d'où l'on déduit

$$\xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)}. \tag{2}$$

Si dans l'expression de $\frac{\mu(nz)}{\nu(nz)}$, déduite des formules (14) du n° 332, relatives à la multiplication de l'argument, on remplace z par $p\varepsilon$, et si l'on remarque que cette quantité devient égale à 1, on obtient l'expression de $\frac{\mu(p\varepsilon)}{\nu(p\varepsilon)}$ par une fraction rationnelle en k^2 et $\lambda^2(p\varepsilon)$; chaque valeur de ξ est donc une fonction symétrique et rationnelle des $\frac{n-1}{2}$ quantités

$$\lambda^2(\varepsilon),\quad \lambda^2(2\varepsilon),\quad \lambda^2(3\varepsilon),\ldots,\quad \lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\varepsilon\right).$$

Grâce à la substitution de $\frac{2\omega}{n}$ à $\frac{\omega}{n}$ dans l'expression du premier module, cette fonction ne change pas quand on remplace ε par $a\varepsilon$, a étant un nombre entier premier avec n. On en conclut, d'après le raisonnement du n° 387, que les $n+1$ valeurs de ξ sont les racines d'une équation algébrique du degré $n+1$ en ξ, ayant pour coefficients des fractions rationnelles de k^2 ou de u^8. En remplaçant ξ par $\frac{v}{u^n}$, on obtient une équation algébrique entre u et v, du degré $n+1$ par rapport à v; on lui donne le nom d'*équation modulaire*. Quand on remplace u par $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, les valeurs de ξ ne changent pas et, par conséquent, celles de v sont multipliées par le facteur constant $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$. Nous remarquons encore que l'équation ne change pas quand on y remplace u et v par $-u$ et $-v$.

Expression des racines de l'équation modulaire.

402. Nous avons démontré au n° 365 que les quantités $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$, données par les formules (29) et (30) du n° 205, sont des fonctions holomorphes de la variable $\rho = r + si$, pour toutes les valeurs de cette variable dans lesquelles le coefficient s est positif et différent de zéro, c'est-à-dire pour la moitié du plan située au-dessus de l'axe des x. Nous poserons

$$(3)\qquad \varphi(\rho) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\rho i}{8}} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}} = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}}{1+e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}},$$

$$(4)\qquad \psi(\rho) = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}}{1+e^{(2m-1)\pi\rho i}} = \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{8\rho}} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1+e^{-\frac{2m\pi i}{\rho}}}{1+e^{-\frac{(2m-1)\pi i}{\rho}}}.$$

Les deux formes sous lesquelles nous avons écrit chacune de ces fonctions s'accordent; car les deux premières quantités, par exemple, dont les huitièmes puissances sont égales à k^2, ayant des valeurs réelles et positives pour les valeurs $\rho = si$, sont nécessairement égales pour ces valeurs de ρ, c'est-à-dire quand cette variable décrit l'axe des y; elles sont donc égales dans tout le demi-plan (n^{os} **114** et **366**). A l'inspection des formules précédentes, on reconnaît que les deux fonctions qu'elles définissent, et qui ont été étudiées par M. Hermite (*Comptes rendus*, 1858), jouissent des propriétés suivantes :

$$\varphi(\rho) = \psi\left(-\frac{1}{\rho}\right), \quad \psi(\rho) = \varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\psi(\rho+1) = \frac{1}{\psi(\rho)}, \quad \psi(\rho+2) = \psi(\rho),$$

$$\varphi(\rho+1) = e^{\frac{\pi i}{8}}\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}, \quad \varphi(\rho+2) = e^{\frac{2\pi i}{8}}\varphi(\rho), \quad \varphi(\rho+2h) = e^{\frac{2h\pi i}{8}}\varphi(\rho).$$

Elles sont réelles et positives pour les valeurs $\rho = si$.

403. Dans ce qui suit, nous prendrons $u = \varphi(\rho)$, et, pour distinguer les $n+1$ valeurs de v, nous désignerons par V celle qui se rapporte à la fonction $\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ et par v_t celle qui se rapporte à la fonction $\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'+16t\omega}{n}\right)$. Nous allons démontrer que ces quantités, telles qu'elles sont définies par la formule (1), ont pour expressions

$$(5)\qquad V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\varphi(n\rho), \quad v_t = \varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right).$$

D'après la remarque faite au commencement du n° **365**, les quantités $\frac{\theta_2(p\varepsilon)}{\theta_3(p\varepsilon)}$, et, par conséquent, les valeurs de v sont des fonctions holomorphes de ρ. Considérons d'abord V et donnons à ρ la valeur si; dans les développements de $\theta_2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)$ et de $\theta_3\left(\frac{2p\omega}{n}\right)$ en produits d'après les formules (20) du n° **202**, les facteurs placés sous le signe produit étant tous réels et positifs, le quotient de ces deux quantités est réel et a le signe de $\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$; la valeur de V est donc réelle et a le signe du pro-

duit des $\frac{n-1}{2}$ facteurs $\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$, quand p varie de 1 à $\frac{n-1}{2}$. Lorsque $\frac{n-1}{2}$ est pair et égal à $2n'$, les n' premiers facteurs étant positifs, les n' suivants négatifs, leur produit a le signe de $(-1)^{n'}$. Lorsque $\frac{n-1}{2}$ est impair et égal à $2n'-1$, les $n'-1$ premiers facteurs étant positifs, les n' suivants négatifs, leur produit a le signe de $(-1)^{n'}$. Ainsi V a le signe de $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, et, comme $\varphi(n\rho)$ a une valeur réelle et positive, il y a accord entre les deux formules. Pour abréger, nous désignons par α le nombre entier $\frac{n^2-1}{8}$.

On obtient v_t en attribuant à ε, dans la formule (1), la valeur

$$\varepsilon = \frac{\omega' + 16t\omega}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho + 16t}{n}.$$

Si l'on pose $\rho + 16t = \rho'$, on déduit des formules (6) du n° 74

$$\theta_3(p\varepsilon) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\pi\rho' i\left(\frac{2mp}{n} + m^2\right)}, \quad \theta_2(p\varepsilon) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\pi\rho' i\left[\frac{(2m+1)p}{n} + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right]};$$

on a d'ailleurs $u = \varphi(\rho' - 16t) = \varphi(\rho')$; pour $\rho' = s'i$, ces quantités et, par suite, v_t ont des valeurs réelles et positives. Il en est de même de la quantité $\varphi\left(\frac{\rho'}{n}\right)$ donnée par la seconde des formules (5). Ainsi il y a accord entre les formules.

Supposons que dans l'équation modulaire on remplace u par $(-1)^\alpha V$; pour avoir les racines de la nouvelle équation, il suffira de remplacer ρ par $n\rho$ dans les formules (5); la racine v_0 est égale à $\varphi(\rho)$, c'est-à-dire à u. De même, supposons que l'on remplace u par v_t, ce qui revient à remplacer ρ par $\frac{\rho+16t}{n}$; la racine V de la nouvelle équation sera égale à $(-1)^\alpha\varphi(\rho + 16t)$, c'est-à-dire à $(-1)^\alpha u$. Il en résulte qu'à toute solution (u, v) de l'équation modulaire correspond une autre solution $[v, (-1)^\alpha u]$ de la même équation.

404. De la troisième des formules (63) du n° **367**, relatives à la divi-

sion par 2 de la seconde période, on déduit

$$\sqrt[4]{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+k}\,\sqrt{k_2};$$

mais, d'après les formules (55) du n° 365, on a

$$\nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right) = \sqrt{1+k}, \quad \lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k_2}};$$

il en résulte l'expression

$$(6) \qquad \varphi(\rho) = \sqrt[4]{k} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)},$$

qui nous permettra de trouver toutes les valeurs de ρ pour lesquelles la fonction $\varphi(\rho)$ a une valeur donnée.

Nous avons vu, au n° 398, que, pour que les carrés des modules de deux fonctions elliptiques

$$\lambda(z, \omega, \omega') = \lambda(gz, k), \quad \lambda(z, \omega_1, \omega'_1) = \lambda(g_1 z, k_1)$$

soient égaux, il est nécessaire et il suffit que les rapports $\rho = \frac{\omega'}{\omega}$, $\rho_1 = \frac{\omega'_1}{\omega_1}$ satisfassent à la relation (16); on a alors $\varphi^8(\rho_1) = \varphi^8(\rho)$. Cherchons maintenant la condition pour que les deux fonctions $\varphi(\rho)$, $\varphi(\rho_1)$ soient égales, ou égales et de signes contraires.

Comme on a $k_1 = (-1)^{a'} k$, il faut d'abord que a' soit pair; posons $a' = 2a'_1$; comme on a $\sqrt{k_1} = (-1)^{a'_1}\sqrt{k}$, d'après la première des formules (55) du n° 365, il faut que le nombre a'_1 soit lui-même pair; posons $a'_1 = 2a'_2$. Comme nous l'avons dit au n° 398, il résulte des formules (15) que les fonctions $\lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right)$, $\lambda(z, \omega, \omega')$ sont égales, et, par suite, les fonctions $\nu\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\omega'_1\right)$, $\nu(z, \omega, \omega')$; lorsque a' est pair, il en résulte aussi que les fonctions $\lambda\left(z, \frac{g_1}{g}\omega_1, \frac{g_1}{g}\frac{\omega'_1}{2}\right)$,

$\lambda\left(z, \omega, \frac{\omega'}{2}\right)$ sont égales. On a donc

$$\nu\left(\frac{\omega'_1}{4}, \omega_1, \omega'_1\right) = (-1)^{b'} \nu\left(\frac{\omega'}{4}, \omega, \omega'\right), \quad \lambda\left(\frac{\omega'_1}{8}, \omega_1, \frac{\omega'_1}{2}\right) = (-1)^{a'_2} \lambda\left(\frac{\omega'}{8}, \omega, \frac{\omega'}{2}\right),$$

et, par suite, en vertu de la formule (6),

$$\varphi(\rho_1) = (-1)^{a'_2 + b'} \varphi(\rho) = (-1)^{a + a'_2} \varphi(\rho).$$

Ainsi, pour que $\varphi(\rho_1) = \pm \varphi(\rho)$, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$(7) \qquad \rho_1 = \frac{8a'_2 + (4b' + 1)\rho}{(4a + 1) + 2b\rho},$$

avec la condition $(4a + 1)(4b' + 1) - 16ba'_2 = 1$.

Points critiques.

405. Les périodes ω et ω', déterminées par des intégrales définies, comme nous l'avons expliqué aux n°s 221 et 231, sont des fonctions continues de k^2; il n'y a exception que pour $k^2 = 0$ et $k^2 = 1$; ces deux quantités, et par suite leur rapport ρ, sont donc des fonctions holomorphes de la variable k^2, dans toute portion du plan, à contour simple, ne comprenant aucun de ces deux points critiques. Par rapport à la va-

Fig. 81.

riable u, il y a neuf points critiques, savoir l'origine $u = 0$ et les huit points $u = e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, placés aux sommets d'un octogone régulier $a_0 a_1 \ldots a_7$ (*fig.* 81). Chacune des valeurs de ν est une fonction holomorphe de ρ,

et par conséquent de u, lorsque cette variable u se meut dans une portion du plan, à contour simple, ne comprenant aucun des points critiques dont nous venons de parler, et qui sont les seuls qui existent dans le plan par rapport aux racines de l'équation modulaire.

Pour former les lacets, nous ferons partir la variable u d'un point b_0 situé sur l'axe Ox, à une distance du point O plus petite que l'unité. Le lacet (a_0) est formé d'une droite b_0c_0 et d'un petit cercle; le lacet (a_1) d'un arc b_0b_1 égal à $\frac{1}{8}$ de circonférence, d'une droite b_1c_1 et d'un petit cercle; le lacet (a_2) d'un arc $b_0b_1b_2$ égal à $\frac{2}{8}$ de circonférence, d'une droite b_2c_2 et d'un petit cercle, ...; le lacet (a_7) d'un arc $b_0b_1\ldots b_7$ égal aux $\frac{7}{8}$ de la circonférence, d'une droite b_7c_7 et d'un petit cercle; enfin le lacet (O) du cercle $b_0b_1\ldots b_7b_0$. Au point b_0, la période ω étant réelle et positive, et la période ω' de la forme $\omega''i$, on a $\rho=\rho_0=si$, s étant une quantité réelle et positive; nous distinguerons les $n+1$ racines par leurs valeurs initiales

$$V=(-1)^\alpha\varphi(n\rho_0),\quad v_0=\varphi\left(\frac{\rho_0}{n}\right),\quad v_1=\varphi\left(\frac{\rho_0+16}{n}\right),\ldots,\quad v_{n-1}=\varphi\left(\frac{\rho_0+16(n-1)}{n}\right);$$

la première est réelle et a le signe de $(-1)^\alpha$, la seconde est réelle et positive.

Pour les valeurs de u situées à l'intérieur du cercle décrit de l'origine avec un rayon égal à l'unité, en développant $(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en série, et faisant $g=1$, on déduit de la formule (3) du n° 221

$$\omega=\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\ldots\right].$$

D'autre part, l'équation (35) du n° 279 donne

$$(8)\qquad \frac{d\rho}{dk}=\frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k}+Ak+Bk^3+\ldots\right);$$

on en déduit par l'intégration

$$(9)\qquad \rho-\rho_0=\frac{1}{\pi i}\left[8\log\frac{u}{u_0}+A(k^2-k_0^2)+\frac{B}{2}(k^4-k_0^4)+\ldots\right],$$

en supposant que $\log \frac{u}{u_0}$ soit égal à zéro pour $u = u_0$, c'est-à-dire au point b_0. Lorsque u tend vers zéro, le coefficient positif s, dans l'expression $\rho = r + si$, augmente à l'infini ; si l'on prend la fonction $\varphi(\rho)$ sous sa première forme, on reconnaît que les $n+1$ valeurs de v tendent vers zéro. Quand la variable u décrit le cercle O dans le sens positif, la valeur de ρ devient $\rho_0 + 16$; la racine V reste holomorphe dans le voisinage du point O et se développe en une série convergente

$$(10) \qquad V = (-1)^\alpha 2^{\frac{n-1}{2}} u^n + \ldots,$$

suivant les puissances entières de u. La racine $v_t = \varphi\left(\frac{\rho_0 + 16t}{n}\right)$ devient $\varphi\left[\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right]$, et, par conséquent, se change en v_{t+1} ; ainsi les n autres racines forment autour du point O un système circulaire (v_0, v_1, $v_2, \ldots, v_{n-1}$) se permutant dans l'ordre des indices ; ces racines sont représentées, dans le même ordre, par la série

$$(11) \qquad v = 2^{\frac{n-1}{2n}} u^{\frac{1}{n}} + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de $u^{\frac{1}{n}}$.

406. Considérons maintenant le point critique $u = 1$. La fonction elliptique, au module complémentaire, admet les périodes $\omega_1 = -\omega' i$, $\omega'_1 = \omega i$ (n° 236), dont le rapport ρ' est égal à $-\frac{1}{\rho}$. Quand le point u décrit la droite $b_0 a_0$, la première période ω_1 reste réelle et positive, le rapport ρ, donné par l'équation (10), conserve la forme si, et de même le rapport ρ'. La période ω_1 est représentée par une intégrale définie analogue à celle qui donne ω (n° 221) ; faisant encore $g = 1$, il suffit de remplacer dans celle-ci k par k' ; elle peut être développée en une série pareille à la série (8) et convergente pour les valeurs de k'^2 dont le module est plus petit que 1 ; on en déduit, comme précédemment,

$$(12) \qquad \left(\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i}\frac{1}{k'} + Ak' + Bk'^3 + \ldots\right),$$

les coefficients A, B,... étant les mêmes que dans l'équation (9), et par suite

$$(13)\qquad \rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i}\left[\log\frac{k'^2}{k'^2_0} + A(k'^2 - k'^2_0) + \frac{B}{2}(k'^4 - k'^4_0) + \ldots\right].$$

Lorsque u tend vers 1, le coefficient s', dans l'expression $\rho' = r' + s'i$, augmente à l'infini; si l'on prend la fonction $\varphi(\rho)$ sous sa seconde forme, on reconnaît que la racine v_0 tend vers 1, et la racine V vers $(-1)^\alpha$. Quand la variable u décrit autour du point a_0, et dans le sens positif, un cercle ne comprenant aucun autre point critique, l'argument de k'^2 augmente de 2π, ρ' devient $\rho'_0 + 2$, et ρ égal à $\frac{\rho_0}{1-2\rho_0}$. La racine $v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi(n\rho')$, réelle et positive sur la droite $b_0 a_0$, reste holomorphe dans le voisinage du point a_0; on obtient son développement en posant $u = 1 - u'$, $v_0 = 1 - v'_0$; d'où

$$\psi^8(\rho) = 1-(1-u')^8 = 8u' + \ldots,\qquad u' = \frac{1}{8}\psi^8(\rho) + \ldots,$$

$$\psi^8\left(\frac{\rho}{n}\right) = 1-(1-v'_0)^8 = 8v'_0 + \ldots,\qquad v'_0 = \frac{1}{8}\psi^8\left(\frac{\rho}{n}\right) + \ldots,$$

et, en se servant de la seconde forme de la fonction $\psi(\rho)$,

$$(14)\qquad v'_0 = 2^{-(n-1)}u'^n + \ldots.$$

La racine V, après γ tours autour du point a_0, devient $(-1)^\alpha\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$; elle se change en une autre v_t que nous allons déterminer. D'après ce que nous avons dit au n° 404, les deux fonctions $\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$, $\varphi\left(\frac{\rho_0+16t}{n}\right)$ sont égales, ou égales et de signes contraires, lorsque leurs arguments satisfont à une relation de la forme

$$\frac{\rho_0+16t}{n} = \frac{8a'(1-2\gamma\rho_0)+(4b'+1)n\rho_0}{(4a+1)(1-2\gamma\rho_0)+2bn\rho_0} = \frac{8a' + [(4b'+1)n - 16a'\gamma]\rho_0}{(4a+1)+2[bn-(4a+1)\gamma]\rho_0},$$

avec la condition $(4a+1)(4b'+1) - 16ba' = 1$. Il faut pour cela que $bn - (4a+1)\gamma = 0$, ou $\frac{b}{4a+1} = \frac{\gamma}{n}$; ces deux fractions, étant irréduc-

tibles, auront leurs termes respectivement égaux, ou égaux et de signes contraires. Si n est de la forme $4n'+1$, on prendra $a=n'$, $b=\gamma$; la relation précédente se réduira alors à

$$\rho_0+16t=8a'+[(4b'+1)n-16a'\gamma]\rho_0;$$

on prendra $a'=2t$, et l'on déterminera les deux nombres entiers $4b'+1$ et t par la condition $32\gamma t-n(4b'+1)=-1$. Si n est de forme $4n'-1$, on prendra $a=-n'$, $b=-\gamma$, $a'=-2t$, et l'on déterminera les deux autres nombres par la condition $32\gamma t+n(4b'+1)=-1$. Le rapport des deux fonctions φ étant $(-1)^a$ ou $(-1)^\alpha$, la racine V devient égale à v_t; les deux nombres conjugués γ et t sont liés par cette condition, que le produit $32\gamma t$ donne le résidu -1 par rapport au diviseur n.

En attribuant à γ les $n-1$ valeurs successives $1, 2, \ldots, n-1$, on obtient pour t ces mêmes valeurs dans un certain ordre; il y a d'ailleurs réciprocité entre les deux nombres; on en conclut que les n racines $V, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, dans un certain ordre, forment un système circulaire autour du point critique $u=1$. Si l'on pose $V=(-1)^\alpha(1-v')$, elles sont représentées par la série

$$v'=2^{\frac{n-1}{n}}u'^{\frac{1}{n}}+\ldots; \tag{15}$$

nous désignerons ce système circulaire par $(V, v_{t_1}, v_{t_2}, \ldots, v_{t_{n-1}})$.

407. Considérons maintenant le lacet (a_1). Quand la variable u décrit l'arc b_0b_1, d'après l'équation (9), ρ acquiert la valeur ρ_0+2; la racine V devient $(-1)^\alpha\varphi(n\rho_0+2n)$ ou $e^{\frac{2n\pi i}{8}}V$; la racine v_t devient $\varphi\left(\frac{\rho_0+16t+2}{n}\right)=\varphi\left[\frac{\rho_0+16(t-\alpha)}{n}+2n\right]$, c'est-à-dire $e^{\frac{2n\pi i}{8}}v_{t-\alpha}$. Ceci est bien d'accord avec une remarque faite au n° 401, savoir que, quand on remplace u par $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, les valeurs de v sont multipliées respectivement par $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$. Supposons que l'on parte du point b_0 avec la valeur initiale V; en b_1 on a cette même valeur multipliée par le facteur $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$; sur le lacet b_1a_1, la racine acquerra la valeur qu'elle avait, au point

homologue, sur le lacet $b_0 a_0$, multipliée par ce facteur constant; quand on aura parcouru γ fois le lacet $b_1 a_1$, on aura en b_1 la valeur $e^{\frac{2n\pi i}{8}} v_{t_\gamma}$, qui, lorsqu'on revient en b_0, est $v_{t_\gamma+\alpha}$. Ainsi la loi de permutation sur le lacet (a_1) se déduit de celle qui a lieu sur le lacet (a_0), en ajoutant le nombre constant α aux indices des racines.

Considérons d'une manière générale le lacet (a_h). Quand la variable décrit l'arc $b_0 b_1 \ldots b_h$, ρ acquiert la valeur $\rho_0 + 2h$, la racine V devient égale à $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}$ V, et la racine v_t à $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} v_{t-h\alpha}$. En partant du point b_0 avec la valeur initiale V, quand la variable u aura décrit γ fois le lacet $b_h a_h$, on aura en b_h la valeur $e^{\frac{2hn\pi i}{8}} v_{t_\gamma}$, qui, au retour en b_0, est $v_{t_\gamma+h\alpha}$. Il suffit donc d'ajouter le nombre constant $h\alpha$ aux indices relatifs à la permutation sur le lacet (a_0) pour avoir la permutation sur le lacet (a_h).

408. La fonction elliptique, au module réciproque, admet les périodes $\omega_1 = \omega - \omega'$, $\omega'_1 = \omega'$ (n° 234), et les valeurs de ρ et ρ_1, qui se rapportent à ces deux couples de périodes, sont liées par la relation $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} - 1$; on en déduit

$$u_1 = \varphi(\rho_1) = \psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{1}{u}.$$

Concevons que, dans l'équation modulaire, on remplace u par $\frac{1}{u}$, et désignons par (v) les racines de la nouvelle équation; il est facile de reconnaître que ces racines sont réciproques de celles de la première équation. Considérons d'abord la racine

$$(\text{V}) = (-1)^\alpha \psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1} - 1\right)} = \frac{(-1)^\alpha}{\varphi\left[\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}\right]};$$

elle sera réciproque de la racine v_δ, si l'on a

$$\frac{\rho + 16\delta}{n} = \frac{8a' + [(4b'+1)n + 8a'(n-1)]\rho}{(4a+1) + [2bn + (4a+1)(n-1)]\rho}, \quad (-1)^{a+a'} = (-1)^\alpha.$$

Il faut, pour cela, que le coefficient de ρ dans le second dénominateur soit nul, et, par conséquent, que les deux fractions irréductibles $\frac{2b}{4a+1}$,

$-\frac{n-1}{n}$ soient égales. Si n est de la forme $4n'+1$, on prendra $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, et l'on déterminera les deux nombres b' et δ par la condition $16(n-1)\delta+n(4b'+1)=1$. Si n est de la forme $4n'-1$, on prendra $a=-n'$, $b=2n'-1$, $a'=-2\delta$, et l'on déterminera b' et δ par la condition $16(n-1)\delta-n(4b'+1)=1$. Dans les deux cas, l'indice δ est tel, que le nombre 16δ donne le résidu -1 par rapport au diviseur n. On verrait de même que la racine $(v_{n-\delta})$ est réciproque de V.

Considérons maintenant une autre racine

$$(v_{t'})=\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}\right)=\frac{1}{\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}-1\right)}=\frac{1}{\varphi\left[\frac{16t'-(16t'-1)\rho}{16t'+n-(16t'+n-1)\rho}\right]};$$

elle sera réciproque de v_t si l'on a

$$\frac{\rho+16t}{n}=\frac{8(16t'+n)a'+16t'(4b'+1)-[(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a']\rho}{(16t'+n)(4a+1)+32t'b-[(16t'+n-1)(4a+1)+2(16t'-1)b]\rho}.$$

Le coefficient de ρ, dans le second dénominateur, doit être nul; la fraction $\frac{4a+1}{2b}$ est irréductible; la fraction $\frac{-16t'+1}{16t'+n-1}$ est aussi irréductible, si t' n'est pas égal à $n-\delta$; ces deux fractions étant égales, on prendra $a=-4t'$, $b=8t'+\frac{n-1}{2}$. Le second dénominateur se réduit alors à n. On déterminera les deux nombres b' et a' par la condition

$$(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a'=-1,$$

et l'on fera

$$t=(16t'+n)\frac{a'}{2}+t'(4b'+1)=\frac{2a'+b'}{4}.$$

Le nombre a' devant être pair, et b' multiple de 4, posons $a'=2a''$, $b'=4b''$; la condition précédente devient

$$(16t'-1)b''+(16t'+n-1)a''=-t',$$

ou

$$(16t'-1)t+na''=-t';$$

l'indice t est tel, que le nombre $(16t'-1)t$ donne le résidu $-t'$ par

rapport au diviseur n. Il y a exception, lorsque $t' = n - \delta$; mais nous avons vu que la racine $(v_{n-\delta})$ est réciproque de V. Quel que soit n, la racine (v_0) est réciproque de v_0.

L'étude des valeurs de v, quand la variable u est très-grande, est ramenée ainsi à celle des valeurs de (v), quand la variable u_1 est très-petite; les $n+1$ valeurs de (v) s'annulant pour $u_1 = 0$, les $n+1$ valeurs de v deviennent infinies pour $u = \infty$. Sur la sphère, le point $u = \infty$ est donc un point critique analogue aux précédents; la racine v_δ est méromorphe et du degré n; les n autres sont du degré $\frac{1}{n}$ et forment un système circulaire.

Comme exemple, nous écrirons les permutations pour $n = 5$:

Lacets : (a_0) (a_1) (a_2) (a_3) (a_4)

$$(\mathrm{V} v_2 v_1 v_4 v_3),\quad (\mathrm{V} v_0 v_4 v_2 v_1),\quad (\mathrm{V} v_3 v_2 v_0 v_4),\quad (\mathrm{V} v_1 v_0 v_3 v_2),\quad (\mathrm{V} v_4 v_3 v_1 v_0);$$

sur les lacets (a_5), (a_6), (a_7), les permutations sont les mêmes que sur (a_0), (a_1), (a_2), parce qu'il suffit d'ajouter 5α aux indices. On a, d'ailleurs,

$$(\mathrm{V}) = \frac{1}{v_4},\quad (v_1) = \frac{1}{\mathrm{V}},\quad (v_0) = \frac{1}{v_0},\quad (v_2) = \frac{1}{v_3},\quad (v_3) = \frac{1}{v_1},\quad (v_4) = \frac{1}{v_2}.$$

Supposons que l'on unisse le point initial b_0 au point O', sur la sphère par un lacet formé d'un arc de grand cercle passant entre les points a_0 et a_7, et d'un petit cercle décrit autour du point O', dans le sens négatif par rapport à ce point; ce lacet peut être remplacé par un circuit positif se ramenant à la suite des lacets (a_0), (a_1), ..., (a_7), (O); la racine v_1 se reproduit, les autres se permutent dans l'ordre V, v_2, v_4, v_3, v_0.

409. Nous avons démontré au n° 401 l'existence de l'équation modulaire. On pourrait aussi la déduire des considérations précédentes; d'après le théorème du n° 135, la fonction v de u n'ayant pas sur toute la sphère de points singuliers autres que des pôles et des points critiques algébriques, et admettant $n+1$ valeurs en chaque point, est liée à la variable u par une équation algébrique. Le lacet (a_0), parcouru une fois, et le lacet (O), décrit $n-1$ fois, forment un système de lacets fondamentaux; car, si l'on part du point b_0 avec la valeur initiale V, après le lacet (a_0) on a v_{t_1}; en décrivant ensuite $n-1$ fois le cercle O, on

obtient dans l'ordre des indices croissants les $n-1$ autres racines; on conclut de là que l'équation modulaire est du degré $n+1$ par rapport à v, et irréductible. La somme des ordres négatifs de la fonction v sur la sphère, c'est-à-dire la somme des degrés des racines infinies, étant $n+1$, il résulte du corollaire II du n° 135 que l'équation est aussi du degré $n+1$ par rapport à u.

Formation de l'équation modulaire.

410. Supposons l'équation entre u et v mise sous la forme entière, et ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de v. Les $n+1$ valeurs de v conservant des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de u, le coefficient du premier terme peut être supposé égal à l'unité.

Nous avons vu (n° 405) que, pour $u=0$, toutes les racines s'annulent; leur produit $(-1)^\alpha u^{n+1}$, déduit des équations (10) et (11), est le dernier terme de l'équation. Quand on attribue à u une valeur très-petite, tous les coefficients de l'équation, excepté le premier, ont des valeurs très-petites; il y a deux manières de former le groupe des termes du degré le moins élevé (n° 34); le premier mode $Auv+(-1)^\alpha u^{n+1}$ donne la racine holomorphe V, et l'on a, par conséquent, $A=-2^{\frac{n-1}{2}}$; le second mode $v^{n+1}+Auv$ donne le système circulaire des n autres racines.

D'après une remarque faite au n° 403, l'équation se reproduit, quand on y remplace u et v respectivement par v et $(-1)^\alpha u$, et qu'on multiplie tous les termes par $(-1)^\alpha$; le premier et le dernier terme se permutent; il en résulte que les coefficients des différentes puissances de v sont, par rapport à u, du degré n au plus, et par conséquent que le degré de l'équation modulaire, par rapport aux deux variables u et v, ne surpasse pas $2n$. D'après ce que nous avons dit au n° 408, l'équation se reproduit aussi quand on y remplace u et v respectivement par $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$, et qu'on multiplie tous les termes par $(-1)^\alpha u^{n+1}v^{n+1}$; le terme Auv donnera le terme $(-1)^\alpha Au^n v^n$; on en conclut que l'équation modulaire est bien du degré $2n$. L'équation ne changeant pas quand on y remplace u et v par $-u$ et $-v$, tous les termes sont d'un degré pair.

Les coefficients de l'équation en ξ (n° 401) sont des polynômes entiers en u^8; pour $u = 0$, la première racine est finie et égale à $(-1)^\alpha 2^{-\frac{n-1}{2}}$; les autres deviennent infinies; cette équation est donc de la forme

$$(16) \qquad u^{8\beta_0}\xi^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n-1} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \ldots)\xi^{n+1-p} + (-2^{\frac{n-1}{2}} + b_n u^8 + \ldots)\xi + (-1)^\alpha = 0,$$

les exposants $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ étant tous plus grands que zéro. En remplaçant ξ par $\frac{v}{u^n}$, et multipliant tous les termes par u^{n+1}, on obtient l'équation modulaire

$$(17) \qquad u^{8(\beta_0-\alpha)}v^{n+1} + \sum_{p=1}^{p=n-1} u^{np+8(\beta_p-\alpha)}(a_p + b_p u^8 + \ldots)v^{n+1-p} + u(-2^{\frac{n-1}{2}} + b_n u^8 + \ldots)v + (-1)^\alpha u^{n+1} = 0.$$

Le premier coefficient devant se réduire à l'unité, on a $\beta_0 = \alpha$. Les exposants $np + 8(\beta_p - \alpha)$ sont plus grands que zéro; on prendra pour chacun d'eux la plus petite valeur de cette forme, et, dans les polynômes placés entre parenthèses, on ira jusqu'à une puissance de u^8 telle, que le degré total du coefficient ne surpasse pas n. On aura ensuite à déterminer un certain nombre de coefficients numériques; la condition que l'équation doit se reproduire, après chacune des deux substitutions dont nous avons parlé plus haut, en restreint beaucoup le nombre; d'après ce que nous avons dit au n° 406, le premier membre devant pour $u = 1$ se réduire à $(v-1)[v-(-1)^\alpha]^n$, on aura encore entre ces coefficients des relations qui suffiront à les déterminer dans les cas les plus simples.

411. Quand le nombre premier n ne surpasse pas 7, les polynômes placés entre parenthèses se réduisent à des constantes. Pour $n = 3$, on obtient immédiatement l'équation modulaire

$$(18) \qquad v^4 + 2u^3v^3 - 2uv - u^4 = 0.$$

Pour $n = 5$, elle est de la forme

$$v^6 + 4u^5v^5 + a_2u^2v^4 - a_2u^4v^2 - 4uv - u^6 = 0;$$

le premier membre devant se réduire à $(v-1)(v+1)^4$ pour $u=1$, on a $a_2=5$, et l'équation modulaire est

$$v^6+4u^5v^5+5u^2v^4-5u^4v^2-4uv-u^6=0. \tag{19}$$

Pour $n=7$, on trouve de même

$$v^8-8u^7v^7+28u^6v^6-56u^5v^5+70u^4v^4-56u^3v^3+28u^2v^2-8uv+u^8=0. \tag{20}$$

Pour $n=11$, l'équation modulaire est de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &v^{12}+u^3(a_1+2^5u^8)v^{11}+a_2u^6v^{10}-u(a_1-b_3u^8)v^9\\ &+a_4u^4v^8+a_5u^7v^7+u^2(a_2-a_2u^8)v^6-a_5u^5v^5-a_4u^8v^4\\ &-u^3(b_3-a_1u^8)v^3-a_2u^6v^2-u(2^5+a_1u^8)v-u^{12}=0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Le premier membre devant se réduire à $(v-1)(v+1)^{11}$ pour $u=1$, on a $a_1=-22$, $a_2=44$, $a_4=165$, $a_5=132$, $b_3=88$.

Dans tous les cas, le calcul des coefficients peut être effectué de la manière suivante. Supposons que la fonction $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi\rho i}{8}}\varphi(\rho)$, donnée par la formule (3) du n° 402, ait été développée en série suivant les puissances entières de $q=e^{\pi\rho i}$; en remplaçant dans ce développement q par q^n, on aura celui de $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{n\pi\rho i}{8}}\varphi(n\rho)$; les deux quantités u et V sont égales à ces deux séries entières, multipliées respectivement par $\sqrt{2}q^{\frac{1}{8}}$ et par $(-1)^\alpha\sqrt{2}q^{\frac{n}{8}}$. Si on les substitue dans l'équation (17), et si l'on divise tous les termes par $q^{\frac{n+1}{8}}$, le résultat de la substitution ne contiendra plus que des puissances entières de q; en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes, et égalant à zéro les coefficients des puissances successives de q, on obtiendra des équations linéaires entre les coefficients cherchés qui serviront à les déterminer. Il faudra pousser le développement en série assez loin pour avoir un nombre suffisant d'équations. Sohnke a calculé par ce procédé les coefficients des équations modulaires jusqu'au nombre premier 19 inclusivement (*Journal de Crelle*, t. XVI).

Points multiples.

412. Outre les points critiques, il existe des points multiples dans le voisinage desquels chacune des racines reste holomorphe.

L'équation (17) du n° 371 devient

$$g_1^2 = \frac{nu(1-u^8)}{v(1-v^8)}\frac{dv}{du}. \tag{22}$$

Lorsque, pour une valeur particulière de u, deux valeurs de v deviennent égales, les carrés des multiplicateurs correspondants sont différents, sans quoi les deux fonctions de transformation seraient égales, ou égales et de signes contraires, ce qui est impossible (n° 397); il en résulte que les deux valeurs de $\frac{dv}{du}$ diffèrent, et par conséquent que les points multiples de la courbe analytique représentée par l'équation modulaire sont à tangentes distinctes.

Nous allons démontrer qu'il n'y a pas d'autres points multiples que des points doubles. Au point u, si l'on suit un chemin convenable, trois racines quelconques peuvent être représentées par $(-1)^\alpha\varphi(n\rho)$, $\varphi\left(\frac{n}{\rho}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right)$, t étant un certain nombre plus petit que n. Pour qu'elles soient égales, il est nécessaire que l'on ait

$$n\rho = \frac{8a'n+(4b'+1)\rho}{(4a+1)n+2b\rho} = \frac{8a'_1n+16t(4b'_1+1)+(4b'_1+1)\rho}{(4a_1+1)n+32b_1t+2b_1\rho}, \tag{23}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} (4a+1)(4b'+1)-16ba'=1, & (-1)^{a+a'}=(-1)^\alpha, \\ (4a_1+1)(4b'_1+1)-16b_1a'_1=1, & (-1)^{a_1+a'_1}=(-1)^\alpha. \end{cases} \tag{24}$$

La quantité imaginaire ρ satisferait aux deux équations du second degré

$$\begin{cases} 2b_1n\rho^2+[(4a+1)n^2-(4b'+1)]\rho-8a'n=0, \\ 2b_1n\rho^2+[(4a_1+1)n^2+32b_1tn-(4b'_1+1)]\rho-8a'_1n-16t(4b'_1+1)=0, \end{cases} \tag{25}$$

dont les coefficients seraient proportionnels; on aurait donc

$$b_1a'n = b[a'_1n+2t(4b'_1+1)], \tag{26}$$

$$b_1[(4a+1)n^2-(4b'+1)] = b[(4a_1+1)n^2+32b_1tn-(4b'_1+1)]. \tag{27}$$

Nous remarquons d'abord que les deux nombres b et b_1 sont premiers avec n; supposons, par exemple, que b soit divisible par n; d'après la

première des relations (24), le nombre $4b'+1$ serait premier avec n; en vertu de la relation (27), b_1 serait aussi divisible par n, et, par suite, $4b'_1+1$ serait premier avec n; cette même relation (27) apprend alors que les deux nombres b et b_1 seraient divisibles par une même puissance de n, ce qui est impossible d'après la relation (26). Cela posé, en vertu de cette relation (26), le nombre $4b'_1+1$ doit être divisible par n, et, par suite, d'après la relation (27), le nombre $4b'+1$ est aussi divisible par n. Posons $4b'+1 = n(2\beta+1)$; la condition pour que la première des équations (25) ait ses racines imaginaires devient

$$[(4a+1)n-(2\beta+1)]^2+64ba' < 0,$$

et se réduit à

$$[(4a+1)n+(2\beta+1)]^2 < 4,$$

en tenant compte de la première des relations (24). Le nombre entier pair $(4a+1)n+(2\beta+1)$, devant avoir son carré plus petit que 4, est nul; cette relation (24) se réduit alors à $(2\beta+1)^2+16ba' = -1$, ce qui est impossible. Ainsi, en un même point u, trois racines de l'équation modulaire ne peuvent être égales entre elles, et, par conséquent, à part les points critiques, tous les points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes. Il est clair que ces points sont situés huit par huit aux sommets d'un octogone régulier.

413. On obtiendra ces points doubles en égalant à zéro le discriminant de l'équation modulaire, lequel a pour expression $D = \Pi(v_i - v_h)^2$, v_i et v_h étant deux racines quelconques; cette fonction symétrique des racines est égale à une fonction rationnelle de u, et, comme elle ne devient infinie pour aucune valeur finie de u, elle est entière. Évaluons son degré : pour $u=\infty$, les $n+1$ racines de l'équation modulaire deviennent infinies : l'une est du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$ (n° 408); n facteurs binômes $v_i - v_h$ sont du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$, et, par conséquent, le discriminant est un polynôme entier en u du degré $2n^2+n-1$. Pour $u=0$, les $n+1$ racines de l'équation modulaire s'annulent; l'une est du degré n, les autres du degré $\frac{1}{n}$ (n° 405); chaque facteur binôme est un infiniment petit du degré $\frac{1}{n}$, et, par con-

séquent, le polynôme D est divisible par u^{n+1}. Pour $u = 1$, une racine devient égale à 1, et les autres à $(-1)^\alpha$; lorsque le nombre α est pair, toutes les racines deviennent égales; si l'on pose $u = 1 - u'$, tous les facteurs binômes sont infiniment petits et du degré $\frac{1}{n}$ par rapport à u' (n° 406); le polynôme D est donc divisible par u'^{n+1} ou par $(1-u)^{n+1}$; la même chose ayant lieu en chacun des points critiques $u = e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, on en conclut que le polynôme est divisible par $(1-u^8)^{n-1}$. Lorsque le nombre α est impair, une racine est égale à 1, les autres à -1; parmi les facteurs binômes, $v - v'$, n ont des valeurs finies voisines de 2, les autres sont infiniment petits et du degré $\frac{1}{n}$; le polynôme D est divisible par $(1-u^8)^{n-1}$. D'une manière générale, le polynôme D est divisible par $(1-u^8)^{n+(-1)^\alpha}$. Ainsi le discriminant est de la forme

$$D = u^{n+1}(1-u^8)^{n+(-1)^\alpha}[a_0 + a_1 u^8 + a_2 u^{16} + \ldots + a_m u^{8m}].$$

Les deux premiers facteurs se rapportent aux points critiques; le polynôme placé entre parenthèses, et qui est du degré

$$8m = 8\left[\frac{n^2-1}{4} - n - (-1)^\alpha\right],$$

donne les points doubles.

Soit $f(u, v) = 0$ l'équation modulaire. En prenant le discriminant sous la forme $D = \Pi f'_{v_i}(u, v_i)$, on reconnaît sans peine que ce polynôme est carré parfait; on voit aussi qu'il est réciproque. Le nombre des points doubles est donc $n^2 - 1 - 4n - 4(-1)^\alpha$.

Calcul des fonctions de transformation.

414. Proposons-nous maintenant de calculer les fonctions de transformation. La première de ces fonctions est (n° 349)

$$(28) \qquad \lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right) = g_1 \frac{\lambda(z, \omega, \omega')\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}}.$$

Si l'on pose

$$x = u^2\lambda(z, \omega, \omega'), \quad y = v^2\lambda\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right),$$

et si l'on se sert des polynômes $V(x)$ définis au n° 371, la question

est ramenée à la détermination de la fraction rationnelle

(29) $$y = \frac{V_1(x)}{V(x)}.$$

D'après la première des relations (15) de ce même numéro, les deux polynômes ont les mêmes coefficients; nous les représenterons par

$$V(x) = a^{(0)} + a^{(1)}x^2 + a^{(2)}x^4 + \ldots + a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x^{n-1},$$
$$V_1(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}x + a^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}x^3 + \ldots + a^{(1)}x^{n-2} + a^{(0)}x^n\right].$$

Le calcul de ces coefficients peut être effectué à l'aide de la relation (16), entre trois coefficients consécutifs, que l'on déduit de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi. Si l'on y remplace α par sa valeur $\frac{1}{2}\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right)$, cette relation devient

(30) $$\left\{\begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)a^{(m+1)} + 2m(n-2m)\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right)a^{(m)} \\ &\quad + \frac{n}{2}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{da^{(m)}}{du} + (n-2m+1)(n-2m+2)a^{(m-1)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le premier et le dernier coefficient sont

(31) $$a^{(0)} = \sqrt{\frac{g_1 k'_1}{nk'}}, \quad a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} g_1 \frac{v^2}{u^2} a^{(0)},$$

et, en vertu de l'équation (22), on a,

(32) $$(a^{(0)})^4 = \frac{1}{n}\frac{u}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{1}{n}\frac{uf'_u}{vf'_v}.$$

Afin d'éviter les quantités irrationnelles, nous mettrons l'équation (30) sous la forme

(33) $$\left\{\begin{aligned} &(2m+1)(2m+2)\frac{a^{(m+1)}}{a^{(m)}} + \frac{n}{8}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{d\log\left(\frac{a^{(m)}}{a^{(0)}}\right)^4}{du} \\ &\quad + (n-2m+1)(n-2m+2)\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}} \\ &\quad + 2m(n-2m)\left(u^4 + \frac{1}{u^4}\right) + \frac{n}{8}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme est connu et rationnel, d'après l'équation (32). En faisant successivement $m = 0$, $m = 1$, $m = 2, \ldots,$ on obtiendra les rapports des coefficients au premier, exprimés par des fractions rationnelles en u et v. La connaissance de ces rapports suffit pour la détermination de la fonction de transformation (29).

D'après le raisonnement du n° 387, les deux quantités

$$\pm g_1 = \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{\lambda^2(p\varepsilon)\,\nu^2(p\varepsilon)}{\mu^2(p\varepsilon)}, \quad k'k'_1 = k'^{n+1} \prod_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu^4(p\varepsilon)},$$

données par les formules (5) et (11) des numéros 349 et 351, peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de u et v. Il en résulte d'abord que la quantité $k'^2 k_1'^2$ ou $(1-u^8)(1-v^8)$ est égale au carré d'une expression rationnelle en u et v. De l'équation (22) on déduit

$$(34) \qquad g_1^2 = -\frac{nu(1-u^8)f'_u}{v(1-v^8)f'_v} = n^2 \frac{[u(1-u^8)f'_u]^2}{(1-u^8)(1-v^8)(-nuvf'_u f'_v)};$$

la quantité $-nuvf'_u f'_v$ doit aussi être égale au carré d'une expression rationnelle en u et v; en prenant la racine carrée, on aura le multiplicateur g_1, exprimé rationnellement au moyen de u et v.

De l'équation (30), dans laquelle on ferait $m = 0$ et $m = \frac{n-1}{2}$, on déduit

$$(35) \qquad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}} = -\frac{n}{16}\,\frac{1-u^8}{u^3}\,\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du},$$

$$(36) \qquad \frac{a^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}}{a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} = -\frac{n-1}{6}\,\frac{1+u^8}{u^4} - \frac{n}{48}\,\frac{1-u^8}{u^3}\,\frac{d\log\left[a^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^4}{du}.$$

On obtiendra ainsi le deuxième et l'avant-dernier coefficient.

415. On peut aussi se servir, pour le calcul des coefficients, de deux équations différentielles simultanées, analogues aux équations différentielles d'Abel (n° 345), et auxquelles satisfont les deux fonctions V

et V_1. Ces équations sont

$$(37)\quad \begin{cases} (1-2\alpha x^2+x^4)\left[V_1\dfrac{d^2V_1}{dx^2}-\left(\dfrac{dV_1}{dx}\right)^2\right] \\ \qquad +2(x^3-\alpha x)V_1\dfrac{dV_1}{dx}+\dfrac{v^2}{u^2}g_1^2V^2-\left(nx^2+2\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)V_1^2=0, \\ (1-2\alpha x^2+x^4)\left[V\dfrac{d^2V}{dx^2}-\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2\right] \\ \qquad +2(x^3-\alpha x)V\dfrac{dV}{dx}+\dfrac{v^2}{u^2}g_1^2V_1^2-\left(nx^2+2\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)V^2=0, \end{cases}$$

2α désignant la quantité $k+\frac{1}{k}$ ou $u^4+\frac{1}{u^4}\cdot$ Si l'on y remplace V et V_1 par leurs valeurs, et que l'on égale à zéro l'ensemble des termes du même degré, on aura des relations entre les coefficients $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$.

Nous appliquerons ces méthodes aux cas les plus simples.

Transformation du troisième degré.

416. Pour $n=3$, l'équation modulaire (n° 411) est (18)

$$f(u,v)=\tfrac{1}{2}(v^4-u^4-2uv+2u^3v^3)=0.$$

Si l'on représente par t le produit uv, on a

$$uf'_u=3t^3-t-2u^4,\quad vf'_v=3t^3-t+2v^4,\quad -uvf'_uf'_v=3t^2(1-t^2)^2.$$

On déduit d'ailleurs de l'équation modulaire la relation

$$(38)\qquad (1-u^8)(1-v^8)=(1-u^2v^2)^4;$$

il en résulte

$$g_1=\frac{(3t^3-t-2u^4)(1-t^2)}{t(1-v^8)}=\frac{2u^3+v}{-v}.$$

Les formules relatives à la transformation du troisième degré sont donc

$$(39)\qquad g_1=\frac{2u^3+v}{-v},\quad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=-g_1\frac{u^2}{v^2},\quad y=\frac{g_1\dfrac{v^2}{u^2}x-x^3}{1-g_1\dfrac{v^2}{u^2}x^2}.$$

Lorsque le module k est réel et plus petit que l'unité, le multiplicateur de la première fonction est réel et positif. Pour les valeurs très-petites de u, on a approximativement $v = -\frac{1}{2}u^3$, $g_1 = 3$, ce qui détermine le signe. Mais on peut supposer que, dans les formules précédentes, v désigne l'une quelconque des quatre racines de l'équation modulaire; car, lorsque la variable u décrit différents lacets, la racine V, sur laquelle nous avons raisonné, reproduit toutes les autres, et la fonction de transformation correspondante devient égale à chacune des autres, ou égale et de signe contraire : cela dépend du signe de g_1. Les formules (39) représentent ainsi les quatre transformations du troisième degré.

Transformation du cinquième degré.

417. Nous mettrons l'équation modulaire (19) sous la forme

$$(40) \qquad f(u, v) = (u^2 - v^2)^3 + 8u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0.$$

En prenant les dérivées partielles du polynôme, et retranchant trois fois ce polynôme, on a

$$uf'_u = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2] - 8uv(1 + u^4v^4),$$
$$-vf'_v = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2] + 8uv(1 + u^4v^4).$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(41) \qquad G = (u^2 + v^2)[3(u^2 - v^2)^2 + 8u^2v^2], \quad H = 8uv(1 + u^4v^4),$$
$$uf'_u = P = G - H, \quad -vf'_v = Q = G + H.$$

Si, dans l'expression

$$H^2 = 64[u^2v^2(1 - u^4v^4)^2 + 4u^6v^6],$$

on remplace $uv(1 - u^4v^4)$ par sa valeur tirée de l'équation (40), on trouve

$$(42) \qquad H^2 = 4(u^2 + v^2)^2[(u^2 - v^2)^4 + 12u^2v^2(u^2 - v^2)^2 + 16u^4v^4],$$

et, par suite,

$$(43) \qquad PQ = G^2 - H^2 = 5(u^2 + v^2)^2(u^2 - v^2)^4.$$

On a aussi

$$(44)\qquad (1-u^8)(1-v^8) = \frac{(u^2-v^2)^6}{16u^2v^2},$$

$$g_1 = \frac{(u^2-v^2)P}{-4uv(1-v^8)(u^2+v^2)} = \frac{v-u^5}{v(1-uv^3)}, \quad \frac{a^{(2)}}{a^{(0)}} = g_1\frac{u^2}{v^2},$$

$$(a^{(0)})^4 = \frac{1}{5}\frac{P}{Q}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{v}{u}\frac{P}{Q}.$$

On calculera le rapport du second coefficient au premier à l'aide de l'équation (35)

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}} = -\frac{5}{16}\frac{1-u^8}{u^3}\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}.$$

On a

$$\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u} + \left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\frac{dv}{du},$$

et, en remplaçant $\frac{dv}{du}$ par sa valeur,

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = \left(v\frac{\partial P}{\partial v} - u\frac{\partial Q}{\partial u}\right) + \frac{1}{PQ}\left(Q^2u\frac{\partial P}{\partial u} - P^2v\frac{\partial Q}{\partial v}\right).$$

Si, dans le dernier terme, on met à la place de Q^2 et de P^2 les quantités égales $PQ + 2HQ$, $PQ - 2HP$, cette équation devient

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} = -2\left(u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v}\right) + \frac{2H}{PQ}\left(Qu\frac{\partial P}{\partial u} + Pv\frac{\partial Q}{\partial v}\right).$$

Calculons le dernier terme

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u} + Pv\frac{\partial Q}{\partial v} = G\left(u\frac{\partial G}{\partial u} + v\frac{\partial G}{\partial v}\right) + H\left(u\frac{\partial G}{\partial u} - v\frac{\partial G}{\partial v}\right) - H\left(u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v}\right).$$

Comme on a

$$u\frac{\partial G}{\partial u} + v\frac{\partial G}{\partial v} = 6G, \quad u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v} = 16uv(1+5u^4v^4),$$

$$u\frac{\partial G}{\partial u} - v\frac{\partial G}{\partial v} = 2(u^2-v^2)[9(u^2-v^2)^2 + 32u^2v^2],$$

il vient

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u}+Pv\frac{\partial Q}{\partial v}=6G^2+2H(u^2-v^2)[9(u^2-v^2)^2+32u^2v^2]-16Huv(1+5u^4v^4),$$

et, en remplaçant G^2 par $PQ+H^2$,

$$Qu\frac{dP}{du}+Pv\frac{dQ}{dv}=6PQ+2H[9(u^2-v^2)^3+32u^2v^2(u^2-v^2)+16uv(1-u^4v^4)];$$

en vertu de l'équation modulaire (40), cette expression se réduit à

$$Qu\frac{\partial P}{\partial u}+Pv\frac{\partial Q}{\partial v}=6PQ+10H(u^2-v^2)^3.$$

On a ainsi

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=64uv(1-u^4v^4)+\frac{20H^2(u^2-v^2)^3}{PQ},$$

et, en remplaçant H^2 et PQ par leurs valeurs (42) et (43), et tenant compte de l'équation modulaire,

$$uQ\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\frac{64u^2v^2(u^2+v^2)^2}{u^2-v^2},\quad \frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\frac{64uv^2P}{4(u^2-v^2)^5}.$$

On en déduit

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=-4\frac{v^2(1-u^8)P}{u^2(u^2-v^2)^5}=-g_1\frac{v(u^2+v^2)}{u^3}.$$

On obtient de cette manière la formule de transformation

$$(45)\qquad g_1=\frac{v-u^5}{v(1-uv^3)},\quad y=\frac{g_1\dfrac{v^2}{u^2}x-g_1\dfrac{v(u^2+v^2)}{u^3}x^3+x^5}{1-g_1\dfrac{v(u^2+v^2)}{u^3}x^2+g_1\dfrac{v^2}{u^2}x^4},$$

On arrive plus rapidement au résultat en se servant de l'une des équations (37). Parmi les relations qu'elle fournit, les deux premières sont

$$6\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2+8\alpha\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}-\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^4-12\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}+5=0,$$

$$\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2\left[\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2-4\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}-3\right]-8\alpha\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}+2\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^3-4\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2+10\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}=0.$$

L'élimination des termes contenant $\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}$ à la première puissance donne

$$\left(\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}\right)^2 = \frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\left[\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right)^2 - 2\left(\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}\right) + 5\right];$$

on verra que le second membre est carré, et l'on fera le choix du signe en substituant dans l'une des deux relations.

Pour $n = 3$, l'équation modulaire n'a pas de point double; pour $n = 5$, elle en a huit (n° 413). Le produit PQ, donné par la formule (43), est nul en tous les points où deux racines sont égales; le second facteur $u^2 - v^2$ correspond aux points critiques, le premier $u^2 + v^2$ aux points doubles; mais l'équation (40), dans laquelle on fait $v^2 = -u^2$, se réduit à $u^8 + 1 = 0$, de sorte que le discriminant est $u^6(1-u^8)^4(1+u^8)^2$.

Transformation du septième degré.

418. L'équation modulaire (20) se met sous la forme

$$f(u, v) = \frac{1}{8}[(1-u^8)(1-v^8) - (1-uv)^8] = 0. \tag{46}$$

Nous poserons

$$uv = t, \quad P = t(1-t)^7 + t^8,$$

d'où

$$u^8 + v^8 = 1 + t^8 - (1-t)^8 = 1 + P - (1-t)^7.$$

On en déduit

$$\tag{47} \left\{\begin{aligned} uf'_u &= P - u^8 = \frac{(1-t)^7(t-u^8)}{1-u^8}, \\ vf'_v &= P - v^8 = \frac{(1-t)^7(t-v^8)}{1-v^8}, \\ (P-u^8)(P-v^8) &= -7t^2(1-t)^8(1-t+t^2)^2, \end{aligned}\right.$$

$$g_1 = \frac{(1-u^8)(u^8-P)}{t(1-t^8)(1-t+t^2)} = \frac{u^8-t}{t(1-t)(1-t+t^2)},$$

$$(a^{(0)})^1 = -\frac{1}{7}\frac{P-u^8}{P-v^8}, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{v(P-u^8)}{u(P-v^8)}.$$

L'équation (35) nous donnera le rapport du second coefficient au premier. On a

$$u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=\left(u\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}-8u^8\right)\frac{\mathrm{P}-v^8}{\mathrm{P}-u^8}+\left(v\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v}-8v^8\right)\frac{\mathrm{P}-u^8}{\mathrm{P}-v^8}-u\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}-v\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v};$$

en remarquant que

$$u\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=v\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v}=t(1-t)^7-7t^2(1-t)^6+8t^8=8\mathrm{P}-7t(1-t)^6,$$

cette équation se simplifie et devient

$$\begin{aligned} u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du} &= -8(u^8+v^8)-7t(1-t)^6\left(\frac{\mathrm{P}-v^8}{\mathrm{P}-u^8}+\frac{\mathrm{P}-u^8}{\mathrm{P}-v^8}-2\right)\\ &= -8(u^8+v^8)+\frac{(u^8-v^8)^2}{t(1-t)^2(1-t+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $(u^8-v^8)^2$ par sa valeur

$$\begin{aligned} (u^8-v^8)^2 &= (u^8+v^8)^2-4t^8=(u^8+v^8-2t^4)(u^8+v^8+2t^4)\\ &= [(1-t^4)^2-(1-t)^8][(1+t^4)^2-(1-t)^8]\\ &= [(1-t^4)-(1-t)^4][(1-t^4)+(1-t)^4][(1+t^4)-(1-t)^4][(1+t^4)+(1-t)^4]\\ &= 16t^2(1-t)^2(1-t+t^2)^2(2-t+t^2)(1-t+2t^2)(2-3t+2t^2), \end{aligned}$$

on trouve

$$u(\mathrm{P}-v^8)\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=16t^2(1-t+t^2)(2-t+2t^2),$$

$$\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du}=-\frac{16}{7}\,\frac{\mathrm{P}-u^8}{u}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)^8(1-t+t^2)},$$

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=\frac{(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)}{u^4}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)^8(1-t+t^2)}=\frac{t-u^8}{u^4}\,\frac{2-t+2t^2}{(1-t)(1-t+t^2)}.$$

419. Nous connaissons le dernier coefficient $a^{(3)}=-g_1\frac{v^2}{u^2}a^{(0)}$. On en déduit, en remplaçant g_1 par sa valeur tirée de l'équation (31),

$$(a^{(3)})^2=49\,\frac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v_8)}\,(a^{(0)})^6.$$

L'équation (36) nous donnera le rapport de l'avant-dernier coefficient au dernier. On a

$$\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du}=\frac{d\log\dfrac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v^8)}}{du}+\frac{3}{2}\,\frac{d\log(a^{(0)})^4}{du},$$

$$\begin{aligned}
u(\mathrm{P}-v^8)\,\frac{d\log\dfrac{v^4(1-u^8)}{u^4(1-v^8)}}{du}
&=4(u^8+v^8-2\mathrm{P})-8\,\frac{u^8(1-v^8)(\mathrm{P}-v^8)+v^8(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)}{(1-u^8)(1-v^8)}\\
&=4(u^8+v^8-2\mathrm{P})-8\,\frac{t(u^8+v^8)-2t^8}{1-t}\\
&=24t(1-t+t^2)(1-4t+4t^2-4t^3+t^4),
\end{aligned}$$

$$u(\mathrm{P}-v^8)\,\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du}=24t(1-t+t^2)^3,$$

$$\frac{d\log(a^{(3)})^2}{du}=-\frac{24}{7}\,\frac{(\mathrm{P}-u^8)(1-t+t^2)}{ut(1-t)^8},$$

et, par suite,

$$\frac{a^{(2)}}{a^{(3)}}=-\frac{1+u^8}{u^4}+\frac{(1-u^8)(\mathrm{P}-u^8)(1-t+t^2)}{u^4t(1+t)^8}=\frac{t^3-u^8}{u^4t(1-t)}.$$

On obtient ainsi les formules

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}
&g_1=\frac{u^8-t}{t(1-t)(1-t+t^2)},\quad \frac{a^{(1)}}{a^{(0)}}=-g_1\,\frac{t(2-t+2t^2)}{u^4},\\
&\frac{a^{(2)}}{a^{(0)}}=-g_1\,\frac{(t^3-u^8)t}{u^8(1-t)},\quad \frac{a^{(3)}}{a^{(0)}}=-g_1\,\frac{v^2}{u^2},\\
&y=-\frac{\dfrac{a^{(3)}}{a^{(3)}}x+\dfrac{a^{(2)}}{a^{(0)}}x^3+\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}x^5+x^7}{1+\dfrac{a^{(1)}}{a^{(0)}}x^2+\dfrac{a^{(2)}}{a^{(0)}}x^4+\dfrac{a^{(3)}}{a^{(0)}}x^6}.
\end{aligned}\right.$$

Pour $n=7$, l'équation modulaire a seize points doubles; d'après la troisième des formules (47), ils sont donnés par l'équation $1-t+t^2=0$; puisque $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$, on a $t^3=-1$, et par suite, $u^8+v^8=2t$, $u^8v^8=t^2$; on en déduit $u^8=v^8=t$, d'où $1-u^8+u^{16}=0$. Ainsi le discriminant est $u^8(1-u^8)^8(1-u^8+u^{16})^2$.

82.

Équation différentielle entre les modules.

420. Nous avons vu (n° **279**) qu'une période quelconque de l'intégrale elliptique de première espèce satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(49)\qquad \frac{d\left(kk'^2\frac{d\xi}{dk}\right)}{dk} - k\xi = 0,$$

qui admet, par conséquent, pour intégrale générale $\xi = a\omega + b\omega'$, a et b étant deux constantes arbitraires. Si l'on pose $\zeta = kk'^2\xi^2$, cette équation devient

$$(50)\qquad 2\zeta\frac{d^2\zeta}{dk^2} - \left(\frac{d\xi}{dk}\right)^2 + \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}\right)^2\zeta^2 = 0.$$

Considérons une autre solution $a'\omega + b'\omega'$ de l'équation (49), et posons

$$\rho = \frac{a'\omega + b'\omega'}{a\omega + b\omega'},$$

nous aurons, en vertu de la relation (35) du n° **279**,

$$\xi^2\frac{d\rho}{dk} = (ab' - ba')\left(\omega\frac{d\omega'}{dk} - \omega'\frac{d\omega}{dk}\right) = -\frac{2\pi i(ab' - ba')}{kk'^2},$$

et, par suite,

$$\zeta = -2\pi i(ab' - ba')\frac{dk}{d\rho}.$$

En substituant dans l'équation (50), et laissant la variable indépendante quelconque, on obtient l'équation

$$(51)\qquad 2\,dk\,d^3k - 3(d^2k)^2 + \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}\right)^2 dk^4 = \left(\frac{dk}{d\rho}\right)^2[2\,d\rho\,d^3\rho - 3(d^2\rho)^2].$$

En appelant ω_1, ω'_1 les périodes elliptiques relatives à un autre module k_1, et posant

$$\rho_1 = \frac{a'_1\omega_1 + b'_1\omega'_1}{a_1\omega_1 + b_1\omega'_1},$$

on a de même

$$2dk_1 d^3k_1 - 3(d^2k_1)^2 + \left(\frac{1+k_1^2}{k_1 k_1'^2}\right)^2 (dk_1)^4 = \left(\frac{dk_1}{d\rho_1}\right)^2 [2d\rho_1 d^3\rho_1 - 3(d^2\rho_1)^2].$$

Lorsque les deux modules k et k_1 varient simultanément, de manière que l'on ait constamment $\rho_1 = \rho$, des deux équations précédentes on déduit l'équation différentielle du troisième ordre

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &2dk\,dk_1(dk\,d^3k_1 - dk_1\,d^3k) - 3[(dk\,d^2k_1)^2 - (dk_1\,d^2k)^2] \\ &\qquad + (dk\,dk_1)^2\left[\left(\frac{1+k_1^2}{k_1 k_1'^2}dk_1\right)^2 - \left(\frac{1+k^2}{kk'^2}dk\right)^2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

La relation $\rho_1 = \rho$, qui est de la forme

$$(53)\qquad \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\alpha'\omega + \beta'\omega'}{\omega + \beta\omega'},$$

α', β', β étant trois constantes arbitraires, en est l'intégrale générale.

Les deux couples de périodes des fonctions elliptiques qui résolvent le problème de la transformation satisfont à une relation de cette forme (n° 390); on en conclut, comme cas particulier, que l'équation modulaire, quel que soit son degré, donne une solution de l'équation (52). (Jacobi, *Fundamenta nova*.)

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

421. Galois avait annoncé que, jusqu'à $n = 11$, le degré de l'équation modulaire peut être abaissé d'une unité. MM. Hermite et Betti ont donné de ce théorème deux démonstrations basées sur des principes différents. Considérons une fonction symétrique ou alternée (v_α, v_β) de deux racines de l'équation modulaire, puis la même fonction de deux autres racines, et ainsi de suite jusqu'aux deux dernières racines, et désignons par U une fonction symétrique de ces $\frac{n+1}{2}$ quantités; on démontre aisément, à l'aide des lois de permutation établies précédemment, que, lorsque n ne surpasse pas 11, parmi les différentes manières d'associer les racines deux à deux, il en est pour lesquelles la fonction U n'acquiert que n valeurs pour chaque valeur de u et, par conséquent, satisfait à une équation du degré n.

Autour de chacun des points critiques, une racine v_α reste holomorphe, et la racine associée v_β acquiert les n autres valeurs; la quantité (v_α, v_β) et, par conséquent, la fonction U prennent n valeurs, formant un système circulaire. Si cette fonction n'acquiert dans toute l'étendue du plan que n valeurs, il est impossible que deux de ces valeurs aient un élément commun (v_α, v_β); car, par un chemin convenable, v_α devient égal à la racine qui reste holomorphe autour de l'un des points critiques; si deux valeurs de U avaient un élément commun (v_α, v_β), sans être identiques, elles engendreraient deux systèmes circulaires de n valeurs chacun. On peut associer deux racines v_α et v_β prises à volonté; car, autour du point critique où v_α reste holomorphe, v_β acquiert les n autres valeurs. Dans une valeur de la fonction U, deux éléments ne peuvent présenter une même différence d'indices, parce que, si l'on décrivait le lacet (O) un certain nombre de fois, l'un des éléments de-

viendrait égal à l'autre. Dès qu'on a reconnu que le lacet (a_0) fait acquérir à la fonction U les mêmes valeurs que le lacet (O), on est certain que cette fonction n'a que n valeurs dans tout le plan, les autres lacets se ramenant aux lacets (a_0) et (O).

422. Ces considérations permettent de trouver aisément les modes favorables. Nous associerons les racines par différence, et nous ferons le produit des $\frac{n+1}{2}$ quantités.

Pour $n = 5$, si l'on prend comme premier facteur $V - v_0$, la combinaison

$$U = (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3) \tag{1}$$

est la seule dans laquelle la différence des indices dans les derniers facteurs ne soit pas la même. Par le lacet (O), cette fonction acquiert les cinq valeurs

$$\begin{cases} U_0 = (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3), \\ U_1 = (V - v_1)(v_2 - v_0)(v_3 - v_4), \\ U_2 = (V - v_2)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0), \\ U_3 = (V - v_3)(v_4 - v_2)(v_0 - v_1), \\ U_4 = (V - v_4)(v_0 - v_3)(v_1 - v_2). \end{cases} \tag{2}$$

D'après la loi de permutation écrite au n° 408, le lacet (a_0) reproduit ces mêmes valeurs dans un autre ordre; on en conclut que la fonction U n'a que les cinq valeurs précédentes, et, par conséquent, qu'elle satisfait à une équation algébrique entre u et U, du cinquième degré en U.

Pour $n = 7$, il y a deux combinaisons favorables

$$U = (V - v_0)(v_2 - v_3)(v_4 - v_6)(v_1 - v_5), \tag{3}$$

$$U = (V - v_0)(v_2 - v_6)(v_5 - v_4)(v_1 - v_3). \tag{4}$$

On les obtient de la manière suivante : sur le lacet (a_0) la loi de permutation est $(V, v_5, v_6, v_4, v_3, v_1, v_2)$. Prenons comme premier facteur $V - v_0$, et comme second $v_2 - v_\alpha$, par exemple $v_2 - v_3$; quand on décrit le lacet (a_0), le produit $(V - v_0)(v_2 - v_3)$ devient $(v_5 - v_0)(V - v_1)$: le premier produit complété, devant reproduire le second après le lacet (O) parcouru une fois, contiendra le facteur $v_4 - v_6$, qui donne

naissance à $v_5 - v_0$, et, par suite, le dernier facteur sera $v_1 - v_5$. Par le lacet (O), la fonction (3) acquiert sept valeurs; ces mêmes valeurs se reproduisent sur le lacet (a_0); on en conclut que la fonction U satisfait à une équation algébrique entre u et U, du septième degré en U. La fonction (4) jouit de la même propriété.

Pour $n = 11$, on a aussi deux combinaisons favorables

$$(5) \qquad U = (V - v_0)(v_{10} - v_5)(v_3 - v_6)(v_9 - v_7)(v_2 - v_1)(v_4 - v_8),$$

$$(6) \qquad U = (V - v_0)(v_{10} - v_9)(v_8 - v_5)(v_7 - v_3)(v_6 - v_1)(v_2 - v_4),$$

que l'on obtient de la même manière. Sur le lacet (a_0) la loi de permutation est $(V, v_1, v_6, v_4, v_3, v_9, v_2, v_8, v_7, v_5, v_{10})$. On prendra comme premier facteur $V - v_0$ et comme second $v_{10} - v_\alpha$. Pour $n = 13$, il n'y a pas de combinaison favorable.

423. De l'abaissement du degré de l'équation modulaire pour $n = 5$, M. Hermite a déduit une méthode de résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques (*Comptes rendus*, t. XVIII). Formons l'équation du cinquième degré en U. Les valeurs de U étant finies pour toutes les valeurs finies de u, le coefficient de U^5 est égal à l'unité. Pour $u = \infty$, les six valeurs de v sont infinies, l'une du degré 5, les autres du degré $\frac{1}{5}$ (n° 408); les cinq valeurs de U sont infinies et du degré $\frac{27}{5}$; la somme des ordres négatifs de la fonction U étant égale à 27, l'équation est du degré 27 par rapport à u (n° 135).

Pour les valeurs de u très-petites, les valeurs approchées de v sont

$$V = -2^{-2}u^5, \quad v_0 = 2^{\frac{2}{5}}u^{\frac{1}{5}}, \quad v_1 = v_0 e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad v_2 = v_0 e^{2\frac{2\pi i}{5}}, \quad v_3 = v_0 e^{3\frac{2\pi i}{5}}, \quad v_4 = v_0 e^{4\frac{2\pi i}{5}}.$$

et, par conséquent, celles de U sont

$$(7) \quad U_0 = 2^{\frac{6}{5}}5^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{5}}, \quad U_1 = U_0 e^{\frac{6\pi i}{5}}, \quad U_2 = U_0 e^{2\frac{6\pi i}{5}}, \quad U_3 = U_0 e^{3\frac{6\pi i}{5}}, \quad U_4 = U_0 e^{4\frac{6\pi i}{5}}.$$

Nous avons posé $\xi = \frac{v}{u^{\frac{1}{5}}}$; posons de même

$$\Phi = \frac{U}{u^{\frac{3}{5}}} = (\xi - \xi_0)(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3);$$

les coefficients de l'équation en ξ étant des polynômes entiers en u^8 (n° **401**), ceux de l'équation en Φ jouiront de la même propriété ; les valeurs de Φ ne devenant infinies que pour $u = 0$, cette équation est de la forme

$$u^{8\beta_0}\Phi^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \ldots)\Phi^{5-p} + (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + \ldots) = 0.$$

En remplaçant Φ par $\frac{U}{u^{15}}$ et multipliant par u^3, on obtient l'équation

$$u^{8(\beta_0-9)}U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8(\beta_p-9)+15p}(a_p + b_p u^8 + \ldots)U^{5-p} + u^3(a_5 + a_5 u^8 + \ldots) = 0.$$

Pour les valeurs très-petites de u, les valeurs de U étant très-petites du degré $\frac{3}{5}$, et formant un système circulaire, on a $\beta_0 = 9$, $a_5 = -2^6 5^{\frac{5}{2}}$, $8(\beta_p - 9) + 15p > 3$, et, par suite, $\beta_p \geqq 10 - 2p$; nous prendrons $\beta_p = 10 - 2p$. L'équation cherchée est donc de la forme

$$(8)\quad U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{8-p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16})U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + d_5 u^{24}) = 0.$$

Si l'on considère la fonction

$$(U) = [(V) - (v_0)][(v_1) - (v_4)][(v_2) - (v_3)],$$

relative à la variable $u_1 = \frac{1}{u}$, on a

$$(U) = \frac{-1}{V v_0 v_1 v_2 v_3 v_4}(V - v_2)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0) = \frac{U}{u^6},$$

puisque le produit des racines de l'équation modulaire (n° **411**) est égal à $-u^6$. Ainsi l'équation (8) ne doit pas changer quand on y remplace u par $\frac{1}{u}$ et U par $\frac{U}{u^6}$. Mais, par cette substitution, l'équation devient

$$U^5 + \sum_{p=1}^{p=4} u^{7p-8}(a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})U^{5-p} + u^3(d_5 + c_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0;$$

on en conclut qu'elle ne contient pas de terme en U^4 et que l'on a

$$b_2 = c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad b_3 = a_3, \quad c_4 = a_4, \quad d_5 = a_5, \quad c_5 = b_5.$$

L'équation se réduit à

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &U^5 + a_2 u^6 U^3 + a_3 u^5 (1 + u^8) U^2 + u^4 (a_4 + b_4 u^8 + a_4 u^{16}) U \\ &\qquad + u^5 (a_5 + b_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $u = 1$, la racine v_0 de l'équation modulaire est égale à $+1$, et les cinq autres à -1 (n° 406); les cinq valeurs de U s'annulent; les polynômes en u, coefficients des diverses puissances de U dans l'équation (9), devant s'annuler pour $u = 1$, on en déduit $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -a_5$, ce qui réduit l'équation à la forme simple

$$(10)\qquad U^5 + a_4 u^4 (1 - u^8)^2 U + a_5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0.$$

Nous connaissons le coefficient a_5; il reste à déterminer le coefficient a_4; nous suivrons la marche qui a été indiquée au n° 411 pour le calcul de l'équation modulaire. A une valeur réelle, positive et très-petite de u, correspond une valeur de ρ de la forme $\rho = si$, s étant positive et très-grande et par conséquent une valeur de q réelle, positive et très-petite. En développant $\varphi(\rho)$ en série et se bornant aux deux premiers termes, on a

$$u = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}} (1 - q), \quad v_0 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(1 - q^{\frac{1}{5}}\right),$$

$$v_1 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}}\right), \quad v_2 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}}\right),$$

$$v_3 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}}\right), \quad v_4 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}}\right),$$

$$v_1 - v_4 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5} q^{\frac{1}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right), \quad v_2 - v_3 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5} q^{\frac{1}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right),$$

$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{40}} \left(1 + q^{\frac{1}{5}}\right).$$

En substituant dans l'équation (10), divisant tous les termes par $q^{\frac{3}{8}}$, puis égalant à zéro le terme constant et le coefficient de $q^{\frac{1}{5}}$, on

trouve $a_5 = -2^6 5^{\frac{5}{2}}$, $a_4 = -2^4 5^3$. L'équation cherchée est donc

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1 - u^8)^2 U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0. \tag{11}$$

424. Si l'on pose $x = hU$, cette équation devient

$$x^5 - 2^4 5^3 h^4 u^4 (1 - u^8)^2 x - 2^6 5^{\frac{5}{2}} h^5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0. \tag{12}$$

On sait que M. Jerrard a ramené l'équation générale du cinquième degré à la forme

$$x^5 - Ax - B = 0. \tag{13}$$

Or on peut disposer des deux paramètres u et h que renferme l'équation (12), de manière à identifier les deux équations précédentes. Il suffit pour cela de poser

$$2^4 5^3 h^4 u^4 (1 - u^8)^2 = A, \quad 2^6 5^{\frac{5}{2}} h^5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = B,$$

d'où

$$h = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{B}{A} \frac{u}{1 + u^8}; \tag{14}$$

en substituant cette valeur de h dans l'équation

$$2^2 5^{\frac{3}{2}} h^2 u^2 (1 - u^8) = \sqrt{A},$$

on arrive à l'équation du second degré

$$\left(u^4 - \frac{1}{u^4}\right)^2 + \frac{5^{\frac{5}{2}} B^2}{4A^2\sqrt{A}} \left(u^4 - \frac{1}{u^4}\right) + 4 = 0. \tag{15}$$

De cette dernière équation, on déduira $u^4 - \frac{1}{u^4}$, et par conséquent u^4 ou k; on cherchera l'une des valeurs correspondantes de q ou de ρ; on en déduira les six valeurs de v, et par suite, à l'aide des formules (2), les cinq valeurs de U; en les multipliant par la quantité connue h, on aura enfin les racines de l'équation proposée (13).

425. On verrait de la même manière que, pour $n=7$, l'équation en U, qui est du 52e degré en u, est de la forme

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &U^7 + a_3 u^4(1-u^8)U^4 + a_5 u^4(1-u^8)^4 U^2 + a_6 u^8(1-u^8)^4 U \\ &\qquad + a_7 u^4(1-u^8)^4(1-u^8+u^{16}) = 0. \end{aligned}\right.$$

La considération du discriminant (n° 413) sert à déterminer le dernier terme. On obtiendra les quatre coefficients qui restent dans l'équation en développant en série, comme précédemment, la fonction $\varphi(\rho)$, et poussant le développement jusqu'au cinquième terme, savoir :

$$u = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}(1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4), \quad v_0 = 2^{\frac{1}{2}} q^{\frac{4}{56}}\left(1 - q^{\frac{1}{7}} + 2q^{\frac{2}{7}} - 3q^{\frac{3}{7}} + 4q^{\frac{4}{7}}\right).$$

On trouve ainsi, pour la première combinaison,

$$U = i\, 2^2 7^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{14}}\left(1 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} q^{\frac{2}{7}} + q^{\frac{4}{7}}\right),$$

d'où

$$a_7 = i\, 2^{12} 7^{\frac{7}{2}}, \quad a_5 = 0, \quad a_3 = -i\, 2^4 7^{\frac{5}{2}} \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad a_6 = 2^8 7^4\left[1 - \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{1}\right)^2\right].$$

On déduit la seconde combinaison de la première, en remplaçant i par $-i$.

LIVRE IX.

THÉORÈME D'ABEL.

CHAPITRE PREMIER.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

426. Soit $F(x, y) = o$ une équation algébrique et entière, irréductible, et du degré m par rapport à y. A chaque valeur de x correspondent m valeurs de y. Lorsque la variable x part d'un point fixe x_0, y ayant une valeur initiale y_0, et décrit différents chemins qui aboutissent à un même point x, la fonction algébrique y acquiert m valeurs en ce point. Nous associerons à la variable x la valeur correspondante de y sur chaque courbe, et nous appellerons *point analytique* le système des valeurs de x et y. Nous dirons que deux courbes décrites par le point (x, y) se coupent, lorsqu'au point d'intersection des deux courbes géométriques qui figurent la variation de x la valeur de y est la même. Le point analytique décrit une courbe fermée, ou un *cycle* (n° **104**), lorsque la valeur de y redevient la même au point de départ.

On a donné le nom d'*intégrales abéliennes* aux intégrales définies

$$(1) \qquad \int \varphi(x, y)\, dx,$$

dans lesquelles $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et y. Ces intégrales rentrent dans la catégorie de celles que nous avons étudiées dans le Chapitre IV du troisième Livre; car la quantité $u = \varphi(x, y)$ est elle-même une fonction algébrique de x, satisfaisant à une équation du degré m par rapport à u.

Nous avons démontré (n° **106**) que, pour chaque valeur de x, l'intégrale acquiert m valeurs, augmentées chacune de multiples quelconques de certaines périodes. Nous nous proposons maintenant de rechercher les intégrales auxquelles on peut ramener toutes les autres, quand l'équation $F(x, y) = 0$ reste la même, et que la fraction rationnelle $\varphi(x, y)$ est quelconque.

Nous mettrons d'abord l'intégrale sous la forme adoptée par Abel. Concevons que l'on opère une substitution du premier degré

$$x = \frac{bx' + b'y' + b''}{ax' + a'y' + a''}, \quad y = \frac{cx' + c'y' + c''}{ax' + a'y' + a''};$$

l'équation proposée se transforme en une équation $f(x', y') = 0$, du même degré; désignons par m ce degré par rapport aux deux variables x' et y'. Si l'on pose

$$A = a'b'' - b'a'', \quad A' = a''b - b''a, \quad A'' = ab' - ba',$$

et si l'on rend l'équation homogène en y remplaçant x' et y' par $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$, et multipliant par z'^m, on a

$$dx = \frac{\left(A\frac{df}{dx'} + A'\frac{df}{dy'} + A''\frac{df}{dz'}\right)dx'}{(ax' + a'y' + a'')^2\frac{df}{dy'}}.$$

La fraction $\varphi(x, y)$ est le quotient de deux polynômes entiers M et N; appelons n le degré du dénominateur, n' celui du numérateur; après la substitution, on aura

$$\varphi(x, y) = \frac{M'}{N'(ax' + a'y' + a'')^{n'-n}},$$

M' et N' étant des polynômes entiers en x' et y', le premier du degré n', le second du degré n. Si l'on pose maintenant

$$\psi(x', y') = \frac{M'\left(A\frac{df}{dx'} + A'\frac{df}{dy'} + A''\frac{df}{dz'}\right)}{N'(ax' + a'y' + a'')^{n'-n+2}},$$

l'intégrale prend la forme

$$\int \psi(x', y') \frac{dx'}{\left(\frac{df}{dy'}\right)}.$$

Dans la nouvelle fraction rationnelle $\psi(x', y')$, le degré du numérateur surpasse de $m - 3$ unités celui du dénominateur.

427. D'après cela, étant donnée l'équation $f(x, y) = 0$ du degré m par rapport à x et à y, nous considérerons l'intégrale

$$(2) \qquad \int \psi(x, y) \frac{dx}{f'_y},$$

dans laquelle $\psi(x, y)$ désigne le quotient de deux polynômes entiers M et N, dont le second est d'un degré quelconque n, le premier du degré $n + m - 3$. La substitution du premier degré nous permet de supposer que l'équation renferme un terme en y^m et un en x^m; les m valeurs de y conservent alors des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de x, et deviennent infinies avec x; nous pouvons supposer aussi que les m valeurs du rapport $\frac{y}{x}$ restent finies et différentes, quand x devient infini; chaque branche de l'intégrale conserve alors une valeur finie au point $x = \infty$ sur la sphère, et reste holomorphe dans le voisinage de ce point; car la quantité $v = ux^2$ reste finie (n° 110).

On peut remplacer la fraction rationnelle $\frac{M}{N}$ par une autre dont le dénominateur ne renferme que la variable x. Soient, en effet,

$$f = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$N = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n,$$

les coefficients a et b étant des polynômes entiers en x, dont les degrés sont marqués par les indices. On sait que, si l'on élimine y entre les deux équations $f = 0$, $N = 0$, le premier membre de l'équation résul-

tante $X = 0$ est le déterminant

$$X = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme entier en x du degré mn. Si l'on multiplie les éléments de la première colonne verticale par y^{m+n-1} ceux de la seconde par $y^{m+n-2},\dots$, ceux de l'avant-dernière par y, et qu'après les avoir ainsi multipliés on les ajoute à la dernière, on remplace cette dernière colonne par

$$y^{n-1}f,\ y^{n-2}f,\dots,\ f,\quad y^{m-1}\mathrm{N},\ y^{m-2}\mathrm{N},\dots,\ \mathrm{N},$$

sans changer la valeur du déterminant; mais alors ce déterminant, ordonné par rapport aux éléments de la dernière colonne, se compose de deux parties, contenant en facteur, l'une f, l'autre N, et l'on a

$$(3)\qquad X = Af + BN.$$

Les polynômes A et B sont les déterminants que l'on obtient en remplaçant dans le déterminant X la dernière colonne par l'une ou l'autre des deux suites

$$y^{n-1},\quad y^{n-2},\dots,\quad 1,\quad 0,\dots,\quad 0,\quad 0,$$
$$0,\dots,\quad 0,\dots,\quad 0,\quad y^{m-1},\quad y^{m-2},\dots,\quad 1;$$

ordonnés par rapport à y, ils sont de la forme

$$A = A_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \dots + A_{n-1},$$
$$B = B_0 y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + \dots + B_{m-1}.$$

Les coefficients A_h et B_h, qui sont, au signe près, les sous-déterminants relatifs aux éléments de la dernière colonne, sont des polynômes entiers en x du degré $(m-1)(n-1)+h$, et, par conséquent, les degrés des

polynômes A et B sont respectivement $mn - m$ et $mn - n$ par rapport aux deux variables x et y.

Cela posé, si l'on multiplie par B les deux termes de la fraction $\frac{M}{N}$, on aura, en vertu de la relation (3), et en tenant compte de l'équation $f = 0$,

$$\frac{M}{N} = \frac{BM}{BN} = \frac{BM}{X}.$$

Le dénominateur de la nouvelle fraction ne contient plus que la variable x. Le numérateur est un polynôme entier en x et y, du degré $mn + m - 3$ par rapport à ces deux variables, mais seulement du degré $n + 2m - 4$ par rapport à y; nous le représenterons par

$$BM = X_{(m-1)(n-1)}y^{2m+n-4} + X_{(m-1)(n-1)+1}y^{2m+n-5} + \ldots + X_{mn+m-3},$$

en indiquant par des indices les degrés des coefficients.

428. Il est clair que l'équation $f = 0$ permet de réduire ce polynôme au degré $m - 1$ par rapport à y, sans changer le degré total; soit

$$BM = X'_{mn-2}y^{m-1} + X'_{mn-1}y^{m-2} + \ldots + X'_{mn+m-3}.$$

On peut même le réduire au degré $m - 2$. On a, en effet,

$$f'_y = ma_0y^{m-1} + (m-1)a_1y^{m-2} + \ldots,$$

$$BM - \frac{X'_{mn-2}}{ma_0}f'_y = X''_{mn-1}y^{m-2} + X''_{mn}y^{m-3} + \ldots + X''_{mn+m-3} = H,$$

et, par suite,

$$\int \frac{BM}{X}\frac{dx}{f'_y} = \int \frac{X'_{mn-2}}{ma_0X}dx + \int \frac{H}{X}\frac{dx}{f'_y}.$$

En faisant abstraction de la première intégrale, qui s'exprime par une quantité algébrique et le logarithme d'une quantité algébrique, on a à considérer l'intégrale

$$(4) \qquad \int \frac{H}{X}\frac{dx}{f'_y},$$

dans laquelle le dénominateur X est un polynôme entier en x du degré mn, et le numérateur H un polynôme entier en x et y du degré $mn+m-3$ par rapport à ces deux variables, mais seulement du degré $m-2$ par rapport à y.

Si l'on divise par X les coefficients X''_{mn}, X''_{mn+1}, ... du polynôme H, à partir du second, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on aura des quotients $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m-3}$ de degrés marqués par les indices, et des restes $R_0, R_1, \ldots, R_{m-3}$ du degré $mn-1$. En posant

$$Q = c_0 y^{m-3} + c_1 y^{m-4} + \ldots + c_{m-3},$$
$$R = X''_{mn-1} y^{m-2} + R_0 y^{m-3} + R_1 y^{m-4} + \ldots + R_{m-3},$$

on a ainsi

$$\frac{H}{X} = Q + \frac{R}{X},$$

et l'intégrale (4) se partage en deux parties

(5) $$\int \frac{Q\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{R}{X}\frac{dx}{f'_y}.$$

Chacune des fractions rationnelles $\frac{X''_{mn-1}}{X}$, $\frac{R_0}{X}$, ... se décompose en une somme de fractions simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^q}$, A étant une constante et a une racine du dénominateur. La seconde intégrale se décompose donc en intégrales telles que

(6) $$\int \frac{G\,dx}{(x-a)^q f'_y},$$

G étant un polynôme entier en y, indépendant de x, et du degré $m-2$.

Intégrales abéliennes de première et de seconde espèce.

429. Considérons la première des intégrales (5), savoir

(7) $$V = \int \frac{Q\,dx}{f'_y}.$$

Le polynôme Q, du degré $m-3$ en x et y, renferme $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$

coefficients; on peut donc ramener toutes les intégrales (7) à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ intégrales particulières de cette sorte. Parmi ces intégrales, il en est qui conservent une valeur finie sur toute la sphère; ce sont celles-là que l'on appelle *intégrales de première espèce*. D'après ce que nous avons dit au n° **427**, les m valeurs de y restent finies pour toutes les valeurs finies de x, et le point $x=\infty$ est un point ordinaire pour la fonction V; il suffit donc d'examiner ce qui a lieu quand $f'_y=0$, c'est-à-dire aux points où plusieurs racines de l'équation $f=0$ deviennent égales entre elles. Soit (x_1, y_1) un point où n racines de l'équation $f=0$ sont égales à y_1; posons $x=x_1+x'$, $y=y_1+y'$. Dans le cas particulier où la dérivée f'_x n'est pas nulle, on a (n° **33**)

$$f=(\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'^n)+\ldots;$$

les n racines égales forment un système circulaire et sont représentées par la série

$$y'=v_0x'^{\frac{1}{n}}+v_1x'^{\frac{2}{n}}+\ldots;$$

on en déduit

$$f'_y=n\mathrm{B}y'^{n-1}+\ldots=v'_0x'^{1-\frac{1}{n}}+\ldots.$$

La fonction $u=\frac{\mathrm{Q}}{f'_y}$, placée sous le signe somme, étant une quantité infiniment grande d'un degré inférieur à l'unité, l'intégrale conserve une valeur finie, mais elle acquiert n valeurs différentes, quand la variable tourne autour du point critique (n° **107**).

En général, les n racines égales se partagent en plusieurs systèmes circulaires représentés chacun par une série de la forme

$$y'=v_0x'^{\frac{q}{p}}+v_1x'^{\frac{q+1}{p}}+\ldots.$$

Si $\mathrm{A}y'^{\alpha}x'^{\beta}$ est le premier terme du premier groupe dans l'équation (n° **34**), f est, par rapport à x', un infiniment petit du degré $\alpha\frac{q}{p}+\beta$, et, par conséquent, f'_y un infiniment petit d'un degré $(\alpha-1)\frac{q}{p}+\beta$, égal ou supérieur à l'unité. Supposons que dans le numérateur $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_1+\Sigma\mathrm{A}'y'^{\alpha'}x'^{\beta'}$ on ait remplacé y' par sa valeur; pour que l'intégrale reste finie, il fau-

dra égaler à zéro le terme constant Q_1 et les coefficients de tous les termes dont les degrés sont inférieurs ou égaux à $(\alpha - 1)\frac{q}{p} + (\beta - 1)$. Chaque point double à tangentes distinctes donne la seule condition $Q_1 = 0$. On obtiendra ainsi un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients du polynôme Q; si m' est le nombre des relations distinctes, il restera $m_1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - m'$ coefficients arbitraires; ce sera le nombre des intégrales de première espèce. Pour toutes ces intégrales, les points critiques sont ceux de la fonction algébrique y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$; les mêmes cycles donneront leurs périodes; nous avons vu (n°s 111 et 242) que le nombre des périodes distinctes, pour chacune d'elles, est au plus égal à $\Sigma(p-1) - 2(m-1)$.

Outre ces intégrales toujours finies, nous en prendrons m' autres, que nous choisirons de manière que chacune d'elles satisfasse aux m' équations de condition, excepté une; ce seront les *intégrales de seconde espèce*. La première satisfait aux m' conditions, excepté la première; la seconde aux m' conditions, excepté la seconde, et ainsi de suite. Chacune des intégrales de seconde espèce ne devient infinie qu'en un point sur la sphère.

Intégrales abéliennes de troisième espèce.

430. Dans l'intégrale (6), la lettre a désigne un paramètre arbitraire, et q un nombre entier quelconque, cette intégrale étant la dérivée d'ordre q par rapport à ce paramètre de l'intégrale

$$\int \frac{G\,dx}{(x-a)f'_y}; \tag{8}$$

on peut se borner à étudier cette dernière. Le polynôme G, indépendant de x, et du degré $m-2$ en y, contient $m-1$ coefficients; on a donc $m-1$ intégrales de la forme (8). Mais nous considérerons le cas plus général où G est un polynôme entier en x et y, du degré $m-2$ par rapport à ces deux variables. Par une substitution entière et du premier degré, analogue à une transformation de coordonnées, nous mettrons la droite $x - a = 0$ sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; l'inté-

grale devient alors

$$(9)\qquad V=\int\frac{G\,dx}{(\alpha x+\beta y+\gamma)f'_y}.$$

Nous assujettirons d'abord le polynôme G à satisfaire aux conditions nécessaires pour que l'intégrale conserve une valeur finie aux points critiques relatifs à la fonction algébrique y; il restera un certain nombre de coefficients arbitraires. La droite $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ coupe la courbe $f=0$ en m points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m); nous assujettirons en outre la courbe $G=0$, qui est du degré $m-2$, à passer par $m-2$ de ces points, par exemple par les $m-2$ derniers; de cette manière, la fonction V ne deviendra infinie qu'aux deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2), qui sont des pôles simples de la fonction u placée sous le signe somme, et des points critiques logarithmiques de l'intégrale (nº **108**). Telles sont les *intégrales de troisième espèce*.

On peut ramener toutes les intégrales (9) à $m-1$ intégrales particulières de troisième espèce. Soient en effet $G_1=0$, $G_2=0$, ..., $G_{m-1}=0$ des courbes particulières du degré $m-2$, satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques, et passant par tous les points d'intersection de la droite $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ et de la courbe $f=0$, excepté deux, savoir : la première, par tous les points, excepté le premier et le dernier; la seconde, par tous les points, excepté le second et le dernier, et ainsi de suite. Si G est un polynôme quelconque du degré $m-2$, on peut déterminer les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, de manière que la courbe

$$G-A_1G_1-A_2G_2-\ldots-A_{m-1}G_{m-1}=0$$

passe par tous les points d'intersection, excepté le dernier; il suffit pour cela de prendre

$$A_1=\left(\frac{G}{G_1}\right)_{x_1},\quad A_2=\left(\frac{G}{G_2}\right)_{x_2},\ \ldots,\quad A_{m-1}=\left(\frac{G}{G_{m-1}}\right)_{x_{m-1}};$$

le premier membre de l'équation est alors décomposable en facteurs, et l'on a

$$G-A_1G_1-A_2G_2-\ldots-A_{m-1}G_{m-1}=(\alpha x+\beta y+\gamma)H,$$

H étant un polynôme entier en x et y, du degré $m-3$. Si l'on appelle $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ les $m-1$ intégrales de troisième espèce, qui correspondent aux polynômes $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$, on en déduit

$$V = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_{m-1} V_{m-1} + \int \frac{H\,dx}{f'_y}.$$

Toutes les intégrales (9) se ramènent donc à $m-1$ intégrales de troisième espèce, et à des intégrales de première et de seconde espèce.

431. Considérons une intégrale de troisième espèce (9), telle que la courbe $G=0$ passe par tous les points d'intersection de la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec la courbe $f=0$, excepté les deux premiers (x_1, y_1), (x_2, y_2). Afin de rendre les polynômes homogènes, concevons que l'on remplace x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; les coordonnées d'un point quelconque de cette droite pourront être représentées par

$$x = x_1 + t x_2, \quad y = y_1 + t y_2, \quad z = z_1 + t z_2,$$

à l'aide d'une variable t. Les points d'intersection de la droite et de la courbe $f=0$ sont donnés par l'équation

$$f(x_1 + t x_2,\ y_1 + t y_2,\ z_1 + t z_2) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots + u_m t^m = 0,$$

qui se réduit à

$$u_1 + u_2 t + \ldots + u_{m-1} t^{m-2} = 0,$$

puisque les coefficients u_0 et u_m sont nuls. Les points d'intersection de la droite avec la courbe $G=0$ sont de même donnés par l'équation

$$G = v_1 + v_2 t + \ldots + v_{m-1} t^{m-2} = 0.$$

Il faut que ces deux équations admettent les mêmes racines, et, par conséquent, que leurs coefficients soient proportionnels; en multipliant G par une constante convenable, on peut faire en sorte que ces coefficients soient égaux. On aura alors

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_{m-1}}{u_{m-1}} = 1,$$

et, par suite,

$$G_{z_1} = v_1 \quad = u_1 \quad = x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = (x_2 - x_1) f'_{x_1} + (y_2 - y_1) f'_{y_1},$$
$$G_{z_2} = v_{m-1} = u_{m-1} = x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = (x_1 - x_2) f'_{x_2} + (y_1 - y_2) f'_{y_2}.$$

Nous mettrons l'équation de la droite sous la forme

$$\alpha x + \beta x + \gamma = \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

à l'aide d'un déterminant, que nous désignerons par le symbole $[x_1, x_2]$. En se bornant à la partie principale, on a, dans le voisinage du point (x_1, y_1),

$$[x_1, x_2] = (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = \frac{(x_1 - x_2) f'_{x_1} + (y_1 - y_2) f'_{y_1}}{f'_{y_1}} (x - x_1),$$
$$V = -\int \frac{dx}{x - x_1} = -\log(x - x_1),$$

et, dans le voisinage du point (x_2, y_2),

$$[x_1, x_2] = (x - x_2)(y_1 - y_2) - (y - y_2)(x_1 - x_2) = \frac{(x_1 - x_2) f'_{x_2} + (y_1 - y_2) f'_{y_2}}{f'_{y_2}} (x - x_2),$$
$$V = \int \frac{dx}{x - x_2} = \log(x - x_2).$$

L'intégrale éprouve un accroissement $-2\pi i$ ou $+2\pi i$, quand le point mobile (x, y) tourne autour du premier ou du second point, dans le sens positif.

Intégrales ultra-elliptiques.

432. On appelle ainsi les intégrales abéliennes que l'on obtient quand l'équation proposée est de la forme

$$(10) \qquad y^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2n}),$$

le second membre étant un polynôme entier en x, du degré $2n$ ou

$2n-1$, et le second cas se ramène au premier. La réduction de ces intégrales est facile. On a, comme au n° 270,

$$\varphi(x,y)=\frac{M+M'y}{N+N'y}=\frac{(M+M'y)(N-N'y)}{N^2-N'^2y^2}=\frac{P+P'y}{X},$$

$$\int\varphi(x,y)\,dx=\int\frac{P}{X}\,dx+\int\frac{P'y}{X}\,dx.$$

Faisant abstraction de la première partie, considérons la seconde, qui est de la forme

$$\int\frac{H}{X}\frac{dx}{y},$$

H et X étant des polynômes entiers en x. En divisant le premier par le second, appelant Q le quotient et R le reste d'un degré inférieur à celui de X, on arrive aux deux intégrales

$$\int\frac{Q\,dx}{y},\quad\int\frac{R}{X}\frac{dx}{y}.$$

La première est une somme d'intégrales de la forme

$$(11)\qquad\int\frac{x^m dx}{y}.$$

La seconde se décompose en intégrales de la forme

$$(12)\qquad\int\frac{dx}{(x-a)^q y}.$$

433. Considérons les intégrales (11); on a

$$D_x(x^m y)=mx^{m-1}y+x^m D_x y=\frac{1}{y}\left[mx^{m-1}y^2+\frac{x^m}{2}D_x(y^2)\right];$$

la quantité placée entre parenthèses est un polynôme entier en x du degré $2n+m-1$, que nous représenterons par

$$A_0 x^{2n+m-1}+A_1 x^{2n+m-2}+\ldots+A_{2n+m-1};$$

on en déduit, par l'intégration

$$x^m y = A_0 \int \frac{x^{2n+m-1}\,dx}{y} + A_1 \int \frac{x^{2n+m-2}\,dx}{y} + \ldots + A_{2n+m-1} \int \frac{dx}{y},$$

et la première intégrale s'exprime à l'aide des autres. On ramène ainsi toutes les intégrales (11) à celles dans lesquelles l'exposant est plus petit que $2n-1$, c'est-à-dire aux $2n-1$ intégrales

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{y}, \ldots, \quad \int \frac{x^{2n-2}\,dx}{y}.$$

Pour que l'intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, il est nécessaire et il suffit que l'exposant soit inférieur ou égal à $n-2$; il y a donc $n-1$ intégrales ultra-elliptiques de première espèce, savoir :

$$(14) \qquad \int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{y}, \ldots, \quad \int \frac{x^{n-2}\,dx}{y}.$$

D'après ce que nous avons dit au n° **113**, le nombre des périodes pour chacune d'elles est $2n-2$; nous remarquons qu'il est double de celui des intégrales de première espèce. Les n intégrales suivantes sont de seconde espèce.

Les intégrales (12) sont les dérivées par rapport au paramètre a de l'intégrale de troisième espèce

$$(15) \qquad \int \frac{dx}{(x-a)y}.$$

Cette intégrale conserve une valeur finie sur toute la sphère, excepté aux deux points d'intersection de la droite $x=a$ avec la courbe (10). Soit b l'une des valeurs de y pour $x=a$; les deux points critiques sont (a, b), $(a, -b)$; la partie principale de l'intégrale

$$(16) \qquad \int \frac{b\,dx}{(x-a)y}$$

est $\log(x-a)$ dans le voisinage du premier point, et $-\log(x-a)$ dans le voisinage du second point.

CHAPITRE II.

RELATION ENTRE LES PÉRIODES DE DEUX INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Relation entre les périodes de deux intégrales abéliennes de première espèce.

434. Appelons U et V deux intégrales de première espèce, relatives à une même équation algébrique $f(x, y) = 0$ du degré m. Le point O′ sur la sphère étant un point ordinaire, l'intégrale $\int U dV$, prise sur l'un quelconque des circuits, U et V étant les valeurs des intégrales comptées à partir de l'origine de ce circuit, est nulle (n° **111**). L'ensemble des m circuits donne donc l'équation

$$\sum \int U dV = 0. \tag{1}$$

Considérons les p lacets binaires de première espèce

$$(a)_{g_0}^{g_1}, \quad (a)_{g_1}^{g_2}, \ldots, \quad (a)_{g_{p-1}}^{g_0},$$

qui se rapportent à un système circulaire de p racines se permutant autour du point critique a, et les p circuits

$$(C)_{\alpha_0}^{\alpha_0}, \quad (C)_{\alpha_1}^{\alpha_1}, \ldots, \quad (C)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-1}},$$

dans lesquels entrent respectivement ces lacets (n° **112**). Cherchons la partie qui, dans le premier membre de l'équation (1), correspond à ces lacets (Oa). Sur chaque circuit, un élément mm' de la droite Oa est parcouru deux fois, dans des sens contraires. Nous désignerons par $dV_{g_0}, dV_{g_1}, \ldots$ les valeurs de dV sur l'élément mm', quand la variable x décrit la droite Oa, la racine y ayant en O l'une des valeurs initiales

$y_{g_0}, y_{g_1}, \ldots$. Sur le circuit $(C)_{\alpha_0}^{\alpha_0}$, quand on arrive à l'entrée du lacet $(a)_{g_0}^{g_1}$, l'intégrale U a acquis la valeur $U_{\alpha_0}^{g_0}$; sur la droite Om elle augmente ensuite de la quantité $U_{g_0}^{m}$, de sorte qu'elle a en m la valeur $U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m}$, et l'élément mm' donne l'élément différentiel $(U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0}$. Quand la variable x, après avoir décrit un petit cercle autour du point critique a, dans le sens positif, revient en m, la fonction U a une autre valeur U'; en achevant le circuit, on aurait

$$U' + U_m^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0} = 0, \quad \text{d'où} \quad U' = -U_{g_1}^{\alpha_0} + U_{g_1}^{m}.$$

dV ayant sur mm' la valeur $-dV_{g_1}$, on a le second élément différentiel $(U_{g_1}^{\alpha_0} - U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1}$. Ainsi le circuit $(C)_{\alpha_0}^{\alpha_0}$ donne, pour l'élément mm' de la droite Oa, les deux éléments différentiels

$$(U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0} + (U_{g_0}^{\alpha_0} - U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1};$$

le circuit $(C)_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ donne, pour le même élément mm',

$$(U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{m})\,dV_{g_1} + (U_{g_2}^{\alpha_1} - U_{g_2}^{m})\,dV_{g_2},$$

et ainsi de suite; enfin le circuit $(C)_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-1}}$ donne

$$(U_{\alpha_{p-1}}^{g_{p-1}} + U_{g_{p-1}}^{m})\,dV_{g_{p-1}} + (U_{g_0}^{\alpha_{p-1}} - U_{g_0}^{m})\,dV_{g_0}.$$

En ajoutant ces résultats, on obtient la partie qui dans la somme (1) se rapporte à l'élément mm', savoir:

$$(2)\quad (U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{\alpha_{p-1}})\,dV_{g_0} + (U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0})\,dV_{g_1} + \ldots + (U_{\alpha_{p-1}}^{g_{p-1}} + U_{g_{p-1}}^{\alpha_{p-2}})\,dV_{g_{p-1}}.$$

Posons

$$U_{\alpha_1}^{g_1} + U_{g_1}^{\alpha_0} = A_{\alpha_1}^{\alpha_0}, \quad U_{\alpha_2}^{g_2} + U_{g_2}^{\alpha_1} = A_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \ldots, \quad U_{\alpha_0}^{g_0} + U_{g_0}^{\alpha_{p-1}} = A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}},$$

et remarquons que ces quantités sont les valeurs de l'intégrale U, relatives aux lacets de seconde espèce $(a')_{\alpha_0}^{\alpha_1}, (a')_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \ldots, (a')_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_0}$, décrits dans le sens négatif (n° **112**); la quantité précédente se réduit à

$$(3)\quad A_{\alpha_1}^{\alpha_0}\,dV_{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1}\,dV_{g_2} + \ldots + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}}\,dV_{g_0}.$$

Il faut considérer maintenant les éléments successifs de la droite Oa,

c'est-à-dire intégrer de O à a. Si l'on appelle h_{g_0}, h_{g_1},... les valeurs de l'intégrale V, relatives à la droite Oa, quand la racine y a en O l'une des valeurs initiales y_{g_0}, y_{g_1},..., on obtient la quantité

$$(4) \qquad A_{\alpha_1}^{\alpha_0} h_{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1} h_{g_2} + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} h_{g_{p-1}} + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}} h_{g_0}.$$

La somme des valeurs de l'intégrale U, relatives aux p lacets binaires de seconde espèce étant nulle, on a

$$A_{\alpha_1}^{\alpha_0} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1} + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} + A_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}} = 0,$$

et la quantité (4) devient

$$(5) \qquad -A_{\alpha_1}^{\alpha_0}(h_{g_0} - h_{g_1}) - A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(h_{g_0} - h_{g_2}) - \ldots - A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(h_{g_0} - h_{g_{p-1}}).$$

Nous désignerons par $a_{g_0}^{g_1}$, $a_{g_1}^{g_2}$,..., $a_{g_{p-1}}^{g_0}$ les valeurs de l'intégrale U, relatives aux p lacets binaires de première espèce, et par $b_{g_0}^{g_1}$, $b_{g_1}^{g_2}$,..., $b_{g_{p-1}}^{g_0}$ celles de l'intégrale V, relatives aux mêmes lacets, décrits dans le sens positif; comme on a

$$\begin{aligned}
h_{g_0} - h_{g_1} &= b_{g_0}^{g_1}, \\
h_{g_0} - h_{g_2} &= (h_{g_0} - h_{g_1}) + (h_{g_1} - h_{g_2}) = b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
h_{g_0} - h_{g_{p-1}} &= (h_{g_0} - h_{g_1}) + (h_{g_1} - h_{g_2}) + \ldots + (h_{g_{p-2}} - h_{g_{p-1}}) = b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}},
\end{aligned}$$

l'expression (5) se met sous la forme

$$(6) \qquad -A_{\alpha_1}^{\alpha_0} b_{g_0}^{g_1} - A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}) - \ldots - A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}).$$

Telle est la partie qui, dans la somme (1), correspond à un système circulaire de racines. Chaque système circulaire donnant une quantité analogue, on aura l'équation

$$(7) \quad -\Sigma\left[A_{\alpha_1}^{\alpha_0} b_{g_0}^{g_1} + A_{\alpha_2}^{\alpha_1}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2}) + \ldots + A_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}}(b_{g_0}^{g_1} + b_{g_1}^{g_2} + \ldots + b_{g_{p-2}}^{g_{p-1}})\right] = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les systèmes circulaires de racines.

Cette équation peut être mise sous une autre forme. En intégrant par parties et remarquant que les valeurs des intégrales U et V sur

chaque circuit sont nulles, on a identiquement

$$(8) \qquad \Sigma \int \mathrm{U}\, d\mathrm{V} = - \Sigma \int \mathrm{V}\, d\mathrm{U}.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_0}$, $\mathrm{B}_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{B}_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}}$ les valeurs de l'intégrale V relatives aux lacets de seconde espèce, décrits dans le sens négatif, on obtiendra l'équation (7) sous la forme

$$(9) \quad \Sigma \left[\mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_0} a_{g_0}^{g_1} + \mathrm{B}_{\alpha_2}^{\alpha_1} (a_{g_0}^{g_1} + a_{g_1}^{g_2}) + \ldots + \mathrm{B}_{\alpha_{p-2}}^{\alpha_{p-1}} (a_{g_0}^{g_1} + a_{g_1}^{g_2} + \ldots + a_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}) \right] = 0.$$

435. Nous allons faire voir que l'on peut transformer cette équation, de manière qu'elle ne renferme plus que les périodes de l'une et l'autre intégrales. Après avoir choisi un système de lacets fondamentaux de première espèce, appelons $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots$ les valeurs des intégrales U et V, relatives aux lignes fermées composées uniquement de lacets fondamentaux et conduisant de la racine y_0 à chacune des autres $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. A chaque lacet binaire de première espèce correspond un cycle simple; nous désignerons par $\mathfrak{A}_{g_0}^{g_1}$ et $\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1}$ les valeurs des intégrales U et V, relatives au cycle simple dans lequel entre le lacet binaire $(a)_{g_0}^{g_1}$. Ces intégrales sont nulles, lorsque le lacet binaire est l'un des lacets fondamentaux; dans le cas contraire, ce sont des périodes de l'une et de l'autre intégrales. Comme on a $\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} = \mathrm{V}_{g_0} + b_{g_0}^{g_1} - \mathrm{V}_{g_1}$, l'équation (7) devient

$$- \Sigma \left[\mathrm{A}_{\alpha_1}^{\alpha_0} \mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}^{\alpha_1} (\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2}) + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} (\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2} + \ldots + \mathfrak{B}_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}) \right]$$
$$- \Sigma \left(\mathrm{A}_{\alpha_1}^{\alpha_0} \mathrm{V}_{g_1} + \mathrm{A}_{\alpha_2}^{\alpha_1} \mathrm{V}_{g_2} + \ldots + \mathrm{A}_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_{p-2}} \mathrm{V}_{g_{p-1}} + \mathrm{A}_{\alpha_0}^{\alpha_{p-1}} \mathrm{V}_{g_0} \right) = 0.$$

La quantité V_g se trouve dans les parties relatives à différents systèmes circulaires, dans toutes celles où un lacet binaire de première espèce permute la racine déterminée y_g en une autre; mais nous avons vu (n° 112) qu'aux lacets de première espèce, qui permutent la racine y_g en une autre, correspondent les lacets binaires de seconde espèce, qui entrent dans le circuit de seconde espèce $(\mathrm{C}')_g^g$; la somme des quantités A, par laquelle est multiplié V_g, est donc nulle. La seconde partie étant identiquement nulle, l'équation précédente se réduit à sa première partie, c'est-à-dire à

$$(10) \quad \Sigma \left[a'^{\alpha_1}_{\alpha_0} \mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + a'^{\alpha_2}_{\alpha_1} (\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2}) + \ldots + a'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}} (\mathfrak{B}_{g_0}^{g_1} + \mathfrak{B}_{g_1}^{g_2} + \ldots + \mathfrak{B}_{g_{p-2}}^{g_{p-1}}) \right] = 0.$$

Considérons maintenant les cycles formés chacun de lacets fondamentaux et d'un lacet de seconde espèce; on a, comme précédemment, $\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0} = U_{\alpha_0} + a'^{\alpha_1}_{\alpha_0} - U_{\alpha_1}$, et l'équation précédente devient

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\left[\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0}\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{A}'^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}) + \ldots + \mathcal{A}'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_{p-1}}_{g_{p-2}})\right] \\ &\qquad - \Sigma\left(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0}U_{\alpha_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}U_{\alpha_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_0}_{g_{p-1}}U_{\alpha_{p-1}}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La quantité U_α est multipliée par toutes les quantités $\mathcal{B}$, relatives aux cycles simples qui se rapportent aux lacets de première espèce correspondant aux lacets de seconde espèce qui permutent la racine y_α en une autre; mais ces lacets de première espèce forment le circuit de première espèce $(C)^\alpha_\alpha$. Ce circuit pouvant être regardé comme la réunion des cycles simples, la somme des quantités b par laquelle est multipliée U_α est nulle. Ainsi la seconde partie est encore identiquement nulle, et l'équation (11) se réduit à

$$(12)\quad \Sigma\left[\mathcal{A}'^{\alpha_1}_{\alpha_0}\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{A}'^{\alpha_2}_{\alpha_1}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1}) + \ldots + \mathcal{A}'^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_{p-2}}(\mathcal{B}^{g_1}_{g_0} + \mathcal{B}^{g_2}_{g_1} + \ldots + \mathcal{B}^{g_{p-1}}_{g_{p-2}})\right] = 0;$$

elle est de la forme

$$(13)\qquad \Sigma\omega\omega' = 0,$$

ω et ω' étant des périodes de l'une et l'autre intégrales.

Relation entre les périodes d'une intégrale de première espèce et d'une de troisième espèce.

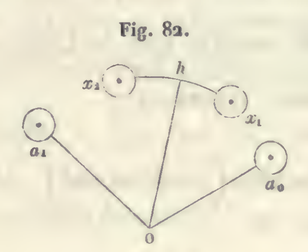
436. Soient (*fig.* 82)

$$U = \int \frac{Q\,dx}{f'_y}, \quad V = \int \frac{G\,dx}{[x_1, x_2]f'_y}$$

ces deux intégrales. Nous supposerons que l'on puisse joindre les deux points logarithmiques (x_1, y_1), (x_2, y_2) par une ligne qui ne coupe aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques $a_0, a_1, \ldots$. Dans ce cas, nous formerons un nouveau lacet avec cette ligne, deux petits cercles décrits autour des points logarithmiques, et une ligne Oh

allant de l'origine à un point de la ligne $x_1 x_2$. Dans le cas contraire, on introduirait deux lacets nouveaux unissant l'origine à chacun des points logarithmiques. Chaque circuit enveloppe tous les lacets. Les valeurs des deux intégrales étant nulles sur chaque circuit, l'équation (1) subsiste. Le lacet $(x_1 x_2)$ n'entre effectivement que dans un circuit; quand la variable x décrit ce lacet, l'intégrale V acquiert sur

Fig. 82.



les petits cercles x_1 et x_2 les accroissements $-2\pi i$ et $+2\pi i$, et, par conséquent, reprend à la fin du lacet la valeur qu'elle avait à l'entrée; ce lacet ne modifie donc en rien les parties de la somme qui se rapportent aux autres lacets. Il suffit d'y ajouter la partie fournie par ce nouveau lacet; les lignes Oh et $x_1 x_2$, étant parcourues deux fois avec des valeurs de UdV égales et de signes contraires, ne donnent rien dans la somme; il reste à considérer les deux petits cercles x_1 et x_2; le premier donne $-2\pi i \mathrm{U}_{x_1}$, le second $+2\pi i \mathrm{U}_{x_2}$, ensemble $2\pi i(\mathrm{U}_{x_2} - \mathrm{U}_{x_1})$, ou $2\pi i \int_{x_1}^{x_2} d\mathrm{U}$, l'intégrale étant prise le long de la ligne $x_1 x_2$. On a donc l'équation

$$(14) \qquad \sum \omega\omega' + 2\pi i \int_{x_1}^{x_2} d\mathrm{U} = 0.$$

Relation entre les périodes de deux intégrales de troisième espèce.

437. Soient

$$\mathrm{U} = \int \frac{\mathrm{G}\,dx}{[x_1, x_2] f'_y}, \quad \mathrm{V} = \int \frac{\mathrm{G}'\,dx}{[x'_1, x'_2] f'_y}$$

ces deux intégrales. Il faut considérer deux nouveaux lacets $(x_1 x_2)$, $(x'_1 x'_2)$ unissant, l'un les deux points logarithmiques de la première

intégrale, l'autre ceux de la seconde. Nous supposerons que les deux lignes $x_1 x_2$, $x'_1 x'_2$ ne coupent pas les lacets relatifs aux points critiques et ne se coupent pas entre elles.

L'équation (1) subsiste encore. Les nouveaux lacets ne modifient pas la partie qui se rapporte aux premiers lacets. D'après le raisonnement du numéro précédent, le lacet $(x'_1 x'_2)$ donne $2\pi i \int_{x'_1}^{x'_2} dU$; la seconde forme de l'équation (8) montre que le lacet $(x_1 x_2)$ donne de même $-2\pi i \int_{x_1}^{x_2} dV$. On a donc l'équation

$$(15) \qquad \sum \omega\omega' + 2\pi i \int_{x'_1}^{x'_2} dU - 2\pi i \int_{x_1}^{x_2} dV = 0.$$

Application aux intégrales elliptiques.

438. Considérons deux intégrales elliptiques

$$U = \int_0^x \frac{dx}{y}, \quad V = \int_0^x \frac{x^2 dx}{y}, \quad y = \Delta x,$$

l'une de première espèce, l'autre de seconde espèce (n° 273). Supposons que les lacets relatifs aux quatre points critiques a_0, a_1, a_2, a_3, qui correspondent aux valeurs $+1$, $\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ de la variable x, se succèdent dans l'ordre positif, et que le rayon Ol du circuit passe entre les points a_0 et a_3. Sur les deux circuits, la valeur initiale de y étant ± 1, les fonctions U et V ont au même point des valeurs égales et de signes contraires, et, par conséquent, l'intégrale $\int U dV$ a la même valeur. Elle devient infinie avec x; car, si l'on pose $x = \frac{1}{x'}$, et si l'on développe en série suivant les puissances croissantes de x', on a

$$\frac{1}{y} = \mp \frac{x'^2}{k}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots),$$
$$\frac{dU}{dx'} = \mp \frac{1}{k}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots),$$
$$\frac{dV}{dx'} = \mp \frac{1}{k x'^2}(1 + \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \ldots);$$

d'où l'on déduit

$$U = \mp \frac{1}{k}\left(C + x' + \frac{\alpha x'^3}{3} + \ldots\right),$$

$$U\frac{dV}{dx'} = \frac{1}{k^2 x'^2}(C + x' + \alpha' x'^2 + \beta' x'^3 + \ldots).$$

Le point O' sur la sphère est pôle de cette dernière fonction. L'intégrale relative à chaque circuit, décrit dans le sens positif, est $-\frac{2\pi i}{k^2}$, ce qui fait pour les deux circuits $-\frac{4\pi i}{k^2}$; tel est, dans ce cas, le second membre de l'équation (1). Chaque lacet ne fournit qu'un seul terme, et le premier membre, sous la forme (7), est égal à

$$(a_1 - a_2 + a_3)b_0 + (-a_0 + a_2 - a_3)b_1 + (a_0 - a_1 + a_3)b_2 + (-a_0 + a_1 - a_2)b_3,$$

quantité qui se réduit à $-2(a_0 b_1 - a_1 b_0)$ et par suite à $-2(\omega\omega'_1 - \omega'\omega_1)$; on retrouve ainsi la relation obtenue au n° 273,

$$(16) \qquad -2(\omega\omega'_1 - \omega'\omega_1) = -\frac{4\pi i}{k^2}.$$

439. L'intégrale elliptique de troisième espèce, telle qu'elle s'est présentée d'abord, est donnée par la formule (16) du n° 275; nous la mettrons sous la forme

$$(17) \qquad V = \int_0^x \frac{\alpha\beta\, dx}{(x^2 - \alpha^2)y},$$

β étant la valeur qu'acquiert y lorsque la variable x va de l'origine O au point α par un chemin déterminé $O\alpha$, y ayant au point O la valeur initiale $+1$. Cette intégrale admet quatre points logarithmiques, savoir les deux points $(\alpha, \pm\beta)$ et les deux points $(-\alpha, \pm\beta)$. Quand la variable x tourne autour de chacun d'eux dans le sens positif, l'intégrale éprouve les accroissements $\pm\pi i$, $\mp\pi i$. Joignons les deux points géométriques α et $-\alpha$ par une ligne qui ne coupe aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques, et complétons le lacet qui enveloppe ces deux points par le chemin déterminé $O\alpha$.

Si U est l'intégrale de première espèce, et V une de troisième espèce, l'intégrale $\int U\,dV$, conservant une valeur finie quand x devient infinie, est nulle sur chacun des deux circuits. Le lacet qui enveloppe les deux points (α, β), $(-\alpha, \beta)$ entre dans l'un des circuits; le même lacet, considéré comme enveloppant les deux points $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta)$, entre dans l'autre circuit; ces deux lacets donnent d'ailleurs des termes égaux. En désignant par 2ε et ε' les périodes de V fournies, comme celles de U, par les deux cycles formés, l'un des deux lacets (a_0) et (a_2), l'autre des deux lacets (a_1) et (a_0), on a l'équation

$$-2(\omega\varepsilon' - \omega'\varepsilon) + 2\pi i \int_{(-\alpha, \beta)}^{(\alpha, \beta)} dU = 0.$$

Pour préciser, nous supposerons que la ligne déterminée $O\alpha$ passe entre les points a_1 et a_2, ce qui est toujours possible, quelle que soit la position du point α, et nous appellerons a la valeur de l'intégrale de première espèce, quand la variable x décrit la ligne $O\alpha$, avec la valeur initiale $y = 1$. Si l'on considère le cycle formé par la ligne qui joint les deux points α et $-\alpha$, la ligne $O\alpha$ et une ligne symétrique allant de l'origine au point $-\alpha$, on a

$$\int_0^{\alpha} dU + \int_{\alpha}^{-\alpha} dU + \int_{-\alpha}^{0} dU = a_2 - a_3 = \omega',$$

d'où

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} dU = 2\int_0^{\alpha} dU - \omega' = 2a - \omega';$$

et l'équation précédente devient

$$(18) \qquad \omega\varepsilon' - \omega'(\varepsilon - \pi i) = 2\pi a i.$$

Le même raisonnement s'applique au cas où U est l'intégrale de deuxième espèce, V étant toujours une intégrale de troisième espèce. L'intégrale $\int U\,dV$ conserve encore une valeur finie, quand x devient infinie, et l'on obtient l'équation

$$(19) \qquad \omega_1\varepsilon' - \omega'_1(\varepsilon - \pi i) = 2\pi i \zeta(a).$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$(20)\qquad \varepsilon = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega + \pi i, \quad \varepsilon' = \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\omega' + \frac{2\pi a i}{\omega}.$$

440. Considérons maintenant deux intégrales elliptiques de troisième espèce

$$U = \int_0^x \frac{\alpha\beta\, dx}{(x^2 - \alpha^2)y}, \quad V = \int_0^x \frac{\alpha'\beta'\, dx}{(x^2 - \alpha'^2)y}.$$

Joignons les points α et $-\alpha$, α' et $-\alpha'$ par des lignes qui ne coupent pas les lacets relatifs aux points critiques algébriques et qui ne se coupent pas entre elles. Si l'on appelle $2\varepsilon_1$ et ε'_1 les périodes de la seconde intégrale, relatives aux deux cycles précédents, on a l'équation

$$-2(\varepsilon\varepsilon'_1 - \varepsilon'\varepsilon_1) + 2\pi i \int_{-\alpha'}^{\alpha'} dU - 2\pi i \int_{-\alpha}^{\alpha} dV = 0.$$

Supposons que le lacet (α) précède le lacet (α'); avec une disposition convenable de ces lacets, et en raisonnant comme précédemment, on obtient

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} dV = 2\int_0^{\alpha} dV - \varepsilon'_1 - \pi i, \quad \int_{-\alpha'}^{\alpha'} dU = 2\int_0^{\alpha'} dU - \varepsilon',$$

et l'équation devient

$$2\pi i \int_0^{\alpha'} dU - 2\pi i \int_0^{\alpha} dV = (\varepsilon - \pi i)\varepsilon'_1 - \varepsilon'(\varepsilon_1 - \pi i) + \pi^2,$$

ou, en vertu des relations (20),

$$(21)\qquad \int_0^{\alpha'} dU - \int_0^{\alpha} dV = k^2[a\zeta(a') - a'\zeta(a)] - \frac{\pi i}{2}.$$

L'intégrale (17), exprimée à l'aide de la variable z, est

$$(22)\qquad \varpi(z, a) = \int_0^z \frac{\lambda(a)\lambda'(a)\, dz}{\lambda^2(z) - \lambda^2(a)};$$

c'est celle qui est donnée par la formule (20) du n° 275; nous la dési-

gnons par la lettre ϖ, afin de la distinguer de l'intégrale $\Pi(z, a)$ considérée par Jacobi. L'équation (21) devient

$$(23)\qquad \varpi(a', a) - \varpi(a, a') = k^2[a\zeta(a') - a'\zeta(a)] - \frac{\pi i}{2}.$$

Elle effectue la permutation du paramètre et de l'argument.

On passe d'une forme à l'autre, en remarquant que l'on a identiquement

$$\frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\,x^2}{1 - k^2\lambda^2(a)\,x^2} = \frac{\lambda\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda'\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)}{x^2 - \lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)} - \frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)},$$

et, par suite,

$$(24)\qquad \int_0^x \frac{k^2\lambda(a)\lambda'(a)\,x^2\,dx}{[1 - k^2\lambda^2(a)x^2]y} = \int_0^x \frac{\lambda\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\lambda'\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)}{\left[x^2 - \lambda^2\left(a + \frac{\omega'}{2}\right)\right]y}\,dx - \frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)}\int_0^x \frac{dx}{y},$$

ou

$$(25)\qquad \Pi(z, a) = \varpi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right) - z\,\frac{\lambda'(a)}{\lambda(a)}.$$

L'équation (24) montre que les périodes $2\bar{\omega}_2$ et ω'_2 de l'intégrale $\Pi(z, a)$, fournies par les deux cycles $(a_0) + (a_2)$, $(a_1) + (a_0)$ sont égales à celles de l'intégrale $\varpi\left(z, a + \frac{\omega'}{2}\right)$, augmentées respectivement des quantités $-2\omega D_a \log\lambda(a)$, $-\omega' D_a \log\lambda(a)$; ce sont précisément celles qui sont données par les formules (23) du n° 275.

CHAPITRE III.

THÉORÈME D'ABEL.

441. Une courbe $\varphi(x,y)=0$ du degré n coupe la courbe $f(x,y)=0$ du degré m en mn points, que nous désignerons par (ξ_1,η_1), (ξ_2,η_2),.... Une autre courbe $\psi(x,y)=0$ du degré n coupe de même la courbe $f=0$ en mn points (ξ'_1,η'_1), (ξ'_2,η'_2),.... Joignons ces points deux à deux par des lignes $\xi_1\xi'_2$, $\xi_2\xi'_2$,... qui ne se coupent pas, c'est-à-dire telles qu'au point d'intersection des deux lignes géométriques figurant la variation de x, la valeur de y ne soit pas la même. A l'aide de chacune des lignes $\xi\xi'$, de deux petits cercles décrits autour des points ξ et ξ' et d'une ligne Og unissant l'origine O à cette ligne $\xi\xi'$, nous formerons un lacet enveloppant les deux points ξ et ξ'; nous aurons mn lacets de ce genre. Soit

$$U=\log\frac{\varphi}{\psi},\quad V=\int\frac{G\,dx}{[x_1,x_2]f'_y}.$$

Nous supposons d'une manière générale que les lignes analytiques qui forment les lacets $(\xi\xi')$, le lacet (x_1x_2), et ceux relatifs aux points critiques de la fonction algébrique y de x, ne se coupent pas. Sur chaque circuit, enveloppant tous ces lacets, l'intégrale $\int U\,dV$ étant nulle, on a, pour l'ensemble des m circuits, l'équation

$$(1)\qquad \Sigma\int U\,dV=-\Sigma\int V\,dU=0.$$

Quand la variable x décrit l'un des lacets $(\xi\xi')$, la fonction U, éprouvant aux points ξ et ξ' les accroissements $+2\pi i$ et $-2\pi i$, reprend à la fin du lacet la valeur qu'elle avait à l'entrée; de même, la fonction V sur le lacet (x_1x_2). Il en résulte que ces lacets n'ont pas d'influence

sur la partie de l'intégrale qui se rapporte aux lacets relatifs aux points critiques de la fonction algébrique; cette partie sera donc de la forme $\Sigma\omega\omega'$, ω et ω' étant des périodes des deux fonctions U et V (nº 435); mais, quand la variable x décrit un cycle, les fonctions entières φ et ψ reprenant leurs valeurs primitives, la fonction $\log\frac{\varphi}{\psi}$ éprouve une variation égale à $2m'\pi i$, m' étant un nombre entier; l'expression $\Sigma\omega\omega'$ se réduit ainsi à la forme $2\pi i\Sigma m'\omega'$.

Le lacet $(x_1 x_2)$, d'après ce que nous avons dit au nº 436, donne le terme $2\pi i\int_{x_1}^{x_2} d\log\frac{\varphi}{\psi}$. De même, d'après la seconde forme de l'équation, chaque lacet $(\xi\xi')$ donne un terme $2\pi i\int_{\xi}^{\xi'} dV$. On obtient ainsi l'équation

$$\sum\int_{\xi}^{\xi'} dV + \int_{x_1}^{x_2} d\log\frac{\varphi}{\psi} + \sum m'\omega' = 0, \tag{2}$$

qui constitue le théorème d'Abel, dans son acception générale.

442. On peut associer les points ξ et ξ' deux à deux, de manière que tous les nombres entiers m' soient nuls. On sait, en effet, que, si l'on fait passer une courbe du degré n par un certain nombre de points pris à volonté sur la courbe $f=0$ du degré m, les autres points d'intersection en résultent. Lorsque n est plus petit que m, le nombre n' des points que l'on peut prendre à volonté est égal à $\frac{n(n+3)}{2}$; la courbe du degré n est alors déterminée; mais, lorsque n est égal ou supérieur à m, ce nombre est égal à $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$; il est moindre que celui qui est nécessaire pour déterminer la courbe. A n' points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n'}$ d'intersection de la courbe $\varphi=0$ avec la courbe $f=0$, faisons correspondre n' points pris à volonté parmi les mn points d'intersection de la courbe $\psi=0$ avec $f=0$, désignons-les par $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, et joignons-les aux précédents par des lignes arbitraires $\xi_1\xi'_1$, $\xi_2\xi'_2, \ldots, \xi_{n'}\xi'_{n'}$, avec la restriction indiquée. Sur ces lignes prenons des points $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{n'}$ voisins respectivement des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n'}$; par ces n' points nous pourrons faire passer une courbe $\varphi''=0$ du degré n et différant très-peu de la courbe $\varphi=0$;

cette courbe coupe la courbe $f=0$ en $mn-n'$ autres points $\xi''_{n'+1}$, $\xi''_{n'+2}, \ldots, \xi''_{mn}$, voisins respectivement de $\xi_{n'+1}, \xi_{n'+2}, \ldots, \xi_{mn}$. Sur les mêmes lignes on prendra ensuite des points $\xi'''_1, \xi'''_2, \ldots, \xi'''_{n'}$ voisins respectivement de $\xi''_1, \xi''_2, \ldots, \xi''_{n'}$, et l'on fera passer par ces points une courbe $\varphi'''=0$ du degré n et différant très-peu de la courbe $\varphi''=0$. Cette courbe coupera $f=0$ en d'autres points $\xi'''_{n'+1}, \xi'''_{n'+2}, \ldots, \xi'''_{mn}$, voisins respectivement de $\xi''_{n'+1}, \xi''_{n'+2}, \ldots, \xi''_{mn}$, et ainsi de suite ; on passera de la sorte, par une déformation continue, de la courbe φ à la courbe ψ. La série des points $\xi_{n'+1}, \xi''_{n'+1}, \xi'''_{n'+1}, \ldots$ formera une ligne continue unissant le point $\xi_{n'+1}$ de la courbe φ à un certain point $\xi'_{n'+1}$ de la courbe ψ; de même la série des points $\xi_{n'+2}, \xi''_{n'+2}, \xi'''_{n'+2}, \ldots$ formera une ligne unissant le point $\xi_{n'+2}$ de la courbe φ à un certain point $\xi'_{n'+2}$ de la courbe ψ, et ainsi de suite. De cette manière, la corrélation des $mn-n'$ autres points ξ et ξ' est déterminée : elle résulte de celle adoptée pour les n' premiers points.

Lorsque $\psi=\varphi$, la fonction $\log\frac{\varphi}{\psi}$ reste constante sur chaque cycle, et par conséquent sa variation est nulle; les nombres m' sont nuls. Lorsque la fonction ψ diffère très-peu de φ, le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ différant peu de l'unité, l'intégrale $\int d\log\frac{\varphi}{\psi}$ sur un cycle différera peu de la précédente, si elle en diffère; et, par conséquent, le nombre entier m' est encore nul. On pourra continuer de cette manière tant que les lignes $\xi\xi'$, en s'allongeant, ne rencontrent pas les lacets relatifs aux points critiques, ou le lacet $(x_1 x_2)$. Avec ces restrictions, l'équation (2) se réduit à

$$\sum \int_{\xi}^{\xi'} dV + \int_{x_1}^{x_2} d\log\frac{\varphi}{\psi} = 0. \tag{3}$$

Le même raisonnement s'applique à l'intégrale abélienne de première espèce; le lacet $(x_1 x_2)$ n'existant plus, l'équation se simplifie et devient

$$\sum \int_{\xi}^{\xi'} dV = 0. \tag{4}$$

La somme des valeurs de l'intégrale relatives aux diverses lignes qui

joignent les points d'intersection des courbes f et φ aux points d'intersection des courbes f et ψ, de la façon indiquée, est nulle.

Dans ces deux derniers Chapitres, nous avons mis à profit l'ouvrage de MM. Clebsch et Gordan que nous avons déjà cité (nº **113**).

Addition des intégrales elliptiques.

443. La formule de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce est une conséquence de cette loi générale. La courbe $f=0$ est ici

$$y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)=1-(1+k^2)x^2+k^2x^4. \tag{5}$$

Les points d'intersection de cette courbe et de la parabole

$$y=px^2+qx+1 \tag{6}$$

sont donnés par l'équation du troisième degré

$$(p^2-k^2)x^3+2pqx^2+(q^2+2p+1+k^2)x+2q=0, \tag{7}$$

abstraction faite de la racine $x=0$. Appelons x_1, x_2, x_3 les trois racines de cette équation, et y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y données par l'équation (6). On peut déterminer les constantes p et q de manière que deux des racines x_1 et x_2 aient des valeurs données; la troisième x_3 sera alors fonction des deux premières. De l'équation (7) on déduit

$$p=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}, \tag{8}$$

d'où

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{px_1x_2-1}=-\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1y_2-x_2y_1}=-\frac{x_1y_2+x_2y_1}{1-k^2x_1^2x_2^2}. \tag{9}$$

Supposons que la courbe ψ soit la parabole (6) et la courbe φ la parabole particulière $y=-\frac{1+k^2}{2}x^2+1$, pour laquelle $x_1=x_2=0$,

et, par suite, $x_3 = 0$. On a, d'après l'équation (4),

$$\int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV = 0,$$

ou

(10) $$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

La relation (9), sous sa dernière forme, donne la première des formules (1) du n° 318, savoir

(11) $$\lambda(z_1 + z_2) = \frac{\lambda(z_1)\lambda'(z_2) + \lambda(z_2)\lambda'(z_1)}{1 - k^2\lambda^2(z_1)\lambda^2(z_2)}.$$

444. Si V est une intégrale elliptique de seconde espèce, on a approximativement, pour les valeurs très-grandes de x,

$$y = \pm k x^2, \quad \varphi = \frac{(1 \pm k)^2}{2} x^2, \quad \psi = (\pm k - p) x^2 - q x,$$

$$\log \frac{\varphi}{\psi} = C + \frac{q}{\pm k - p} \frac{1}{x}, \quad dV = \pm \frac{1}{k} dx;$$

les deux circuits donnent $2\pi i \frac{q}{k(k \mp p)}$, ensemble $2\pi i \frac{2q}{k^2 - p^2}$, ou, d'après l'équation (7), $2\pi i x_1 x_2 x_3$; le second membre de l'équation (4) est alors égal à $x_1 x_2 x_3$, et l'on a

(12) $$\int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV = x_1 x_2 x_3,$$

ou

(13) $$\zeta(z_1) + \zeta(z_2) + \zeta(z_3) = \lambda(z_1)\lambda(z_2)\lambda(z_3);$$

en vertu de la relation (10), c'est l'équation (24) du n° 324.

445. Considérons enfin le cas où V est une intégrale elliptique de troisième espèce, mise sous la forme (17), adoptée au n° 439. D'après l'hypothèse faite sur la position de la ligne $O\alpha$, le lacet qui unit le

point (α, β) au point $(-\alpha, \beta)$ entre dans le premier circuit, et donne

$$\pi i \int_{(-\alpha,\beta)}^{(\alpha,\beta)} d \log \frac{\varphi}{\psi} = \pi i \log \frac{\psi(-\alpha,\beta)}{\psi(\alpha,\beta)},$$

puisque $\varphi(-\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$. L'autre lacet entre dans le second circuit, et donne de même

$$-\pi i \int_{(-\alpha,-\beta)}^{(\alpha,-\beta)} d \log \frac{\varphi}{\psi} = -\pi i \log \frac{\psi(-\alpha,-\beta)}{\psi(\alpha,-\beta)}.$$

L'équation (3) devient donc

$$(14) \qquad \int_0^{x_1} dV + \int_0^{x_2} dV + \int_0^{x_3} dV + \frac{1}{2} \log \frac{\psi(-\alpha,\beta)\psi(\alpha,-\beta)}{\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta)} = 0.$$

Évaluons le dernier terme. On a

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta) &= (p\alpha^2+1)^2-(\beta-q\alpha)^2 = 2q\alpha\beta+(2p-q^2+1+k^2)\alpha^2+(p^2-k^2)\alpha^4\\ &= 2q\alpha\left[\beta+\frac{p^2-k^2}{2q}\alpha^3+\left(\frac{q^2+2p+1+k^2}{2q}-q\right)\alpha\right]\\ &= 2q\alpha\left[\beta-\frac{\alpha^3}{x_1x_2x_3}-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+q\right)\alpha\right].\end{aligned}$$

De la relation $y_3 = px_3^2 + qx_3 + 1$, dans laquelle on remplace p par sa valeur (8), on déduit

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+q = \frac{x_1x_2y_3-x_3^2}{x_1x_2x_3};$$

il en résulte

$$\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1x_2x_3}\left[\alpha^2-x_3^2+\frac{x_1x_2}{\alpha}(\alpha y_3-x_3\beta)\right].$$

On a de même

$$\psi(-\alpha,\beta)\psi(\alpha,-\beta) = -\frac{2q\alpha^2}{x_1x_2x_3}\left[\alpha^2-x_3^2+\frac{x_1x_2}{\alpha}(\alpha y_3+x_3\beta)\right],$$

et, par suite,

$$\frac{\psi(\alpha,\beta)\psi(-\alpha,-\beta)}{\psi(-\alpha,\beta)\psi(\alpha,-\beta)} = \frac{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3-x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}}{1+\dfrac{x_1x_2}{\alpha}\,\dfrac{\alpha y_3+x_3\beta}{\alpha^2-x_3^2}} = \frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a+z_3)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_3)}}.$$

On obtient ainsi la relation

(15) $$\varpi(z_1)+\varpi(z_2)+\varpi(z_3) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z_2)}{\lambda(a)\lambda(a-z_1-z_2)}}{1+\dfrac{\lambda(z_1)\lambda(z)}{\lambda(a)\lambda(a+z_1+z_2)}},$$

d'où l'on déduit facilement l'équation (28) du n° 325.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE III.

LES INTÉGRALES DÉFINIES.

LIVRE IV.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS.

LIVRE V.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

LIVRE VI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE VII.

ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

LIVRE VIII.

TRANSFORMATION.

LIVRE IX.

THÉORÈME D'ABEL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 17, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $u = z'^{n-m}\dfrac{A_m + A_{m-1} z' + \ldots + A_0 z'^m}{B_n + B_{n-1} z' + \ldots + B_0 z'^n}$,

lisez $u = z'^{n-m}\dfrac{A_0 + A_1 z' + \ldots + A_m z'^m}{B_0 + B_1 z' + \ldots + B_n z'^n}$.

Page 18, ligne 8 en descendant, *au lieu de* n° 10, *lisez* n° 12.

Page 41, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $(\nu_3 + \varepsilon_3) z^{\frac{}{n}}$, *lisez* $(\nu_3 + \varepsilon_3)^{\frac{1}{n}}$.

Page 60, ligne 6, en descendant, *au lieu de* $i\sqrt{2}\, z_1^{\frac{n}{}} z'^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $i\sqrt{2}\, z_1^{\frac{5}{2}} z'^{\frac{1}{2}}$.

Page 85, ligne 13, en remontant, *au lieu de* $f''(z)\dfrac{h}{1}$, *lisez* $f''(z)\dfrac{h}{2}$.

Page 103, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $+ \sin ha \cos hb$, *lisez* $+ \sin ha \sin hb$.

Page 110, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $+ e^{-2\varrho + 2^2 a'} + e^{-\varrho + a'}$, *lisez* $+ e^{2\varrho + 2^2 a'} + e^{\varrho + a}$.

Page 117, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $\dfrac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{\omega}} \theta_1(z)$, *lisez* $\dfrac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi z i}{\omega}} \theta_1(z)$.

Page 171, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $(b)^\delta$, *lisez* $(b)_\gamma^\delta$.

Page 176, ligne 4, en descendant, *au lieu de* supposons qu'on décrive, *lisez* quand on décrit.

Page 179, ligne 13, en remontant, *au lieu de* points ordinaires, *lisez* points ordinaires, le premier pour la fonction u', le second pour la fonction $v = u'z'^2$.

Page 268, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $+ b'_1 \omega_1$, *lisez* $+ b'_1 \omega'_1$.

Page 270, ligne 10, en remontant, *au lieu de* $- a_1 a''$, *lisez* $- a_1 a'$.

Page 279, ligne 4, en remontant, *au lieu de* $+ A_{n-1}$, *lisez* $+ A_{n-1} P_0$.

Page 319, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $\vartheta(0) = \sqrt{\dfrac{g\omega' k'}{\pi}}$, *lisez* $\vartheta(0) = \sqrt{\dfrac{g\omega' k'}{\pi i}}$.

Page 353, ligne 10, en descendant, *au lieu de* points b et c, *lisez* points a et d.

Page 361, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\dfrac{\omega}{2} + m\omega + m'\omega'$, et les infinis $\dfrac{\omega + \omega'}{2} + m\omega + m'\omega'$,

lisez $\dfrac{\omega}{2} + 2m\omega + m'\omega'$, et les infinis $\dfrac{\omega + \omega'}{2} + 2m\omega + m'\omega'$.

Page 370, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\sqrt{k'_1} = \dfrac{\sqrt{ik'}}{k}$, *lisez* $\sqrt{k'_1} = \sqrt{\dfrac{ik'}{k}}$.

Page 374, ligne 5, en descendant, *au lieu de* les multiplicateurs, *lisez* le premier multiplicateur.

Page 395, ligne 3, en descendant, *au lieu de* f_1, *lisez* f_1^m.

Page 450, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\dfrac{\left(kk'^2 \dfrac{d\Omega}{dk}\right)}{dk}$, *lisez* $\dfrac{d\left(kk'^2 \dfrac{d\Omega}{dk}\right)}{dk}$.

Page 458, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $\lambda\left(\dfrac{\omega + \omega'}{k}\right) = \sqrt{\dfrac{k + ik'}{4}}$, *lisez* $\lambda\left(\dfrac{\omega + \omega'}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{k + ik'}{k}}$.

Page 467, ligne 9, en remontant, *au lieu de* n° 201, *lisez* n° 221.

Page 470, ligne 4, en descendant, *au lieu de* $+ 2kh' \frac{\partial \mathrm{Al}}{k}$, *lisez* $+ 2kk'^2 \frac{\partial \mathrm{Al}}{\partial k}$.

Page 575, ligne 9, en descendant, *au lieu de* $\sqrt{\frac{g_1^3 k' k_1}{nkk'}}$, *lisez* $\sqrt{\frac{g_1^3 k_1 k_1}{nkk'}}$,

Page 581, ligne 11, en remontant, *au lieu de* $\lambda \left[z + (n-1)\frac{2\omega}{n} + \frac{\omega}{n} \right]$, *lisez* $\left[z + (n-1)\frac{2\omega}{n} + \frac{\omega'}{n} \right]$.

Pages 590, 591, 592, *au lieu de* $\lambda'(z)$ *et de* $\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$, *lisez partout* $\frac{1}{g}\lambda'(z)$, $\frac{1}{g_1}\lambda'\left(z, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$.

Page 631, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $(-1)^{\alpha} 2^{\frac{n-1}{2}} u^n$, *lisez* $(-1)^{\alpha} 2^{-\frac{n-1}{2}} u^n$.
Page 631, ligne 8, en remontant, *au lieu de* l'équation (10), *lisez* l'équation (9).
Page 631, ligne 3, en remontant, *au lieu de* la série (8), *lisez* la série qui donne ω.
Page 650, ligne 1, en remontant, *au lieu de* v_8, *lisez* v^8.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
256 Quai des Augustins, 55.